



Une méthode sans maillage basée sur la résolution de l'EDP par séries de Taylor

Yendoubouam Tampango, Michel Potier-Ferry, Yao Koutsawa

► To cite this version:

Yendoubouam Tampango, Michel Potier-Ferry, Yao Koutsawa. Une méthode sans maillage basée sur la résolution de l'EDP par séries de Taylor. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592826

HAL Id: hal-00592826

<https://hal.science/hal-00592826>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode sans maillage basée sur les séries de Taylor

Y. Tampango¹, M. Potier-Ferry¹, Y. Koutsawa²

¹ LEM3, Université de Metz, France, yendamp@univ-metz.fr, michel.potierferry@univ-metz.fr

² CRP Henri Tudor, Luxembourg, yao.koutsawa@tudor.lu

Résumé — Nous introduisons une méthode sans maillage utilisant des fonctions de forme de haut degré. Cette méthode utilise des approximations de Taylor pour une résolution exacte de l'équation aux dérivées partielles (EDP) dans le domaine. Sur le bord une méthode des moindres carrés couplée à la technique de collocation par points est utilisée pour appliquer les conditions aux limites. Une étude de convergence et de détection de singularités est faite. Ces informations permettent d'accélérer la convergence.

Mots clés — Méthode sans maillage, Analyse de convergence, Approximation polynomiale.

1 Introduction

Les méthodes sans maillages ont donné lieu à beaucoup de travaux de recherche pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) [6]. L'avantage principal de ces méthodes est l'absence d'un maillage explicite. La solution approchée est construite totalement en se basant sur un certain nombre de noeuds à l'intérieur du domaine. Néanmoins ces méthodes restent peu utilisées pour des simulations à caractère industriel, principalement en raison des difficultés liées à l'intégration numérique. Il est donc toujours intéressant de travailler sur de nouvelles méthodes sans maillage. Dans cet article, nous nous intéressons à une méthode sans maillage introduite récemment dans [1]. Cette technique utilise des fonctions de formes polynomiales de haut degré. La prise en compte des conditions aux limites se fait par la méthode des moindres carrés comme proposé par Zhang et al [2], pour stabiliser la technique de collocation par points. Dans [1] il a été montré que la méthode converge bien et que la qualité de cette convergence dépend du degré (p-convergence). Néanmoins la vitesse de convergence dépend du problème considéré et parfois une résolution par sous domaines devient nécessaire pour avoir la p-convergence. On sent donc la nécessité d'introduire des outils d'analyse de convergence : ceci est le but principal de cet article.

Bien que le problème soit résolu dans certains cas de manière exacte dans le domaine, une approximation est faite sur le bord lors de l'application des conditions aux limites. Cette approximation peut introduire des erreurs dans les calculs. L'étude de la convergence seule ne suffit pas pour s'assurer de la fiabilité de la technique. Dans les approximations de Taylor, on observe parfois des instabilités des coefficients de la série obtenue. En effet un coefficient peut varier fortement en passant d'un degré à un autre. Dans un premier temps nous nous sommes intéressés à cette analyse. Une fois l'efficacité de la technique établie, on pourra s'intéresser à l'étude de la convergence et plus encore essayer d'obtenir des informations sur la structure de la fonction approchée. Dans la littérature il existe plusieurs techniques numériques pour estimer le rayon de convergence et localiser les éventuelles singularités de la fonction inconnue : critère d'Hadamard, diagrammes de Domb Sykes...

2 Présentation de la technique

2.1 Mise en oeuvre

La méthode proposée s'établit en deux étapes. Dans un premier temps une résolution exacte de l'équation est faite, en faisant des approximations de Taylor. Cette résolution conduit à l'apparition des fonctions de formes de type polynomiales. La deuxième étape est l'application des conditions aux limites. Dans cette partie, nous faisons une brève présentation de la méthode. Une description complète pourra être trouvée dans [1]. Pour illustrer la technique nous considérons le problème bidimensionnel de

Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + fu = 0 & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où f est une fonction analytique donnée sur un disque D .

La solution u est approchée par une série de Taylor 2D au point $[x, y] = [0, 0]$:

$$u^h(x, y) = \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^k u_{k-i,i} x^{k-i} y^i = \sum_{k=0}^N \langle X^k \rangle \{u^k\}. \quad (2)$$

avec

$$\langle X^k \rangle = \langle x^k, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1}, y^k \rangle \text{ et } \{u^k\}^T = \langle u_{k,0}, u_{k-1,1}, \dots, u_{1,k-1}, u_{0,k} \rangle$$

Généralement le point de développement est choisi de telle manière que tout le domaine soit visible. L'action du laplacien sur la forme (2) donne :

$$\Delta u^h(x, y) = \sum_{k=2}^N \langle X^{k-2} \rangle [\Delta^{k-2}] \{u^k\} = \sum_{k=0}^{N-2} \langle X^k \rangle [\Delta^k] \{u^{k+2}\} \quad (3)$$

Δ^k est une matrice à $k+1$ lignes et $k+3$ colonnes, obtenue en faisant agir le laplacien sur la forme (2). On substitue (2) et (3) dans (1) et on fait une identification suivant l'ordre du monôme X^k . On obtient alors à chaque ordre k , la relation de récurrence (ici f est considérée comme une constante) :

$$-[\Delta^k] \{u^{k+2}\} + f \{u^k\} = 0 \quad (4)$$

Ainsi nous avons un système de $k+1$ équations pour $k+3$ inconnues. Afin de déterminer le vecteur inconnu, nous supposons connus $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. A chaque ordre nous décomposons le vecteur inconnu en deux :

$$\begin{aligned} \{u^k\} &= [S^{1,k}] \{v^k\} + [S^{2,k}] \{w^k\}; \\ \{v^k\}^T &= \langle u_{k,0}, u_{k-1,1} \rangle \quad \text{et} \quad \{w^k\}^T = \langle u_{k-2,2}, u_{k-3,3}, \dots, u_{1,k-1}, u_{0,k} \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

La relation de récurrence (4) permet donc d'écrire à chaque ordre k :

$$\{w^k\} = \sum_{i=0}^k [D^{i,k}] \{v^i\} \quad (6)$$

En remplaçant cette dernière relation dans (5), puis dans (2), on obtient l'ensemble des polynômes de degré N au plus, qui sont solutions de l'EDP :

$$u^h(x, y) = \langle P(x, y) \rangle \{v\} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} \{v\}^T &= \left\{ \{v^0\}^T, \dots, \{v^N\}^T \right\} \text{ et } \langle P(x, y) \rangle = \langle P_0(x, y), \dots, P_N(x, y) \rangle \\ \text{avec} \quad P_k(x, y) &= \langle X^k \rangle ([S^{1,k}] + \sum_{p=k}^N [S^{2,p}] [D^{p,k}]) \end{aligned} \quad (8)$$

Ainsi il ne reste donc qu'à déterminer le vecteur de variables principales $\{v\}$ pour avoir complètement u^h . C'est la dernière étape de la technique et elle consiste en l'application des conditions aux limites. On choisit M points sur le bord du domaine et on minimise la fonction :

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \|u^h(\underline{x}_j) - u_j^d(\underline{x}_j)\|^2 \quad (9)$$

Cette minimisation conduit à un système $Kv = F$ où K est une matrice inversible.

2.2 Applications

Pour valider la technique on présente quelques résultats obtenus sur les équations de Laplace et de Helmholtz.

Problème de Laplace

On considère l'équation (1) sur un disque avec $f = 0$:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega = \{(x,y)/x^2 + y^2 = 1\} \\ u(\underline{x}) = u_o(\underline{x}) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

La solution exacte de ce problème est $u_o(\underline{x})$. Cette solution admet une singularité en $\underline{x}_0 = [x_0, y_0]$. Dans [1], une bonne convergence de la technique a été observée pour ce problème. Ici nous nous intéressons à l'influence du point de singularité sur la vitesse de convergence. La convergence est mesurée par l'erreur relative définie par :

$$E_n = \frac{\|u(\underline{x}) - u^h(\underline{x})\|}{\|u(\underline{x})\|} = \frac{\|u(\underline{x}) - \sum_{i=0}^n u_{n-i,i} x^i y^{n-i}\|}{\|u(\underline{x})\|}$$

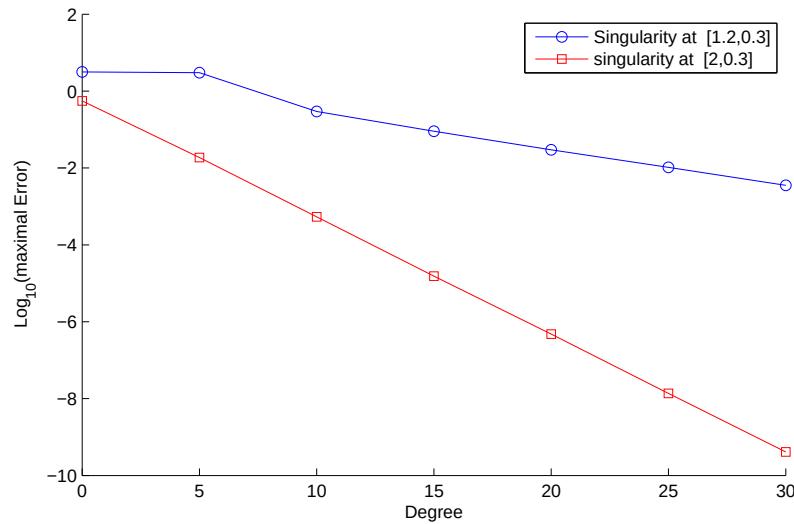


FIGURE 1 – P-convergence : problème de Dirichlet (10) avec deux cas, selon la position de la singularité $\underline{x}_0 = [x_0, y_0]$

La figure 1 présente l'évolution de l'erreur en fonction du degré, dans un cas où la singularité $\underline{x}_0 = [1.2, 0.3]$ est proche du bord du domaine et dans un autre où elle est plus éloignée $\underline{x}_0 = [2, 0.3]$. Dans les deux cas, on voit qu'il y a une convergence exponentielle avec le degré (p-convergence), comme pour la p-version des éléments finis [5]. Néanmoins la convergence est beaucoup plus lente si la singularité est proche du domaine, avec une erreur de l'ordre de 10^{-2} dans ce cas alors qu'elle est de l'ordre de 10^{-10} avec une singularité en $\underline{x}_0 = [2, 0.3]$. Ceci montre qu'il est intéressant d'évaluer les singularités de la fonction inconnue pour analyser et éventuellement améliorer la convergence de la série.

Problème d'Helmholtz

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \Omega = \{(x,y)/ -l \leq x \leq l \text{ et } 0 \leq y \leq h\} \\ u(x, 0) = u(x, h) = 0 \\ u(\pm l, y) = \sin(\frac{\pi}{h}y) \end{cases} \quad (11)$$

La solution exacte de ce problème est :

$$u(x,y) = \frac{\cosh\left(x\sqrt{1+\frac{\pi^2}{h^2}}\right)}{\cosh\left(l\sqrt{1+\frac{\pi^2}{h^2}}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{h}y\right) \quad (12)$$

Dans le tableau 1, on présente le logarithme de l'erreur pour deux longueurs de structures différentes. On remarque que comme dans le cas du problème de Laplace on a la p-convergence. Mais la convergence est moins bonne lorsque la structure est plus longue, car dans ce cas les couches limites sont plus marquées.

	5	10	15	25	35	45	60
$l=5$	-0.6042	-1.6735	-3.6802	-6.8653	-5.3546	-5.7254	-5.8298
$l=30$	-0.2418	-0.3195	-0.4843	-0.8174	-1.2566	-2.0848	-4.1788

TABLE 1 – Logarithme de l'erreur maximale pour le problème (11)

Sur la figure 2, les solutions exacte et approchée sont représentées pour la longueur $l = 30$. La convergence est bonne à l'intérieur du domaine et devient mauvaise lors qu'on s'approche du bord. Ceci fait penser à l'existence d'un domaine de convergence au delà duquel la solution est mal approchée par les séries de Taylor. Une manière de mieux approcher cette solution serait de résoudre le problème par sous domaines [1].

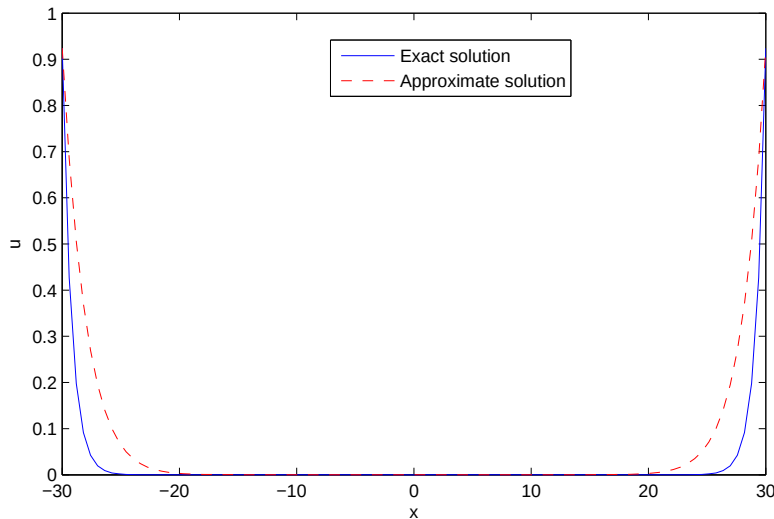


FIGURE 2 – Solution exacte et approchée du problème de Helmholtz le long de la ligne $y = 1.5$

3 Analyse de la convergence

Dans cette section on se propose d'étudier la fiabilité de la technique proposée et de faire une analyse des séries obtenues. Les coefficients de ces séries contiennent théoriquement toutes les informations concernant les propriétés et le comportement de la fonction analytique cherchée, y compris dans les zones éloignées du point à partir duquel on calcule les séries. Dans la littérature il existe plusieurs techniques numériques permettant d'estimer le rayon de convergence avec un nombre fini de coefficients. Dans un premier temps l'étude de la fiabilité de la technique proposée est faite à travers une étude de stabilité des coefficients suivant le degré. Ensuite on passe à l'analyse des séries obtenues, par la détermination des singularités et du rayon de convergence. Nous introduirons des techniques telles que les diagrammes de Domb Sykes, le critère d'Hadamard et une technique basée sur un critère de Darboux.

Afin de pouvoir utiliser ces techniques, nous ramenons nos séries solutions 2D en 1D, en fixant l'une des variables.

3.1 Etude de stabilité des coefficients

Il est possible d'extraire un certain nombre d'informations des coefficients d'une série de Taylor d'une fonction. Mais dans l'algorithme sans maillage étudié, on ne calcule pas les coefficients de Taylor d'une fonction donnée, et on ne calcule pas non plus les coefficients de Taylor de la solution d'une équation algébrique comme dans la méthode asymptotique numérique [7]. Dans la méthode proposée, on calcule des solutions polynomiales de degré élevé en couplant des séries de Taylor et une identification par une technique de collocation. C'est pourquoi il n'était pas évident que ces polynômes se comportent comme des séries de Taylor.

Pour répondre à cette question, nous avons comparé les coefficients de Taylor de la solution exacte, avec les coefficients du polynôme obtenu par la technique sans maillage proposée. Cette comparaison a été faite pour la solution du problème de Laplace pour le cas $\underline{x}_0 = [1.2, 0.3]$, et sur la ligne $y = 0$ (cf table 2) et pour le cas du problème de Helmholtz avec $l = 5$ et sur la ligne $y = 1.5$ (cf table 3).

	Collocation N=10	Collocation N=20	Série exacte
c_0	-0.784266	-0.784313727	-0.784313725
c_1	-0.576596	-0.576701274	-0.576701268
c_2	-0.391874	-0.392006103	-0.392006091
c_8	0.087762	0.08739559	0.08739570
c_9	0.092167	0.09185160	0.09185170
c_{10}	0.087152	0.08695963	0.08695973

TABLE 2 – Stabilité des coefficients de la série solution du problème de Laplace avec singularité en $[1.2, 0.3]$

	Collocation N=12	Collocation N=20	Série exacte
c_0	$3.395 \cdot 10^{-3}$	$3.4667 \cdot 10^{-3}$	$3.4664 \cdot 10^{-3}$
c_1	$-5.067 \cdot 10^{-16}$	$-7.917 \cdot 10^{-14}$	0
c_2	$2.8014 \cdot 10^{-3}$	$2.80235 \cdot 10^{-3}$	$2.80237 \cdot 10^{-3}$
c_4	$3.6849 \cdot 10^{-4}$	$3.775837 \cdot 10^{-4}$	$3.775849 \cdot 10^{-4}$
c_{10}	$2.030 \cdot 10^{-8}$	$1.055508 \cdot 10^{-8}$	$1.055534 \cdot 10^{-8}$
c_{11}	$-6.433 \cdot 10^{-21}$	$2.2448 \cdot 10^{-21}$	0
c_{12}	$-1.844 \cdot 10^{-12}$	$1.2914 \cdot 10^{-10}$	$1.2929 \cdot 10^{-10}$

TABLE 3 – Stabilité des coefficients de la série solution du problème d'Helmholtz avec $l=5$ et $h=4$

On constate que les coefficients de Taylor obtenus par la méthode sans maillage sont extrêmement précis, à l'exception parfois des derniers. Par exemple à l'ordre $N = 20$, la précision est de 10^{-5} pour le premier coefficient c_0 et elle est encore de 10^{-3} pour le coefficient c_{12} . En revanche, on observe certains écarts sur c_{10} et c_{12} dans le cas du tableau 3 pour le problème de Helmholtz. Néanmoins cette précision devrait être suffisante pour appliquer des techniques classiques d'analyse des séries.

3.2 Analyse des séries

3.2.1 Diagrammes de Domb Sykes

Les diagrammes de Domb Sykes sont inspirés par le critère de convergence de D'Alembert. Ce critère postule que le rayon de convergence d'une série comme définie plus haut, est la limite du rapport c_{n-1}/c_n . Ce calcul paraît impossible lorsqu'on ne connaît qu'un nombre limité de coefficients. Il faut donc faire une estimation de ce rapport. Domb et Sykes dans [3] montre que le rapport inverse c_n/c_{n-1} est une fonction linéaire de $1/n$ pour n suffisamment grand.

En effet pour une fonction singulière de type :

$$f(x) = \text{const} * \begin{cases} (x_0 \pm x)^\alpha, & \alpha \neq 0, 1, 2, \dots \\ (x_0 \pm x)^\alpha \log(x_0 \pm x), & \alpha = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

les coefficients de sa série entière vérifient :

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \pm \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right) \quad (13)$$

On a tracé sur les figure 3 et 4 les diagrammes de Domb Sykes pour des séries d'une seule variable déduites de la solution numérique de l'équation (10). Sur la figure 3, il s'agit de la fonction $u(x, x)$ (i.e. dans la direction $\pi/4$), et sur la figure 4 de la fonction $r \rightarrow u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $\theta = \arctg(y_0/x_0)$ (i.e. dans la direction de la singularité $[x_0, y_0]$). On constate que l'estimation (13) n'est valable que dans la direction de la singularité. Ceci suggère que le diagramme de Domb Sykes permet d'estimer les directions dans lesquelles il y a une singularité. D'autres tests ont été effectués dans ce cas et dans d'autres, qui montrent que le diagramme de Domb Sykes des fonctions $r \rightarrow u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ permet de trouver les directions dans lesquelles il peut y avoir une singularité.

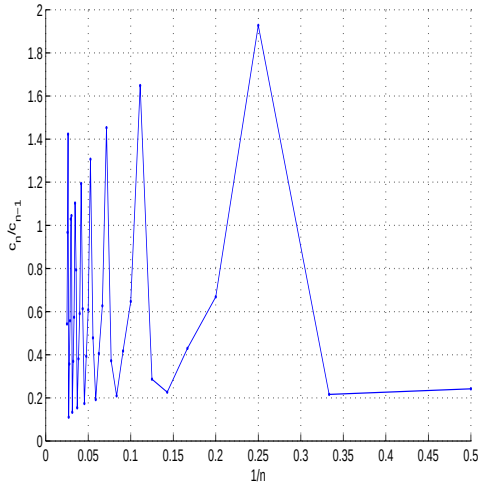


FIGURE 3 – Diagramme de Domb Sykes pour l'équation de Laplace dans la direction $\pi/4$

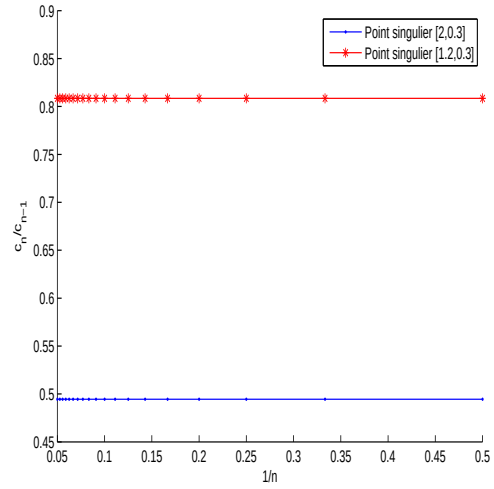


FIGURE 4 – Diagramme de Domb Sykes pour l'équation de Laplace dans la direction $\arctan(y_0/x_0)$

3.3 Critère de Darboux

Ici on utilise une technique présentée dans [4] par Hunter et Guerrieri. En utilisant un résultat classique de Darboux, ils ont montré que les coefficients de Taylor c_i d'une fonction admettant une singularité en x_0 de type $(x - x_0)^{-\nu}$ vérifient :

$$c_i x_0 - \frac{i + \nu - 1}{i} c_{i-1} = O(i^{\nu-3}) \quad (14)$$

En écrivant la relation (14) pour deux ordres successifs i et $i - 1$, et en négligeant les termes en $O()$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0} &= i \frac{c_i}{c_{i-1}} - (i-1) \frac{c_{i-1}}{c_{i-2}} = D(i) \\ \nu &= i \frac{c_i}{c_{i-1}} x_0 - i + 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Cette dernière relation est donc une estimation de la singularité et de son ordre grâce aux coefficients d'indice fini. Cette estimation du rayon de convergence sera comparée au critère d'Hadamard qui postule que : " le rayon de convergence d'une série $\sum a_n x^n$ est $R = 1/L$ avec $L = \limsup \|a_n\|^{1/n}$ ".

Degré (N)	Singularité Darboux	Singularité Domb Sykes	Critère d'Hadamard	v Darboux
15	1.2401085	1.2374733	1.2395022	1.031941
20	1.2365621	1.2368829	1.2388032	0.994812
30	1.2369345	1.2369319	1.2381821	1.0000623
35	1.2369336	1.2369318	1.2380034	1.000050
40	1.2369317	1.2369316	1.2378693	1.0000013

TABLE 4 – Position et ordre de singularité pour $\underline{x}_0 = [1.2, 0.3]$

Les tableaux 4 et 5 présentent la position de singularité par le critère de Darboux, d'Hadamard et de Domb Sykes, ainsi que l'ordre de singularité obtenu par la technique de Darboux. Ces tableaux sont construits dans la direction de la singularité. On constate que ces trois techniques donnent une assez bonne estimation de la position de singularité.

Degré (N)	Singularité Darboux	Singularité Domb Sykes	Critère d'Hadamard	v Darboux
15	2.0223748	2.0223748	2.0238753	1.00000007
20	2.0223748	2.0223748	2.0235001	0.999999
30	2.0223777	2.0223749	2.0231249	1.000041
35	2.0222251	2.0223719	2.0230178	0.997459
40	2.0230693	2.0224055	2.0229383	1.01312

TABLE 5 – Position et ordre de singularité pour $\underline{x}_0 = [2, 0.3]$

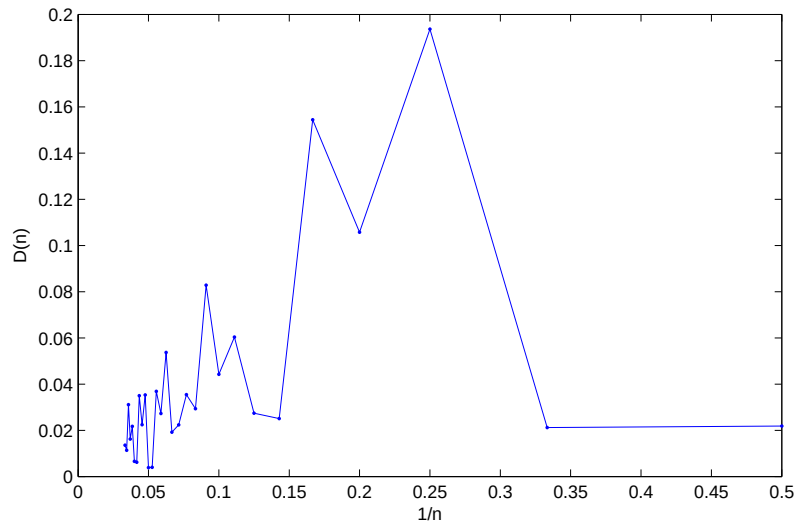


FIGURE 5 – Technique de Darboux dans la direction $2\pi/3$

Comme dans le cas des diagrammes de Domb Sykes, on constate une mauvaise estimation du rayon de convergence par la technique de Darboux lorsqu'on s'éloigne de la direction de singularité (figure 5). Dans ces directions, la valeur $D(i)$ de la relation (15) varie très fortement lorsqu'on passe d'un ordre à un autre. Il devient donc nécessaire de définir un test de fiabilité qui permettra de déterminer la direction de singularité et par suite sa position et son ordre. Compte tenu des résultats obtenus dans le tableau 4 et sur la figure 5, nous estimons que la différence importante de $D(i)$ entre deux ordres successifs est un test fiable pour détecter les directions dans lesquelles on a une bonne estimation du rayon de convergence. La direction de singularité est telle que pour chaque ordre N on a :

$$\left\| \frac{D(N)}{D(N-1)} - 1 \right\| \leq \epsilon$$

où ϵ est un nombre réel très petit choisi. Ce test de fiabilité donne un intervalle de direction sur lequel on a une bonne estimation de la position de singularité et de son ordre.

Nous avons aussi utilisé la technique des approximants de Padé pour détecter les singularités. Contrairement aux autres techniques, le point de singularité apparaît dans les pôles de l'approximant de Padé quelle que soit la direction choisie. Malgré tout, ce pôle reste difficile à extraire dans les cas où la structure de la solution analytique est inconnue. Ceci à cause de la présence d'autres pôles stables qui sont connus sous le nom de défauts par les spécialistes d'approximants de Padé.

4 Conclusion

Une méthode sans maillage a été proposée en se basant sur l'approximation de Taylor. Des applications faites sur les problèmes de Laplace et d'Helmholtz ont montré que la technique converge bien et qu'on a une p-convergence. Néanmoins la vitesse de convergence dépend fortement du rayon de convergence des séries et de la position et de la nature des singularités de la fonction cherchée. Plusieurs techniques d'analyse de séries ont été utilisées afin d'avoir une idée sur le comportement asymptotique des séries obtenues.

Cette dernière étude nous donne des informations très utiles. En effet, avec l'estimation du rayon de convergence, l'on pourra décider ou non de traiter le problème sur un unique domaine ou sur plusieurs sous domaines. La connaissance des points de singularités est aussi un facteur très important pour l'introduction des techniques d'accélération de convergence.

Références

- [1] Zézé D.S., Potier Ferry M, Damil N. *A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE*. Engineering Analysis with Boundary Element, 747-754, 2010.
- [2] Zhang X, Liu XH, Song KZ, Lu MW. *Least squares collocation meshless method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51 : 1089-1100, 2001.
- [3] Domb C., Sykes M.F. *Use of series expansions for the ising model susceptibility and excluded volume problem*. Journal of Mathematical Physics, Vol 2, No. 1 : 63-67, 1961.
- [4] Hunter C., Guerrieri B. *Deducing the properties of singularities of functions from their Taylor series coefficients*. SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol 39 : 248-263, 1980.
- [5] Babuska I., Szabo .B A., Katz L.N.. *The p-version of finite element method*. SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol 18 : 515-545, 1981.
- [6] Nayroles B., Touzot G., Villon P.. *Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements*. Computational Mechanics, Vol 10 : 307-318, 1992.
- [7] Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M.. *Méthode asymptotique numérique*, Hermes, 2007.