



# Propagation de level sets pour l'avancée de fissures en mode mixte

Patrick Massin, Daniele Colombo

## ► To cite this version:

Patrick Massin, Daniele Colombo. Propagation de level sets pour l'avancée de fissures en mode mixte. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. <hal-00592822>

**HAL Id: hal-00592822**

**<https://hal.science/hal-00592822v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Propagation de level sets pour l'avancée de fissures en mode mixte

D. Colombo<sup>1</sup>, P. Massin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Mechanical, Aerospace and Manufacturing Engineering, The University of Manchester, Manchester, U.K.,  
daniele.colombo@manchester.ac.uk

<sup>3</sup> LaMSID, UMR EDF-CNRS-CEA 2832, France, patrick.massin@edf.fr

---

**Résumé** — Dans le cadre de la méthode X-FEM, l'avantage de pouvoir représenter la fissure indépendamment du maillage repose sur l'utilisation de courbes de niveau. La simulation de la propagation est liée à la réactualisation de ces courbes de niveau, suite à la résolution d'équations différentielles d'évolution. Nous proposons ici d'analyser ces équations afin de proposer des méthodes de propagation rapides et robustes en mode mixte, illustrées par un exemple en fin d'article.

**Mots clefs** — X-FEM, level set, propagation.

---

## 1 Introduction

Dans la dernière décennie, la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [3][9] couplée avec une représentation de la fissure par des courbes de niveaux [8][10], s'est révélée être un outil intéressant pour la simulation de propagations de fissure, même si des outils optimisés de remaillage font encore la course en tête au niveau performance tels que ZENCRACK ou Z-set co-développé par l'Ecole des Mines de Paris, MW Numerics et l'Onera par exemple. L'aspect le plus intéressant de la méthode X-FEM est la possibilité d'introduire la fissure indépendamment du maillage initial de la structure dans laquelle elle se développe. La fissure n'a donc a priori pas besoin d'être maillée, ou du moins pas en lien avec le maillage de la structure. La discontinuité au niveau du champ de déplacement due à la présence de la fissure et la singularité des champs de contrainte en pointe de fissure sont pris en compte par l'enrichissement du modèle élément fini dans le voisinage de la fissure [9]. La fissure et le front de fissure sont repérés via l'utilisation de deux familles de courbes de niveaux, orthogonales entre elles. La propagation de fissure peut être prise en compte par la modification de ces courbes de niveaux, sans avoir à modifier le maillage de la structure.

Plusieurs techniques ont été proposées pour faire évoluer ces courbes de niveaux : certaines reposent sur la résolutions d'équations différentielles qui décrivent mathématiquement le problème d'évolution des courbes de niveaux [1][8][10][11] alors que d'autres utilisent des équations non différentielles et des évolutions géométriques [6][16]. Une comparaison entre ces différentes méthodes peut être trouvée dans [6].

## 2 Propagation des courbes de niveau

Les phases de propagation des courbes de niveau sont analysées ici afin de pouvoir réaliser des propagations 3D en modes mixtes, avec déversement du plan de fissuration. Quelles que soient les méthodes utilisées, la méthodologie de propagation décrite dans [10] peut être adoptée comme point de départ du fait de sa généralité. Le processus de réactualisation des courbes de niveaux se décompose en quatre étapes. Dans un premier temps, les courbes de niveau sont réactualisées afin de tenir compte de la propagation de la fissure. Après cette étape, les courbes de niveaux ne sont plus des fonctions distance et elles ne sont plus orthogonales entre elles. Une phase de réinitialisation de chaque famille de courbes de niveau doit être réalisée et ensuite une phase qui les rendent orthogonales entre elles. À chacune de ces étapes, on peut associer une équation différentielle de Hamilton-Jacobi [10].

## 2.1 Résolution numérique de la phase de réactualisation

La phase de réactualisation décrite dans [10] qui vise à recalculer les courbes de niveau suite à la propagation de fissure s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} + \nabla \varphi_n(t) \cdot \mathbf{V}_N &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_t(t)}{\partial t} + \nabla \varphi_t(t) \cdot \mathbf{V}_T &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

avec  $\mathbf{V}_N$  et  $\mathbf{V}_T$  les vitesses de propagation normales et tangentes au front de fissure, définis sur tout l'espace. Comme les champs de vitesse sont connus uniquement sur le front de fissure, une extrapolation est donc nécessaire pour les points qui ne sont pas sur le front de fissure, dont un exemple de construction peut être trouvé dans [8], et que l'on améliorera par la suite.

Pour tous les points du front de fissure, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_N^P &= (\mathbf{V}^P \cdot \mathbf{n}^P) \mathbf{n}^P = V_N^P \mathbf{n}^P \\ \mathbf{V}_T^P &= (\mathbf{V}^P \cdot \mathbf{t}^P) \mathbf{t}^P = V_T^P \mathbf{t}^P\end{aligned}\tag{2}$$

où  $\mathbf{V}^P$  est le vecteur vitesse de propagation du front de fissure et  $(\mathbf{t}^P, \mathbf{n}^P)$  sont les vecteurs tangent à la fissure mais orthogonal au front de fissure et normal à la fissure en pointe de fissure.

Pour tous les points qui ne sont pas sur le fond de fissure, la vitesse est celle de leur projection sur le fond de fissure pour les courbes de niveau tangente. Une extrapolation linéaire est utilisée pour la vitesse normale si  $\varphi_t(M) > 0$  et la vitesse normale vaut 0 pour tous les points derrière le front de fissure tels que  $\varphi_t(M) \leq 0$ , ce qui indique que les courbes de niveaux normales ne sont pas modifiées pour une fissure déjà existante. Enfin la vitesse tangente est donnée par la vitesse tangente du front de fissure. Ainsi :

$$\begin{cases} V_N^M = 0 & \text{si } \varphi_t(M) \leq 0 \\ V_N^M = V_N^P \cdot \frac{\varphi_t(M)}{V_T^P \Delta t_{tot}} & \text{si } \varphi_t(M) > 0 \end{cases}\tag{3}$$

$$V_T^M = V_T^P$$

où  $\Delta t_{tot}$  est le temps ou le nombre de cycles de fatigue pris en compte dans le pas de propagation. Pour tous les points  $M$ , on a alors les vitesses suivantes :

$$\begin{aligned}\text{si } \varphi_t(M) \leq 0 & \begin{cases} \mathbf{V}_N^M = 0 \\ \mathbf{V}_T^M = V_T^P \nabla \varphi_t(M) \end{cases} \\ \text{si } \varphi_t(M) > 0 & \begin{cases} \mathbf{V}_N^M = V_N^M \mathbf{n}^P \\ \mathbf{V}_T^M = V_T^P \mathbf{t}^P \end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

Dans un premier temps, les corrections apportées par [6] en 2D concernant la réactualisation de  $\mathbf{V}_N$  et  $\mathbf{V}_T$  au début de chaque pas de temps de résolution de (1) ainsi que le calcul de la base locale en fond de fissure sont appliquées dans un cadre 3D. Le calcul de la base locale est alors

complètement revu par rapport à ce qui est fait dans [8] dont les auteurs utilisent les interpolations des gradients de level set. Or, si les gradients des level set sont effectivement orthogonaux entre eux par construction dans un voisinage immédiat de la fissure, leurs interpolations ne le sont plus. Ce point était déjà soulevé par [6] qui privilégie la construction d’une base locale en privilégiant la level set normale et son gradient pour la construction de la base par rapport à la level set tangente. Deux raisons justifient ce choix : la mise à jour précise de la level set normale est indispensable dans le cas d’un changement de direction dans la propagation de la fissure et la vitesse normale varie linéairement par rapport à la distance au fond de fissure lors de la phase d’extension.

Malgré ces corrections, on montre que des instabilités numériques apparaissent lorsque les fronts de fissure changent d’orientation brutalement. Si un schéma d’intégration explicite est alors utilisé pour la résolution des équations d’Hamilton-Jacobi, le pas de temps doit être sévèrement réduit pour satisfaire la condition CFL, ce qui nuit à la performance du calcul. Ce problème peut être évité si un schéma d’intégration implicite est utilisé mais au prix d’une complexité accrue dans le code de calcul utilisé. Récemment une solution avec une seule itération de résolution, reposant sur l’utilisation de la « fast marching method », a été proposée dans [15] ou [14]. Cependant, comme mentionné dans [15], la solution calculée est sensible à des erreurs près des frontières du solide. Plusieurs ingrédients sont alors nécessaires à la résolution du problème d’instabilité.

Une solution alternative est proposée dans [5], sur la base d’une équation polynomiale explicite, qui ne nécessite pas de schéma d’intégration et de résolution itérative. Elle permet d’associer bonnes performances et stabilité de la résolution, tout en ayant un impact informatique faible sur le code. L’évolution des courbes de niveau est alors calculée de la manière suivante qui représente la forme discontinue de (1) :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_n &= -(\nabla\varphi_n(t).\mathbf{V}_N^M)\Delta t_{tot} \\ \Delta\varphi_t &= -(\nabla\varphi_t(t).\mathbf{V}_T^M)\Delta t_{tot}\end{aligned}\tag{5}$$

Cette forme présente l’avantage par rapport à (1) de ne pas devoir vérifier la condition CFL en cas d’utilisation d’algorithmes de résolution explicites de type Runge-Kutta. Celle-ci est d’autant plus contraignante à satisfaire que dans l’équation de propagation de la level set normale, la vitesse augmentant linéairement avec la distance au fond de fissure, le pas de temps critique diminue proportionnellement, ce qui décroît la performance de l’algorithme et empêche de traiter numériquement des angles de déviation de la fissure importants. La méthodologie proposée ici permet ainsi de pouvoir traiter une propagation à 90° d’une fissure, impossible à modéliser en partant de (1) [5].

De plus, une amélioration de ce qui est fait en [6] est alors apportée. La base locale en un point P intérieur à un élément, dont on a besoin car les nœuds M de la structure se projettent de façon quelconque sur le front de fissure, est déterminée par rapport à la base locale aux points I et J d’intersection du fond de fissure avec les facettes de l’élément pour lesquels la méthode décrite précédemment est adoptée. Pour ce faire on utilise la rotation qui va transformer la base locale en I en la base locale en J. Le théorème d’Euler nous assure que cette rotation est unique, définie par son axe de rotation et son angle de rotation  $\theta_E$ .

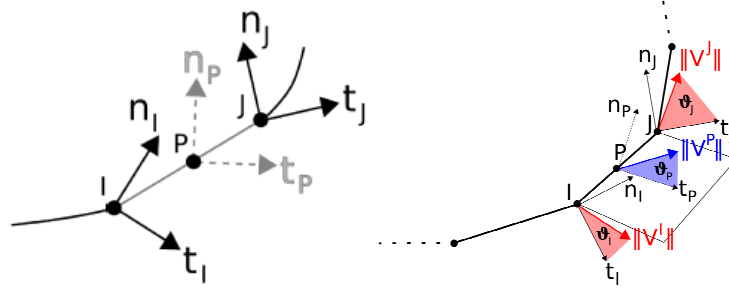


Fig. 1 – BASES LOCALES EN FOND DE FISSURE. Utilisation des bases locales en I et J, points d'intersection du fond de fissure avec les éléments finis X-FEM pour déterminer la base locale en tout point P du fond de fissure à l'intérieur de l'élément en utilisant la rotation d'Euler qui permet de transformer la base locale en I en la base locale en J. La vitesse de propagation est connue seulement aux points I et J. La vitesse au point P est calculée à partir de la vitesse en ces points.

Pour passer de la base locale en I à la base locale en P, on utilise la position de P sur le segment IJ définie par  $s = \|\vec{IP}\| / \|\vec{IJ}\|$  qui permet de définir un angle de rotation  $\alpha_P = s \alpha_E$ , l'axe de la rotation étant identique à celui qui permet de passer de la base locale en I à la base locale en J. Par ailleurs, la vitesse de propagation du fond de fissure est connue de façon exacte aux points d'intersection de la fissure avec les facettes des éléments X-FEM. Pour connaître la vitesse en tout point P du fond de fissure, on utilise de nouveau la position de P sur le segment IJ qui nous permet d'écrire :

$$\|\mathbf{V}^P\| = (\|\mathbf{V}^J\| - \|\mathbf{V}^I\|)s + \|\mathbf{V}^I\| \quad (6)$$

La direction de propagation  $\mathbf{V}^P$  dans le plan  $(\mathbf{t}^P, \mathbf{n}^P)$  est alors obtenue de manière similaire en utilisant une interpolation linéaire entre les angles formés par les vecteurs  $(\mathbf{V}^I, \mathbf{t}^I)$  et  $(\mathbf{V}^J, \mathbf{t}^J)$ , soient  $\vartheta_I$  et  $\vartheta_J$  respectivement. La vitesse  $\mathbf{V}^P$  s'exprime ainsi de la manière suivante :

$$\mathbf{V}^P = \|\mathbf{V}^P\| [\cos((\vartheta_J - \vartheta_I)s + \vartheta_I) \mathbf{t}^P + \sin((\vartheta_J - \vartheta_I)s + \vartheta_I) \mathbf{n}^P] \quad (7)$$

La connaissance de  $\mathbf{V}^P$  et de la base locale  $(\mathbf{t}^P, \mathbf{n}^P)$  permet de pouvoir résoudre complètement (5).

## 2.2 Résolution numérique des phases de réinitialisation et de réorthogonalisation

Après la phase de réactualisation des courbes de niveau la notion de distance au fond de fissure n'est pas forcément conservée, ainsi que la propriété d'orthogonalité entre les deux familles. On doit donc procéder aux différentes phases correctives suivantes [8] :

- La level set normale est réinitialisée afin d'en refaire une fonction distance ( $\|\nabla \varphi_n\| = 1$ ) :

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = -\text{sign}(\varphi_n) (\|\nabla \varphi_n\| - 1) \quad (8)$$

- La level set tangente est réorthogonalisée par rapport à la level set normale ( $\nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_t = 0$ ) :

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \tau} = -\text{sign}(\varphi_n) \frac{\nabla \varphi_n}{\|\nabla \varphi_n\|} \cdot \nabla \varphi_t \quad (9)$$

- La level set tangente est réinitialisée afin d'en refaire une fonction distance ( $\|\nabla \varphi_t\| = 1$ ) :

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \tau} = -\text{sign}(\varphi_t)(\|\nabla \varphi_t\| - 1) \quad (10)$$

Les équations (8) à (10) sont résolues jusqu'à l'atteinte de leurs points fixes,  $\tau$  étant un temps virtuel, contrairement à (1). On peut remarquer aussi qu'elles ont toutes la même forme qui s'écrit in fine :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = c \quad (11)$$

Une fois que l'iso zéro des courbes de niveaux normales et tangentes est construite par la connaissance de la vitesse sur le fond de fissure, l'ordre dans lequel les trois phases ci-dessus sont exécutées est important. En effet, pour des fissures courbes, il n'est pas possible de construire des courbes de niveau vérifiant simultanément les équations (8) à (10), partout (mais les équations (8) à (10) seront satisfaites en fond de fissure). Afin d'obtenir aisément la distance au fond de fissure, on finit donc pour chaque famille de courbes de niveau par sa réinitialisation.

Afin d'intégrer efficacement les équations du type (11), la méthode simplexe de Bart et Sethian [2] a été adoptée dans [8] et [5]. L'avantage de cette méthode dont on peut trouver une description détaillée dans [7] est de pouvoir s'appliquer directement à des maillages triangulaires en 2D et tétraédriques en 3D. En outre les maillages de structures industrielles qui sont souvent non structurés peuvent facilement être décomposés en triangles ou tétraèdres.

Malgré cet avantage, sur la base de l'expérience des auteurs cette méthode n'est pas forcément la plus stable. Des méthodes de type différence finie montante se révèlent tout à fait intéressantes : utilisées initialement en 2D [12], dans le cadre de la propagation dynamique de fissures, elles ont été étendues récemment en 3D [15] sur des exemples simples en association avec la « fast marching method ».

Sur la base du travail de Prabel et al. [12] en 2D, un schéma de différence finie du premier ordre sur base d'une grille régulière est mis en place. Cela nécessite la mise en place de projections entre la grille et le maillage éléments finis où sont faits les calculs mécaniques. Deux difficultés doivent être résolues pour ce type d'algorithme:

- la prise en compte des effets de bord aux frontières du domaine qui introduisent des réflexions parasites et favorisent l'instabilité,
- la performance si l'on ne localise pas le domaine de calcul. Afin d'améliorer la performance de cette phase, une restriction du domaine de projection est proposée, ainsi qu'une localisation de la zone de calcul des courbes de niveau autour du front de fissure, ce qui améliore à la fois les performances et la stabilité de la solution. Une solution proche proposée par [14] est ici améliorée.

L'équation (11) est une équation de propagation d'onde, qui propage l'information dans la direction de  $\mathbf{u}$  depuis la surface iso-zéro jusqu'au restant du domaine. Seule l'information amont est utilisée pour trouver la solution en aval. Pour les phases de réinitialisation et de réorthogonalisation, on peut donc identifier facilement les points au bord du domaine pour lesquels on ne peut pas utiliser le schéma d'intégration tel quel. Une illustration en 2D est donnée sur la figure 2. Pour les points en noir les points en dessous sont manquants alors que pour les points en gris il faudrait avoir l'information sur les points situés au-dessus.





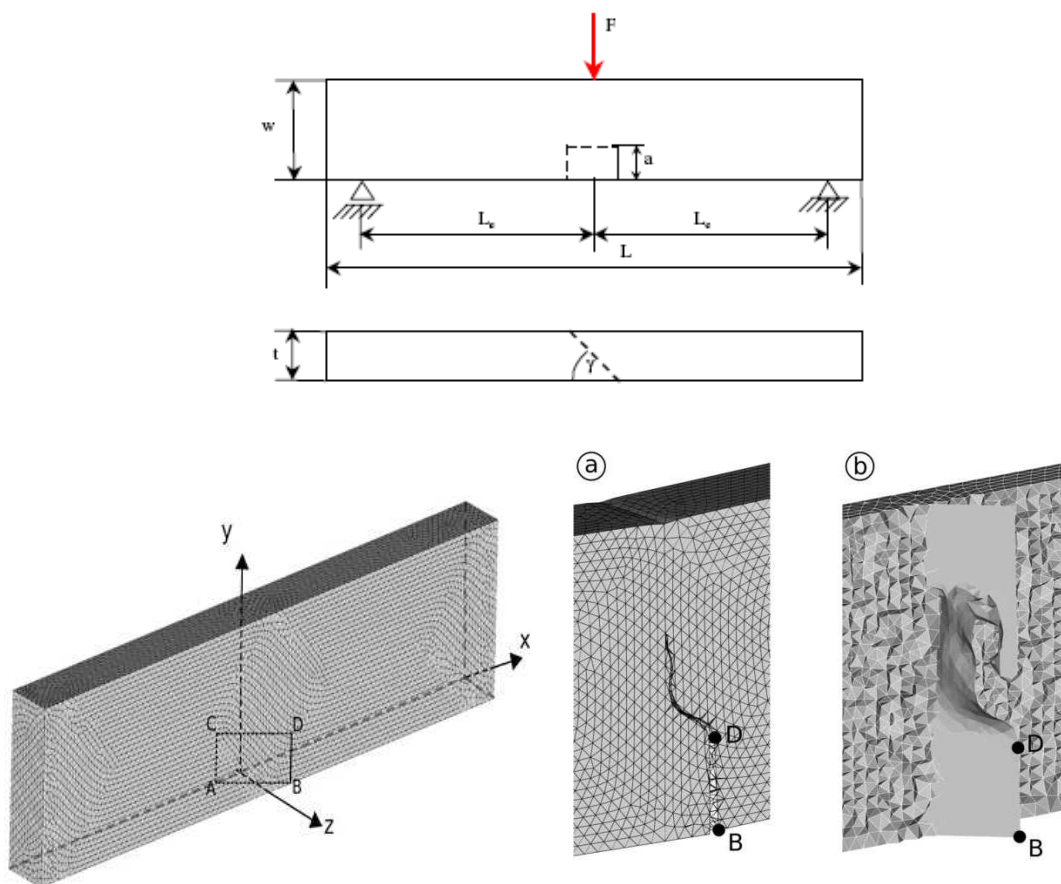
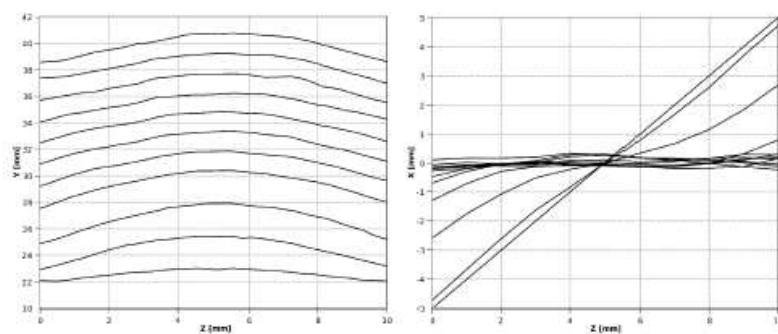


Fig. 3 – TRAJET DE FISSURATION POUR FISSURE INCLINÉE À  $45^\circ$  PAR RAPPORT À L'AXE D'UNE EPROUVETTE EN FLEXION 3 POINTS. Sur l'image a), on voit l'éprouvette déformée avec un facteur d'amplification de 5 sur le déplacement. Sur l'image b) on voit l'iso-zéro de la level set normale superposée au plan de la fissure initiale, ce qui permet de bien visualiser le déversement de la fissure pour retrouver une sollicitation en mode I.

L'avancée des fronts de fissure pour chaque pas de calcul est donnée figure 4 à la fois pour Code\_Aster et pour [4]. Des tendances similaires sont observées avec des fronts de fissure un peu plus courbés dans notre cas (figure supérieure de gauche à comparer à la figure inférieure de gauche), ce qui pourrait être causé par des paramètres matériau en fatigue un peu différents mais non reportés dans [4].





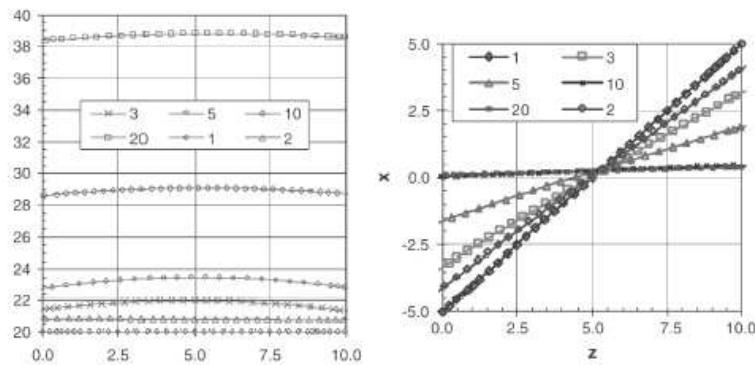


Fig. 4 – FRONTS DE FISSURE OBTENUS POUR CHAQUE PAS DE PROPAGATION. Les résultats (coupe verticale à gauche Y-Z et coupe horizontale à droite X-Z) obtenus avec Code\_Aster sont donnés en partie supérieure et ceux obtenus par [4] sont donnés en partie inférieure. Sur la coupe horizontale de droite la fissure initialement à  $45^\circ$  reprend une orientation à  $90^\circ$ .

## Références

- [1] D. Adalsteinsson, J.A. Sethian. *A fast level set method for propagating interfaces*. Journal of Computational Physics, Vol. 118, Pages 269-277, 1995.
- [2] T.J. Barth, J.A. Sethian. *Numerical schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set equations on triangulated domains*. Journal of Computational Physics, Vol. 145, Pages 1-40, 1998.
- [3] T. Belytschko, T. Black. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.45, Pages 601-620, 1999.
- [4] R. Citarella, F.G. Buchholz. *Comparison of crack growth simulation by DBEM and FEM for SEN-specimens undergoing torsion or bending loading*. Engineering Fracture Mechanics, Vol. 75, Pages 489-509, 2008.
- [5] D. Colombo, P. Massin. *Fast and robust level set update for 3D non-planar XFEM crack propagation modelling*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, under review
- [6] M. Duflot. *A study of the representation of cracks with level sets*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.70, Pages 1261-1302, 2007.
- [7] S. Geniaut, P. Massin. *Extended Finite Element Method*. Documentation de référence [R7.02.12] de Code\_Aster.
- [8] A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko. *Non planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II : level set update*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.53, Pages 2569-2586, 2002.
- [9] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.46, Pages 135-150, 1999.
- [10] N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko. *Non planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part I : mechanical model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.53, Pages 2459-2568, 2002.
- [11] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, M. Kang. *A PDE-based fast local level set method*, Journal of Computational Physics, Vol. 155, Pages 410-438, 1999.
- [12] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, S. Marie. *Level set X-FEM non matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic-plastic media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.78, n°12, Pages 1407-1435, 2009.
- [13] J. Randal LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [14] J. Shi, D. Chopp, J. Lua, N. Sukumar, T. Belytschko. *Abaqus implementation of extended finite element method using a level set representation of three-dimensional fatigue crack growth and life predictions*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 77, Pages 2840-2863, 2010.
- [15] N. Sukumar, D.L. Chopp, E. Béchet, N. Moës. *Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 76, Pages 727-748, 2008.
- [16] G. Ventura, E. Budyn, T. Belytschko. *Vector level sets for description of propagating cracks in finite element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.58, Pages 1571-1592, 2003.