

Reconstruction de champ par identification des conditions aux limites : Principes et Applications

D. MARTINI¹, Ch. HOCHARD¹, et J.-P. CHARLES²

¹ LMA, Université de Provence, France, {martini,hochard}@lma.cnrs-mrs.fr

² LMA, Université de la Méditerranée, France, jp.charles@univmed.fr

Mots clés — Identification, Problèmes Inverses.

1 Introduction

Cette article présente une méthode de reconstruction de champ à partir de l'identification des conditions aux limites. L'objectif est d'obtenir une caractérisation précise des champs mécaniques d'une structure à partir d'un nombre limité et restreint de données mesurées. Ce problème inverse est mal-posé puisque une bonne description des champs nécessite un nombre très important de paramètres. L'introduction des conditions aux limites dans sa formulation permet de le régulariser, comme cela est fait dans l'identification de loi de comportement [1]. En se basant sur le principe de Saint-Venant, ces conditions aux limites peuvent être a priori décrites par un nombre restreint de paramètres. Ainsi, le problème d'identification de champ est ramené à un problème réduit d'identification des conditions aux limites ; les champs sont ensuite obtenus par un calcul direct.

2 Formulation

Soit Ω une structure soumise à des conditions aux limites de déplacement u_b et de chargement F_b . On suppose qu'il n'y a pas d'effort volumique et que les effets inertiels sont négligeables. Le problème que nous souhaitons résoudre se met sous la forme :

Trouver $(u, \varepsilon, \sigma, F_b, u_b)$ tels que :

$$\text{Equation d'observation : } F_b = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^p} [\|\bar{\varepsilon}(\alpha) - \varepsilon_m\|^2] \text{ in } \partial\Omega_m \subset \partial\Omega$$

$$\text{Equations Mécaniques : } \begin{cases} \operatorname{div}[\bar{\sigma}] = 0 \text{ in } \Omega \\ \bar{\sigma} \cdot n = F_b \text{ in } \partial\Omega_F \\ \bar{u} = u_b \text{ in } \partial\Omega_u \\ \bar{\sigma} = \mathbb{C}\bar{\varepsilon} \text{ in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

Ce problème est résolu à l'aide d'une formulation par éléments finis comme celles utilisées dans [2]. La formulation complète du problème se fait alors seulement en effort, seul le mouvement de corps rigide est imposé. Cette approche permet de s'affranchir des incertitudes liées aux liaisons entre la structure et son environnement, et elle offre un cadre générale pour l'identification des conditions aux limites. Afin de limiter les effets locaux dus à l'introduction du chargement, nous avons choisi d'utiliser une base de chargement régulière et équilibrée qui est issue des solutions de type Trefftz de [3].

$$F = \{F_b^i = \sigma(\tilde{u}_i) \cdot n_{\partial\Omega} ; \tilde{u}_i \in U^q\}$$

$$\text{avec } U^q = \left\{ \tilde{u}_i = \sum_j \alpha_j x^j y^{r-j} ; r \leq q \ \& \ \operatorname{div}[\mathbb{C}\varepsilon(\tilde{u}_i)] = 0 \text{ in } \Omega_{ref} \right\} \quad (2)$$

Ω_{ref} est une structure de référence similaire à la structure Ω mais remplissant les conditions de domaine simple. L'idée est alors d'utiliser la base F de chargement obtenue sur Ω_{ref} pour résoudre le problème associé à Ω .

3 Applications

Cette méthode est illustrée et validée sur un exemple de plaque trouée. L'objectif est de surveiller l'évolution de la contrainte dans une zone proche du trou lors de l'utilisation de la structure. La plaque est trouée en son centre et elle est soumise à un chargement comme indiqué sur la figure 1. La structure de référence Ω_{ref} de définition de la base F est une plaque identique mais non trouée.

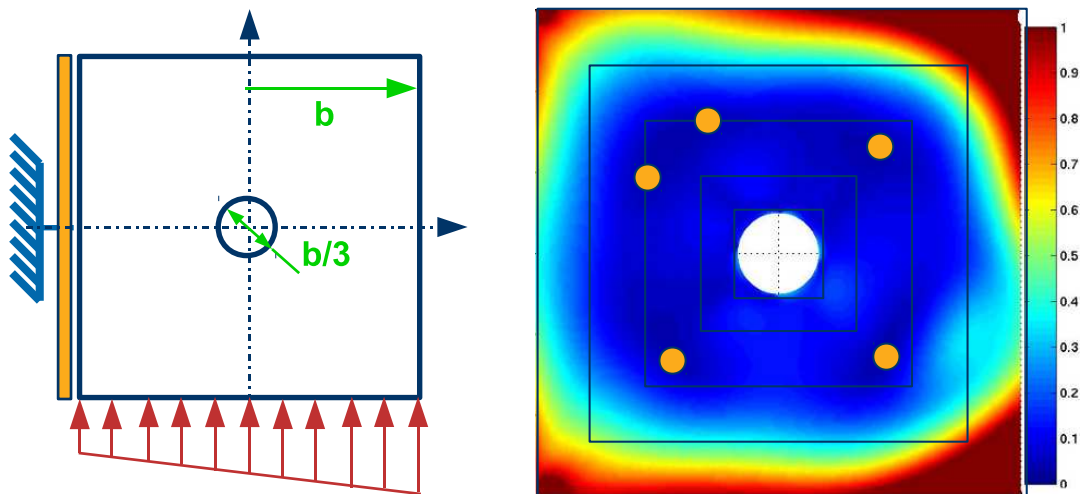


FIGURE 1 – Schématisation du cas d'étude et répartition d'erreur $\Delta\sigma_{VM}$

La figure 1 montre la répartition d'erreur $\Delta\sigma_{VM}$ (écart-type de l'écart à la solution exacte) du champ de Von-Mises dans le cas de données de mesure bruitées. L'échelle est logarithmique et le résultat est normalisé par le niveau de bruit de la mesure. On constate que la solution se dégrade au bord de la structure mais que le niveau d'erreur est minimum à l'intérieur de la zone d'observation. Le problème de reconstruction de champ est donc similaire à celui de l'identification des conditions aux limites. Cette approche permet aussi de s'éloigner des zones à fort gradient de champ dans lesquelles les erreurs de mesure sont amplifiées. En effet, la sensibilité de cette formulation est liée à 2 phénomènes concurrents : le rapprochement des capteurs des zones d'introduction d'effort qui influe sur le conditionnement du problème et l'éloignement des capteurs de ces mêmes zones qui influe sur la qualité de l'approximation utilisée. Ainsi, le positionnement optimal des capteurs se fait dans des zones intermédiaires à faible gradient. Cela est illustré sur la figure 1 où les capteurs sont symbolisés par des disques oranges.

Références

- [1] S. Roux S, F. Hild. *Digital image mechanical identification* in *Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, 48, pp.495-508 , (2008).
- [2] N. Zabaras, V. Morellas, D. Schnur. *Spatially regularized solution of inverse elasticity problems using the BEM*, *Communications in applied numerical methods*, John Wiley & Sons, 5, pp.547-553, (1989)
- [3] C. Hochard. *A trefftz approach to computational mechanics*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2003).