

## Vers une GFEM adaptée pour la simulation des minicomposites

B. Tranquart<sup>1</sup>, P. Ladevèze<sup>1,2</sup>, E. Baranger<sup>1</sup>, A. Mouret<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan (ENS-Cachan / CNRS / Paris 6 University / UniverSud Paris Pres), 61 Avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan, {tranquart,ladeveze,baranger}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>2</sup> EADS Foundation Chair of Advanced Computational Structural Mechanics

<sup>3</sup> SNECMA Propulsion Solide, Les 5 chemins, F-33187 Le Haillan Cedex

**Résumé** — Les bonnes propriétés thermomécaniques spécifiques des composites à matrice céramique (CMCs) en font des matériaux prometteurs pour la propulsion aéronautique. Les dernières générations de CMCs, dits autocicatrisants, atteignent des durées de vie particulièrement élevées (10 000h) mais sont très chers. La réduction des coûts passe par le développement de nouveaux CMCs plus compétitifs, et cela nécessite de nouveaux outils de simulation et d'optimisation. Dans ce cadre, un modèle multi-échelle, dérivé de la Generalized Finite Element Method, est mis en place pour l'optimisation qualitative des CMCs.

**Mots clés** — Multi-échelle, GFEM, Composites

## 1 Introduction

Les composites à matrice céramique (CMCs) sont prometteurs pour les applications aéronautiques où leurs bonnes propriétés thermomécaniques spécifiques en font un bon choix pour améliorer le rapport poids/poussé des réacteurs. Les CMCs étudiés sont constitués de fibres carbone ou céramique (d'un diamètre d'environ  $10\mu\text{m}$ ) tissées (en fil d'environ 1000 fibres) dans une matrice céramique. Ces matériaux ont un comportement à petite échelle complexe (déviations des fissures [1], oxydation [2]). Malgré leurs bonnes performances, ces matériaux restent très coûteux pour les applications civiles. L'objectif principal du projet ARCOCE (pilote par SNECMA Propulsion Solide) est de développer de nouvelles nuances du matériau plus compétitives tout en gardant des performances acceptables. L'optimisation des CMCs, généralement effectuée à l'aide d'un grand nombre d'essais de caractérisation, est longue et coûteuse. Afin de réduire le nombre d'essais et de faciliter l'optimisation du design du matériau, notre objectif est alors de développer un modèle qualitatif de comportement et de durée de vie du matériau, suffisamment flexible pour permettre de s'adapter aux évolutions de celui-ci et même les anticiper.

Ceci est en rupture avec les modèles macroscopiques traditionnels [3], pour lesquels une lourde procédure d'identification est nécessaire pour chaque nuance du matériau. Ils sont donc peu adaptés à une démarche d'optimisation, pour laquelle le design et le processus de fabrication du matériau est susceptible d'évoluer rapidement. Un modèle multi-échelle du fil est donc développé, la majorité des mécanismes de dégradation/cicatrisation apparaissant à ce niveau et où les mécanismes sont représentés finement, à leur échelle d'action. À cette échelle, les évolutions du matériau associées au procédé de fabrication se retrouvent dans la morphologie du fil, à travers l'apparition de différents motifs (géométrie, réseaux de fissures ...).

Il existe de nombreuses méthodes multi-échelles, qui peuvent être regroupées en trois catégories : les méthodes d'homogénéisation, les méthodes de superposition et les méthodes d'enrichissement. Les premières reposent sur l'obtention d'un matériau macroscopique continu, énergétiquement équivalent à la microstructure. Cette équivalence passe par la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (RVE), qui représente le plus petit volume de la microstructure nécessaire à l'équivalence énergétique. Cependant le RVE peut être difficile à définir, en particulier pour des microstructures aléatoires et/ou mettant en jeu des phénomènes non-linéaires, comme c'est le cas pour les CMCs (fissuration matricielle, fissuration sous-critique des fibres ...). Une généralisation de ce type de méthode au composite avec décohésion fibre-matrice a été développée, la FE<sup>2</sup> [4], où le comportement de chaque point d'intégration est obtenu par homogénéisation d'une cellule associée, qui évolue à chaque pas de temps. C'est une méthode

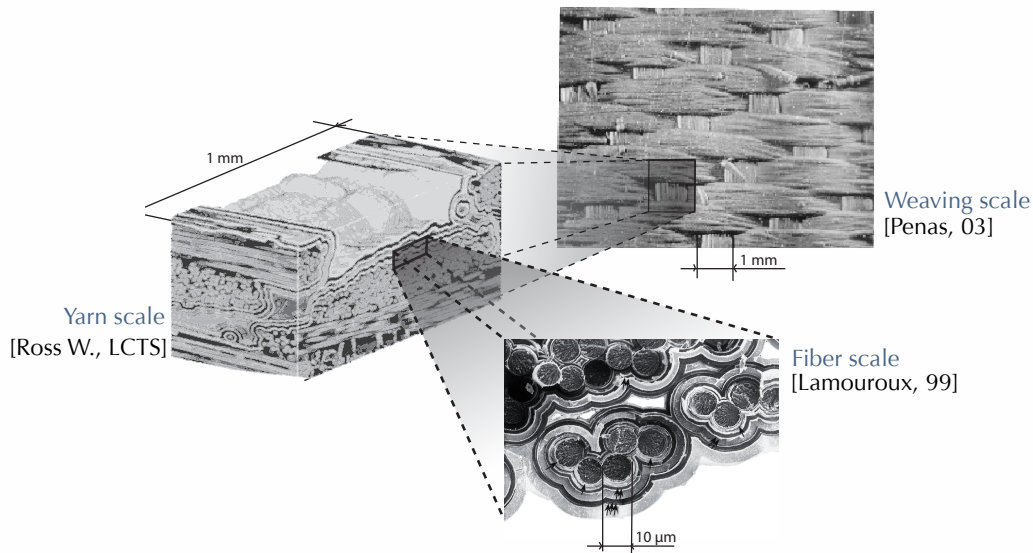


FIGURE 1 – Les différentes échelle des composites à matrice céramique.

numériquement lourde et peut montrer des difficultés sur les bords du domaine sur lesquels la cinématique homogénéiser peut être inadaptée. Les méthodes de superpositions tendent, elles, à superposer deux (ou plus) modèles, possiblement différents, l'un à grande échelle et généralement discretisé, l'autre fin, analytique ou discret, pour la simulation de phénomènes locaux (ou de détails microstructuraux). Les méthodes types Variational Multiscale Method [5], ou la Hierarchical Dirichlet Projection Method [6], en sont des exemples. Cependant le couplage des deux modèles ainsi que la non redondance des champs solutions sur la zone de chevauchement sont souvent les difficultés majeures de ce type de méthodes.

Les méthodes d'enrichissement, comme la eXtended Finite Element Method (XFEM, [7]), la Generalized Finite Element Method (GFEM, [8]) et la *hp-cloud* method [9], sont des généralisations de la méthode des Elément Finis (MEF), basées sur la méthode de partition de l'unité (PUM, [10]). Elles sont particulièrement intéressantes : d'une part elles bénéficient des résultats de convergence de la PUM et d'autre part, permettent une grande flexibilité quant à la topologie du domaine simulé tout en limitant le nombre d'inconnues de problème global. Elles évitent aussi la tâche fastidieuse de création des maillages pour les microstructures complexes. Elles reposent sur l'enrichissement de l'espace local d'approximation (espace des fonctions de formes en EF par exemple) à l'aide de fonctions dont on sait *a priori* qu'elles approchent bien *localement* le champ solution. Dans la Generalized Finite Element Method (GFEM, [11]) les fonctions d'enrichissement sont issues de problèmes micro, dits "handbooks", résolus par éléments finis. Cependant, l'attractivité de ces méthodes est compensée par la difficulté de leur mise en oeuvre, et ce à deux niveaux : i) la nécessité d'une description géométrique de type CAO pour l'extraction et le positionnement des problèmes handbooks, et ii) la complexité des procédures d'intégration mise en jeu du fait de la forme générale inconnue *a priori* des fonctions d'enrichissement, qui plus est définies sur des maillages différents.

Dans ce cadre, une méthode de type éléments finis généralisés (GFEM), basée sur la notion de "handbook", est développée et adaptée à la simulation des CMCs. A cette fin, des hypothèses sur l'enrichissement sont introduites explicitement dans la méthode, afin d'en simplifier l'intégration et ainsi de la rendre encore plus flexible pour la simulation de microstructures du type de celle des CMCs. Les bases de la méthode classique GFEM sont dans un premier temps rappelés, puis l'accent est mis sur les hypothèses additionnelles choisies et leur conséquences sur la méthode. La démarche est ensuite appliquée sur deux cas en élasticité linéaire en 2D et en 3D.

## 2 La GFEM

Nous allons rappeler dans cette partie les bases de la méthode GFEM classique et d'où proviennent les difficultés liées à celle-ci. On considère le problème classique de mécanique des milieux continus sur le domaine  $\Omega$  :

$$\text{Trouver } (u, \sigma) \text{ tel que } \begin{cases} \text{div}(\sigma) + f = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = U_d \text{ sur } \Gamma_u \\ \sigma \mathbf{n} = F_d \text{ sur } \Gamma_f \\ \sigma = \mathbf{H}(x)\varepsilon(u) \text{ et } \varepsilon = \frac{1}{2} [\text{grad}(u) + \text{grad}(u)^T] \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{H}(x)$  est le tenseur de Hooke, qui dépend de la position. La solution de ce problème 1 est recherchée sous la forme suivante :

$$u_{GFEM} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{PUM}} \Phi_i a_i}_{u_{FE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{PUM}} \Phi_i \sum_{j=1}^{n_{func}(\omega_i)} \tilde{a}_j^{(i)} \Psi_j}_{u_{enr}} \quad (2)$$

où les fonctions  $\Phi_i$  sont les fonctions de formes EF traditionnelles et  $\Psi_j$  sont les fonctions d'enrichissement. Les inconnues associées sont notées  $a_i$  et  $\tilde{a}_j^{(i)}$ . Les fonctions d'enrichissements sont issues de problèmes micro, appelés problèmes handbooks, et résolus par EF. Ils sont définis sur des motifs mettant en jeu des groupes d'entités comme le montre la Fig. 2. Dans le cas des CMCs, ce sera par exemple des groupes de fibres, des pores ou des fissures. Comme ces fonctions sont sensées bien approcher localement la solution, le choix des conditions limites et chargement à appliquer aux problèmes micro est un point clef. Dans les travaux de Strouboulis *et al.*, une base canonique de chargements est utilisée, mais on notera que les conditions limites "exactes" peuvent être extraite du problème global, comme dans les travaux de Duarte *et al.* [12]. Cette démarche mène cependant à un calcul en plusieurs temps. Cette "collection" de problèmes handbooks est ensuite résolue par EF avant le calcul principal et les solutions sont stockées afin de servir d'enrichissement dans ce dernier.

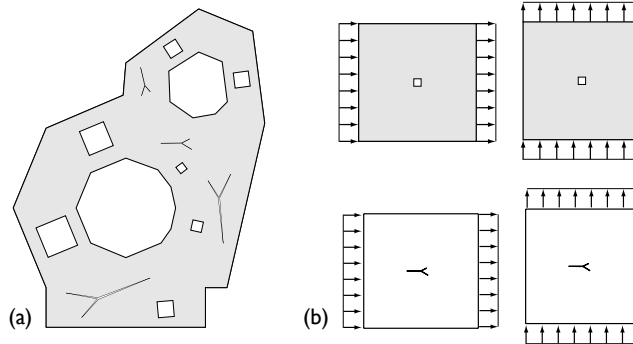


FIGURE 2 – (a) Extraction des entités pour la création des problèmes handbooks [11]; (b) Résolutions des problèmes handbooks en utilisant une base canonique de chargement [11].

En réécrivant le problème 1 sous forme faible et en utilisant l'interpolation 2, on montre que l'énergie de déformation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \mathbf{H}\varepsilon(u) : \varepsilon(u^*) \partial\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{H}\varepsilon(u_{FE}) : \varepsilon(u_{FE}^*) \partial\Omega + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{H}\varepsilon(u_{enr}) : \varepsilon(u_{enr}^*) \partial\Omega}_A + 2 \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{H}\varepsilon(u_{EF}) : \varepsilon(u_{enr}^*) \partial\Omega}_B$$

$$A = \sum_{ijkl} \int_{\Omega} \mathbf{H}\nabla(\Phi_i \Psi_j) \nabla(\Phi_k \Psi_l) \partial\Omega \quad (3)$$

$$B = \sum_{ijk} \int_{\Omega} \mathbf{H}\nabla(\Phi_i) \nabla(\Phi_j \Psi_k) \partial\Omega \quad (4)$$

Les termes A et B de cette équations sont liés à l'enrichissement. Cependant, comme les fonctions d'enrichissement  $\Psi_j$  sont définis sur des maillages différents, l'intégration de ces termes est complexe, la

méthode classique de points de Gauss n'étant pas adaptée. Ainsi, la GFEM a recourt à des procédures d'intégration numérique adaptatives qui sont lourdes et couteuses à mettre en place.

### 3 Une GFEM adaptée aux CMCs

Il vient d'être montré que les difficultés d'intégration propres à la GFEM viennent des fonctions d'enrichissement, connues sur des maillages différents. Il s'agit donc d'apporter des hypothèses sur la forme de ces fonctions, compte tenu de la microstructure typique des CMCs. En effet, on peut noter qu'elle met en jeu un grand nombre d'hétérogénéités de petites échelles, comparées à celles du fil. Or la perturbation induite par une petite hétérogénéité dans un grand domaine est localisée (principe de Saint Venant). Basé sur cette constatation, on introduit une hypothèse de séparation d'échelle entre fonction d'enrichissement et les fonctions de formes classique EF. On suppose ainsi que les fonctions d'enrichissement, nécessaires pour modéliser la cinématique à petite échelle, ont un support de petite taille comparé aux fonctions de forme classiques des éléments. Sous ces conditions, l'interpolation classique, Eq. 2, peut être réécrite de la façon suivante :

$$u \approx \sum_i \Phi_i a_i + \sum_j \Psi_j \tilde{a}_j \quad (5)$$

En utilisant cette nouvelle forme d'interpolation, les termes A de l'Eq. 3 et B de l'Eq. 4 ont maintenant la forme suivante :

$$A = \sum_{ij} \int_{\Omega} \mathbf{H} \nabla(\Psi_j) \nabla(\Phi_i) \partial\Omega \quad (6)$$

$$B = \sum_{ij} \int_{\Omega} \mathbf{H} \nabla(\Phi_i) \nabla(\Psi_j) \partial\Omega \quad (7)$$

Les produits croisés  $\Phi_i \Psi_j$  ont disparu, ce qui rend ces termes plus aisés à intégrer. Cependant, le terme A reste complexe car il faut toujours intégrer  $\nabla(\Phi_i) \nabla(\Psi_j)$  où  $\Psi_j$  et  $\Phi_i$  sont connues sur deux maillages différents. Il a néanmoins été noté précédemment que les perturbations dues aux hétérogénéités sont localisées. Ainsi, sous conditions qu'elles soient suffisamment éloignées, les interactions des hétérogénéités peuvent être négligées. En supposant donc qu'il n'y a pas d'interaction, le terme A se réduit à :

$$A = \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{H} \nabla(\Psi_i) \nabla(\Psi_i) \partial\Omega \quad (8)$$

expression qui ne fait plus intervenir que chacun des fonctions handbooks séparément.

On a donc introduit deux hypothèses :

- la séparation d'échelle entre le maillage global, et les fonctions de formes EF associées, et les fonctions d'enrichissement ;
- la non-interaction entre les différents handbooks.

Elles ont permis de largement réduire les difficultés d'intégration en séparant celle-ci entre la partie grossière et les handbooks, pris séparément. Une méthode classique par points de Gauss, appliquée sur chacun des maillages handbooks est à présent suffisante.

Le traitement des problèmes handbooks diffère de la méthode GFEM classique. D'une part, ils doivent être traités de telle façon qu'ils regroupent les entités qui sont en forte interaction, afin de limiter les erreurs liées à l'hypothèse de non-interaction posée précédemment. Dans le cas de fibres dans une matrice continue, seules les fibres se touchant presque doivent faire l'objet d'un handbook particulier, les autres pouvant être considérées seules. On ne détaillera pas ici l'extraction pour des raisons de clarté. D'autre part, les fonctions d'enrichissement sont vues comme des problèmes de résidu. Leurs solutions sont donc localisées et rapidement décroissantes loin du motif, vérifiant ainsi l'hypothèse de séparation d'échelle. L'approche pour la définition du problème de résidu est similaire à celle de Eshelby pour une inclusion ellipsoïdale noyée dans un milieu continu et infini. On peut montrer qu'il se pose sous la forme générale suivante,  $\Omega$  étant le domaine total matrice plus inclusion et  $P$  l'inclusion seule :

$$\text{Trouver } \Psi_i \in \mathcal{U}^0(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \mathbf{H} \varepsilon(\Psi_i) : \varepsilon(u^*) \partial\Omega + \int_P \tilde{\sigma} : \varepsilon(u^*) \partial\Omega = 0, \forall u^* \in \mathcal{U}^0(\Omega) \quad (9)$$

où  $\mathcal{U}^0(\Omega)$  est l'espace admissibilité cinématique. Le chargement en précontrainte de ce problème,  $\tilde{\sigma}$ , provient de la différence dans les propriétés matériaux entre l'inclusion et la matrice et vaut  $\tilde{\sigma} = \Delta \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{u})$ , où  $\bar{u}$  est la solution du problème homogène. Comme elle est inconnue *a priori*, on se donne donc une base de chargement  $\tilde{\sigma}$ , par exemple en 2D :

$$\tilde{\sigma} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (10)$$

Ce problème est ensuite résolu par EF. On remarquera que chaque instance de handbook donne 3 inconnues de plus à chaque élément enrichi.

## 4 Applications numériques

Cette méthode a été appliquée à plusieurs problèmes simples mettant en action quelques fibres. En particulier, l'interaction entre deux handbooks a été étudié à travers l'interaction entre deux fibres, et comparé à la solution EF fine et convergée. Il s'avère que la démarche reste valide pour des fibres presque en contact comme le montre la Fig. 3. L'erreur relative commise sur la contrainte dans le sens de la traction est limitée, 11% maximum, ce qui est acceptable dans le cadre de l'approche qualitative développée dans cette étude. Ainsi seuls les groupes de fibres qui se touchent devraient faire l'objet de handbooks particuliers. On se limite cependant dans un premier temps, dans les exemples suivants, à utiliser un handbook d'une seule fibre en milieu infini.

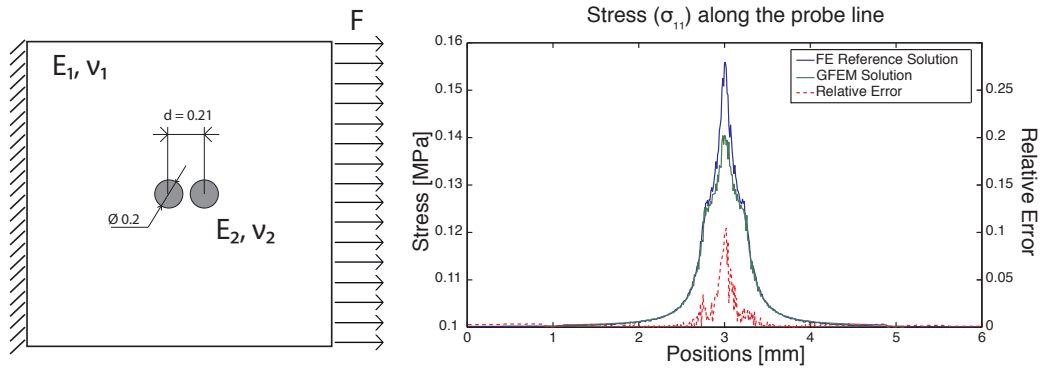


FIGURE 3 – Comparaison entre la contrainte  $\sigma_{xx}$ , le long de la ligne, obtenue par GFEM et FEM pour deux fibres presque en contact.

De manière similaire, de plus large cas tests ont été étudié. Ici, une section de fil simplifié en traction transverse (regroupant 360 fibres) a été simulé en élasticité, menant à la résolution d'un système de seulement 1092 inconnues. Le maillage grossier comporte 6 éléments carrés.

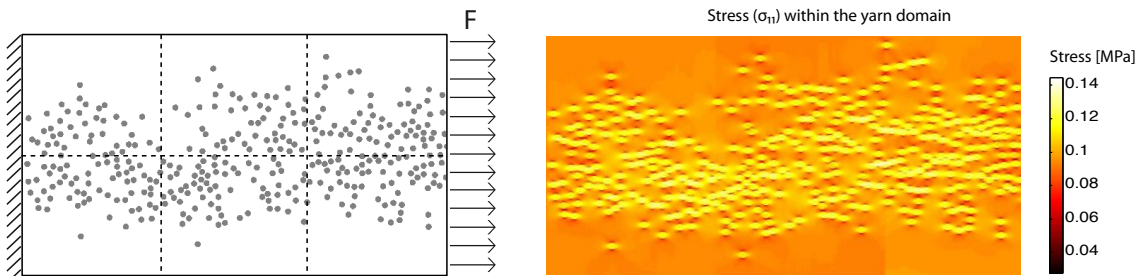


FIGURE 4 – Schéma d'un cas de traction transverse sur une section de fil simplifié de 360 fibres (à gauche) et la contrainte associée (MPa).

La méthode est ensuite étendue au cas tridimensionnel. Une attention particulière est portée sur les problèmes handbooks. En effet la présence d'une fibre ne demande par l'ajout d'un handbook 3D puisque

la solution d'une fibre infini en milieu infini est essentiellement un champ plan, en déformation plane. A contrario, la présence d'un pore de petite taille (dans la direction hors plan), va entrainer une distribution 3D de la contrainte. Dans le cas présenté où seules des fibres sont introduites, Fig 5, seule la solution d'un handbook d'une seule fibre a été introduite.

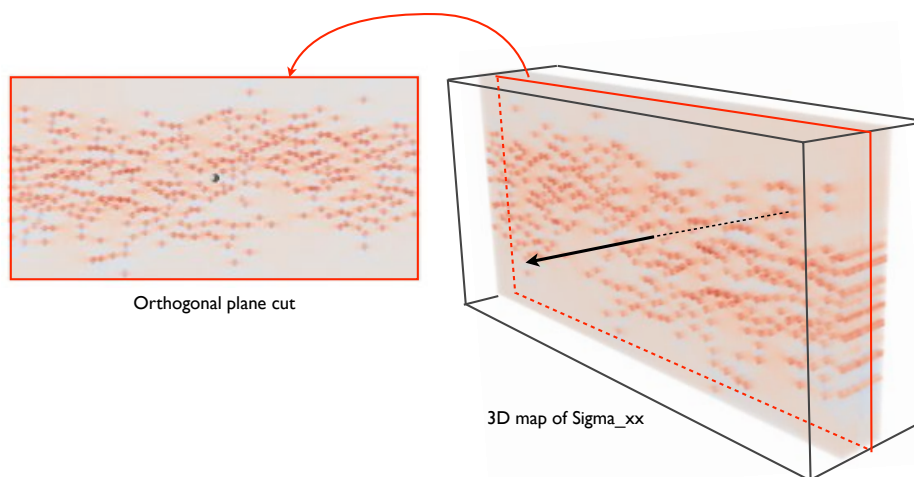


FIGURE 5 – Champ de contrainte dans un fil de CMC 3D.

## 5 Conclusion

Cette étude présente une GFEM modifiée, appliquée à la simulation d'un de composite à matrice céramique en élasticité. Deux hypothèses ont été introduites explicitement dans la formulation : i) la séparation d'échelle entre les éléments globaux et les handbooks et ii) la non-interaction entre les handbooks. Ainsi, les difficultés liées à l'intégration, souvent présente dans la GFEM classique, ont pu être résolues. Cette démarche a été appliquée avec succès à la fois à des petits problèmes de référence ainsi qu'à de larges calculs regroupant un grand nombre d'entités, en 2D et en 3D. Il est à présent nécessaire d'utiliser des handbook plus variés, afin de pouvoir représenter des microstructure plus complexe et réaliste. De plus il est envisagé d'étendre la méthode à la multi-fissuration.

## Remerciements

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du programme de recherche et développement ARCOCE, financé par Snecma Propulsion Solide et la Région Aquitaine.

## Références

- [1] N. Carrère, E. Martin, and J. Lamon. The influence of the interphase and associated interfaces on the deflection of matrix cracks in ceramic matrix composites. *Composites Part A*, 31 :1179–1190, 2000.
- [2] F. Lamouroux and G. Camus. Oxidation effects on the mechanical properties of a 2d woven c/sic composites. *Journal of the European Ceramic Society*, 14 :177–188, 1994.
- [3] C. Cluzel, E. Baranger, P. Ladevèze, and A. Mouret. Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(8) :976 – 984, 2009. Special Issue : 15th French National Conference on Composites - JNC15.
- [4] Frédéric Feyel and Jean-Louis Chaboche. Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4) :309 – 330, 2000.
- [5] Thomas J. R. Hughes, Gonzalo R. Feijóo, Luca Mazzei, and Jean-Baptiste Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1-2) :3 – 24, 1998. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics.

- [6] J. Tinsley Oden, Kumar Vemaganti, and Nicolas Moës. Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4) :3 – 25, 1999.
- [7] N. Moes, M. Cloirec, P. Cartraud, and J. F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3163 – 3177, 2003. Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.
- [8] T. Strouboulis, K. Copps, and I. Babuška. The generalized finite element method : an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(8) :1097–0207, 2000.
- [9] J. T. Oden, C. A. M. Duarte, and O. C. Zienkiewicz. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153(1-2) :117 – 126, 1998.
- [10] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :289 – 314, 1996.
- [11] Theofanis Strouboulis, Lin Zhang, and Ivo Babuska. Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28-30) :3109 – 3161, 2003.
- [12] C.A. Duarte and D.-J. Kim. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8) :487 – 504, 2008.