



HAL
open science

Pilotage du chargement en formulation X-FEM: application aux lois cohésives

Patrick Massin, Guilhem Ferté, Axelle Caron, Nicolas Moes

► **To cite this version:**

Patrick Massin, Guilhem Ferté, Axelle Caron, Nicolas Moes. Pilotage du chargement en formulation X-FEM: application aux lois cohésives. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592821

HAL Id: hal-00592821

<https://hal.science/hal-00592821>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Pilotage du chargement en formulation X-FEM: application aux lois cohésives

P. Massin¹, G. Ferté¹, A. Caron^{1,2}, N. Moës²

¹ LaMSID CNRS-EDF-CEA France, patrick.massin@edf.fr, axelle.caron@edf.fr, guilhem.ferte@edf.fr

² GeM, CNRS/ Ecole Centrale de Nantes, France, nicolas.moes@ec-nantes.fr

Résumé — Les lois cohésives permettent de modéliser des forces d'interaction entre deux lèvres d'une interface. Leur introduction dans la méthode des éléments finis étendue (X-FEM), afin de pouvoir décrire les instabilités existantes lors de la propagation de fissures, nécessite d'adapter pour X-FEM les algorithmes de pilotage du chargement disponibles en FEM. Nous présentons ici les versions X-FEM de trois d'entre eux : les pilotages par DDL imposé, par longueur d'arc et par prédiction élastique. Nous présentons ensuite les résultats obtenus pour un problème de fissuration d'une plaque trouée.

Mots clefs — Loi cohésive, X-FEM, pilotage du chargement, snapback.

1 Eléments cohésifs en formulation XFEM

La méthode XFEM est une extension de la méthode des éléments finis introduite dans [1] qui permet de s'affranchir des contraintes géométriques pour mailler des structures fissurées. Une loi de comportement cohésive permet de rendre compte de forces d'interaction entre les deux lèvres de la fissure lors de son ouverture. Nous détaillons l'introduction d'une telle loi dans le cadre X-FEM, au sein de Code_Aster, code aux éléments finis open source développé par EDF R&D (<http://www.code-aster.org>).

1.1 Formulation X-FEM

Dans la pratique, l'interface est introduite dans le modèle analytiquement à l'aide d'une fonction distance dite level-set normale (l_{sn}). L'interface est définie comme $[l_{sn} = 0]$ (voir [2]).

Pour rendre compte du saut de déplacement, on enrichit l'espace des fonctions de forme avec une fonction discontinue de Heaviside. L'approximation du champ de déplacement s'écrit alors (voir [1]):

$$u^h(x) = \sum_{i \in N(x)} a_i \phi_i(x) + \sum_{j \in N(x) \cap K} b_j \phi_j(x) H(l_{sn}(x)) \quad (1)$$

où $N(x)$ désigne l'ensemble des nœuds pour lesquels la fonction de forme nodale ne s'annule pas en x et où K désigne l'ensemble des nœuds enrichis, c'est-à-dire les nœuds qui appartiennent à au moins une maille intersectée. La formulation X-FEM a été pour la première fois introduite dans le cadre cohésif dans [10].

1.2 Loi cohésive

La formulation de la loi cohésive est issue de [3]. La contrainte cohésive étant une force intérieure agissant entre deux lèvres d'une interface, on peut la rapprocher d'une autre contrainte similaire, à savoir la contrainte de contact entre deux solides. Une formulation continue pour le traitement du contact avec X-FEM a été proposée par [4].

Le papier [5] suggère d'y ajouter d'un terme cohésif activé seulement pour les points non-contactant. Nous choisissons une approche légèrement différente, consistant à remplacer la contrainte de contact par la contrainte cohésive à laquelle on ajoute un terme de pénalisation en interpénétration. Ainsi, il

n'est plus nécessaire d'activer un algorithme de contact indépendant en plus de la loi cohésive pour traiter les situations de refermeture.

La contrainte cohésive s'écrit alors comme somme d'une contrainte de pénalisation qui rend compte du contact et d'une contrainte élastique ou dissipative suivant le signe de la fonction seuil :

$$\mathbf{t}_c = H(\llbracket u \rrbracket_{\text{eq}} - \alpha) \boldsymbol{\sigma}_{lin} + (1 - H(\llbracket u \rrbracket_{\text{eq}} - \alpha)) \boldsymbol{\sigma}_{dis} + \boldsymbol{\sigma}_{pen} \quad (2)$$

- ◆ $\llbracket u \rrbracket_{\text{eq}} = \sqrt{\langle \llbracket u_n \rrbracket \rangle_+^2 + \llbracket \mathbf{u}_\tau \rrbracket^2}$ est le saut de déplacement équivalent, avec $\llbracket u_n \rrbracket$ et $\llbracket \mathbf{u}_\tau \rrbracket$ les sauts normal et tangent respectivement,
- ◆ $\alpha(t) = \max\{\alpha_0, \max_{v \in [0,t]} \llbracket u(v) \rrbracket_{\text{eq}}\}$ est la variable interne de la loi cohésive, à laquelle on donne une valeur initiale α_0 faible mais non nulle afin de décrire l'adhérence initiale avec un terme de pénalisation,
- ◆ $\boldsymbol{\sigma}_{pen} = C \langle \llbracket u_n \rrbracket \rangle_- \mathbf{n}$ est la contrainte de pénalisation du contact,
- ◆ $\boldsymbol{\sigma}_{lin} = \boldsymbol{\sigma}_{dis} = \frac{\sigma_c}{\alpha} \exp(-\frac{\sigma_c}{G_c} \alpha) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ est l'expression commune aux contraintes linéaire et dissipative, avec $\alpha = \llbracket u \rrbracket_{\text{eq}}$ pour $\boldsymbol{\sigma}_{dis}$. σ_c est la contrainte critique à la rupture et G_c la ténacité énergétique du matériau.

Pour caractériser l'ouverture de l'interface en mode mixte, il est nécessaire de définir un critère d'endommagement au moyen d'une fonction seuil, qui sera utilisée ultérieurement :

$$f(\llbracket u \rrbracket_{\text{eq}}, \alpha) = \frac{\llbracket u \rrbracket_{\text{eq}} - \alpha}{\alpha_{ref}} \quad (3)$$

Nous représentons ci-après l'évolution de la loi cohésive pour un chargement en mode I en fonction du déplacement normal.

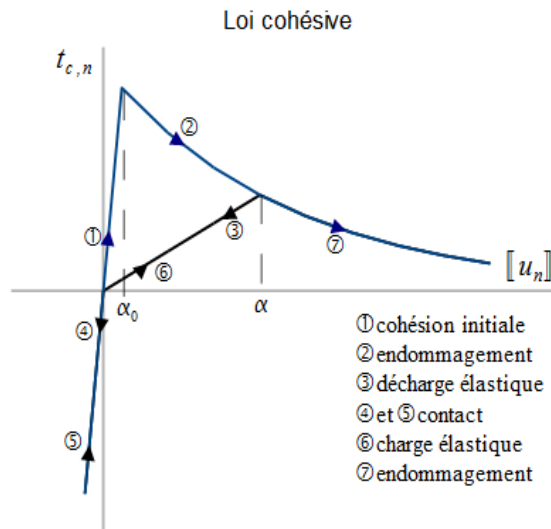


Fig. 1 : loi cohésive en chargement uniaxial

La loi cohésive avec pénalisation en refermeture est introduite dans la formulation faible de l'équation d'équilibre pour le solide avec interfaces suivant ce comportement. La résolution numérique s'effectue alors par une méthode de Newton classique. Le lecteur intéressé peut se référer à la documentation de référence R7.02.12 de Code_Aster, pour plus de détails sur la discrétisation et la résolution associées à

ce type de comportement dans le cadre X-FEM.

2 Pilotage du chargement

Lors de l'ouverture d'une interface cohésive, la réponse de la structure peut présenter des instabilités (snapbacks ou retours en arrière). Il est nécessaire de développer une méthode numérique qui permette de les décrire.

2.1 Principe

Le principe du pilotage consiste à séparer le chargement en deux catégories :

- le chargement constant dont l'intensité ne varie pas au cours du calcul (blocage d'un mouvement de corps rigide, précontrainte...),
- le chargement piloté, dont l'intensité varie.

A chaque pas de temps, nous voulons augmenter l'ouverture de la fissure d'une certaine quantité, et nous calculons l'intensité du chargement nécessaire pour y parvenir. On introduit donc une nouvelle inconnue scalaire η , intensité de la part pilotable du chargement. On doit donc aussi introduire une nouvelle équation (4), dite équation de pilotage, qui relie l'incrément du saut de déplacement et le pas de temps.

$$P(\llbracket \Delta u \rrbracket) = \frac{\Delta t}{C_i} \quad (4)$$

2.2 Pilotage sur la moyenne du saut de déplacement au niveau de l'interface

Une première méthode s'inspire du pilotage par degré de liberté imposé exposé dans [6]. On contrôle cette fois la moyenne de l'incrément de saut de déplacement projeté sur une direction unique n_a , pour un ensemble de points d'intersection P_a de l'interface avec les arêtes a du maillage. Le saut de déplacement s'écrit à l'aide des degrés de liberté enrichis, avec la notation de la figure 2 :

$$\frac{1}{N} \sum_{a=1}^N n_a \cdot \llbracket \Delta u_i \rrbracket(P_a) = \frac{\Delta t}{C_i} \quad \text{avec} \quad \llbracket \Delta u_i \rrbracket(P_a) = \alpha_a \Delta \mathbf{b}_i^n(N_a^-) + (1 - \alpha_a) \Delta \mathbf{b}_i^n(N_a^+) \quad (5)$$

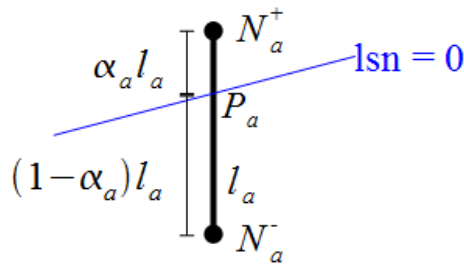


Fig. 2 : arête intersectée

Une seconde méthode est utilisée inspirée de la méthode de pilotage par « longueur d'arc » [7]. Elle consiste à contrôler la norme de l'incrément du saut de déplacement, sur ces mêmes points P_a . On peut contrôler la norme sur toutes les directions de l'espace ou seulement sur certaines composantes c :

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_c \sum_{a=1}^N (\llbracket \Delta u_i \rrbracket(P_a) \cdot c)^2} = \frac{\Delta t}{C_i} \quad (6)$$

Informatiquement, on génère un vecteur de sélection des DDLs au début du calcul, que l'on réutilise pour chaque résolution de l'équation de pilotage. Nous en donnons une écriture vectorielle:

$$\langle S \rangle \cdot \{\Delta u_i\} = \frac{\Delta t}{C_i} \quad \text{avec} \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \begin{array}{cccc} 0 \dots & \alpha_1 n_x & \alpha_1 n_y \dots & (1 - \alpha_1) n_x \dots & \dots & \alpha_N n_x \dots & 0 \end{array} \right\rangle \quad (7)$$

noeud N_1^+ ddl h_x ddl h_y noeud N_1^- noeud N_N^+

En revanche, la donnée de ce vecteur initial ne suffit pas pour le pilotage par norme, car le développement de (6) fait intervenir des termes croisés. Il faut une information supplémentaire, celle des noeuds connectés entre eux par une arête pilotée. Nous avons alors :

$$P(\Delta \mathbf{u}_i^n) = \sqrt{N \|\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{\Delta u_i^n\}\|^2 + N ([M] \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{\Delta u_i^n\}) \cdot (\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \{\Delta u_i^n\})} \quad (8)$$

avec :

$$\forall a, \forall i, [M] \langle 0 \dots \underset{\substack{\text{noeud } N_a^- \\ \text{direction } i}}{1} \dots 0 \rangle = \langle 0 \dots \underset{\substack{\text{noeud } N_a^+ \\ \text{direction } i}}{1} \dots 0 \rangle \quad (9)$$

Les arêtes a doivent être choisies comme appartenant à un ensemble d'arêtes indépendantes, c'est-à-dire qu'elles n'ont aucun noeud en commun, et qu'il est impossible d'en rajouter une de telle sorte que cette propriété soit conservée. En effet, nous voyons que si nous devons stocker des informations différentes relatives à plusieurs arêtes pilotées sur un seul DDL (donc un seul emplacement mémoire) il serait impossible de distinguer la contribution de chacune pour le pilotage par la norme. La réutilisation d'algorithmes de sélections d'arêtes actives portant des Lagranges de contact pour vérifier la condition LBB (voir [9]) permet de construire un tel ensemble.

2.2 Choix de solution

Le pilotage par norme fait intervenir une équation quadratique, qui peut avoir plusieurs solutions. Des critères de choix ont été élaborés dans [8] qui permettent de les discriminer. Ils consistent à minimiser :

- soit la norme de l'incrément de saut de déplacement $\|\|\Delta u_i\|\|$. Ce critère est très utile en pilotage par prédiction élastique, comme on le verra par la suite, mais inutilisable avec le pilotage en norme car il ne permet pas de discriminer les solutions;

- soit l'angle formé avec l'incrément de saut précédent. On minimise $\frac{\|\|\Delta u_i\|\| \cdot \|\|\Delta u_{i-1}\|\|}{\|\|\Delta u_i\|\| \cdot \|\|\Delta u_{i-1}\|\|}$;

- soit le résidu de la méthode de Newton.

Lors d'une alternance charge/décharge, c'est à dire lorsque $C_i C_{i-1} < 0$, la fissure connaît une alternance ouverture/fermeture: il faut alors maximiser le critère angulaire au lieu de le minimiser. Ceci implique un archivage de C_{i-1} et une actualisation à chaque pas de temps convergé.

2.3 Pilotage par prédiction élastique

Les deux modes de pilotage décrits précédemment contrôlent l'ouverture de la fissure le long de l'interface dans une zone fixée à l'avance. En pratique, ils ne sont utilisables que si le saut de déplacement moyen croît continument dans la zone en question durant tout le processus de rupture, ce qui n'est pas le cas de certains problèmes. Un contrôle plus robuste suit l'avancée de la fissure, en contrôlant le saut systématiquement autour de la pointe, privilégiant ainsi la notion de maximum à celle de moyenne. Ainsi, le pilotage par prédiction élastique proposé dans [8] pilote-t-il la sortie de seuil maximale (3) des points de Gauss de l'interface :

$$\max_g f_g^{el}(\eta) \stackrel{def}{=} \max_g f(\|u_g(\eta)\|, \alpha_{i-1}) = \Delta \tau_i \quad (10)$$

L'adaptation de cette méthode de pilotage à X-FEM nécessite uniquement la récupération des DDL enrichis afin de pouvoir calculer le saut de déplacement équivalent. Nous avons tracé figure 3 une représentation graphique « qualitative » des fonctions f^{el} pour les différents points de Gauss des éléments cohésifs, ainsi que les solutions du problème exact de maximisation globale sur l'ensemble des points de Gauss. Il apparaît alors que les solutions η de ce problème exact sont identiques aux solutions obtenues avec l'algorithme de résolution de l'équation affine par morceaux $\max_g A_1^{(g)} \eta + A_0^{(g)} = \Delta \tau_i$, où $A_1^{(g)} \eta + A_0^{(g)}$ est la tangente de $f_g^{el}(\eta)$ en sa solution locale η_g .

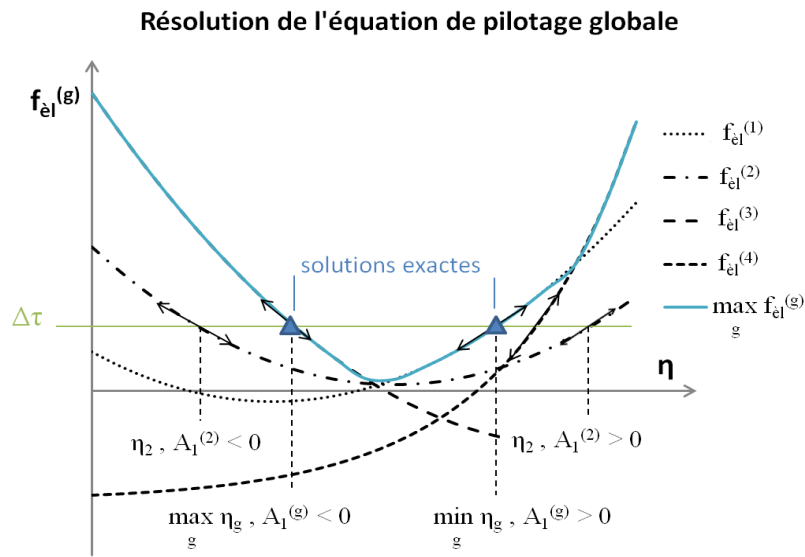


Fig. 3. algorithme de maximisation globale

Cette équivalence repose sur la convexité de chaque f_g^{el} qui implique la convexité de la fonction max. La généralisation de cet algorithme en décharge est problématique car le problème devient une minimisation et aucune propriété ne peut être exhibée sur la fonction min. Dans le cas où aucun point n'est cisailé significativement, f_g admet une asymptote lorsque $\eta \rightarrow \pm \infty$ ce qui permet de construire un algorithme affine par morceaux équivalent (cf fig.4). Dans le cas où tous les points sont cisailés, les f_g vérifient $\lim_{\eta \rightarrow \pm \infty} f_g(\eta) = +\infty$. Par ailleurs, comme $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_g(0) = 0$ si les conditions de chargement sont telles que $f_g(0) = O(\Delta t)$, on est assuré de l'existence de solutions lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, donc éventuellement après subdivision, pour C_i suffisamment petit. Retenir les solutions $\eta > 0$ maximales et minimales suffit alors à piloter pour les cas de validation montrés ci-après.

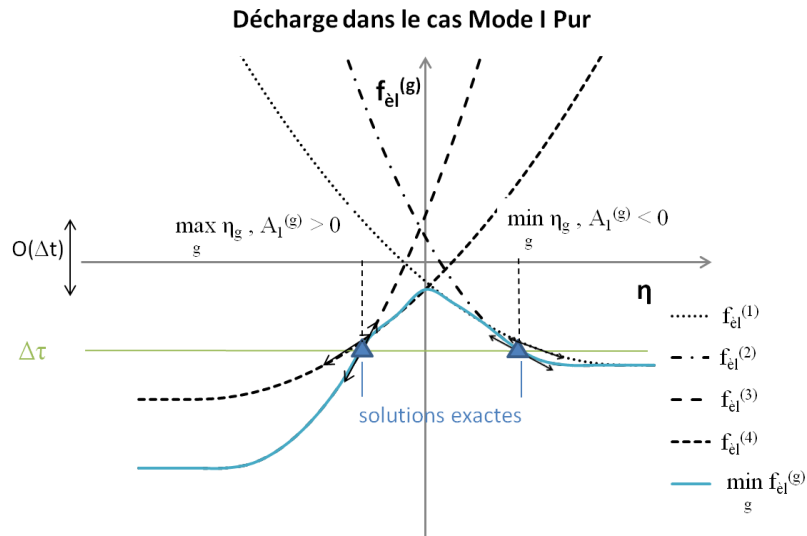


Fig. 4. : minimisation en mode I pur

3 Tests de validation

2.3 Test élémentaire en traction et cisaillement

Ce test possède une solution analytique ce qui permet la validation de la programmation et du calcul. Il s'agit d'un barreau sollicité en traction puis en cisaillement uniforme. Dans le cas du cisaillement, seule l'interface travaille, les blocs sont rendus rigides par l'imposition de conditions cinématiques sur les DDL des noeuds enrichis. On contrôle le saut de déplacement, alternativement par chacune des trois méthodes précédentes, avec un historique de chargement comportant des alternances charge/décharge.

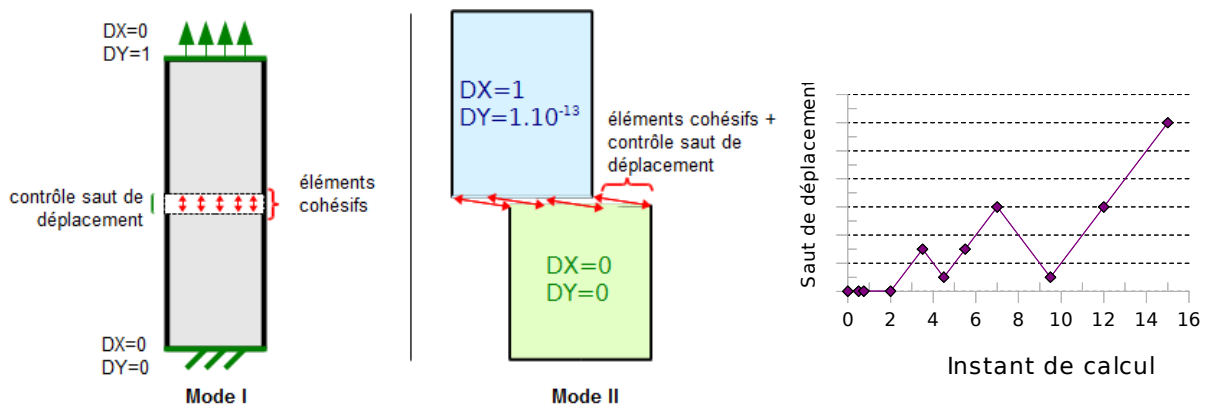


Fig. 5. : Cas-test élémentaire

Le saut de déplacement étant uniforme, ce test permet de vérifier que le saut de déplacement obtenu correspond au pilotage demandé $\frac{\Delta t}{C}$, et gère correctement les alternances charge/décharge. En visualisant la contrainte à l'interface, on valide l'implémentation de la loi cohésive.

2.3 Test élaboré : plaque trouée asymétriquement

Cette première validation effectuée, nous testons notre loi cohésive X-FEM et les pilotages associés sur un problème présentant un niveau de généralité permettant d'espérer une utilisation industrielle. Dans [8] les auteurs utilisent un problème de plaque en déformations planes, percée d'un trou non situé en son centre, soumise en ses extrémités à des forces linéiques opposées (voir fig 6) pour valider leurs éléments d'interface. On bloque les mouvements de corps rigides en imposant une condition de symétrie à l'interface, qui se traduit par une condition cinématique sur les ddls classiques des noeuds enrichis.

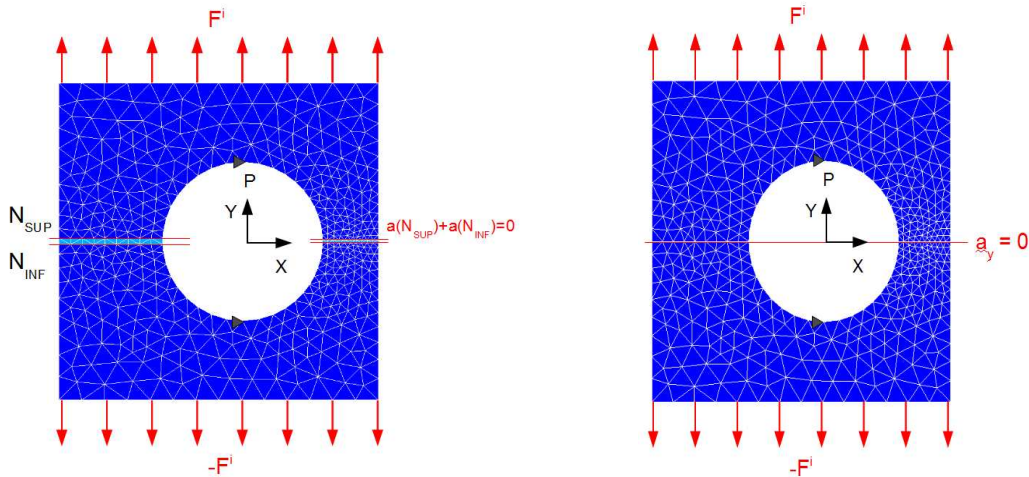


Fig 6. Cas test élaboré : plaque trouée en déformations planes

2.4 Résultats : comparaison des méthodes de pilotage

Nous testons dans un premier temps nos deux premières méthodes de pilotage. Nous remarquons que la méthode par saut imposé ne peut décrire toute la rupture et échoue après la rupture du dernier élément du ligament étroit. Nous avons remarqué sur les résultats que ce moment correspond à une diminution du saut de déplacement moyen, ce qui rend impossible ce type de pilotage. Nous remarquons un blocage encore plus en amont du pilotage par longueur d'arc, car les critères de sélection de la solution sont inadaptés pour des solutions présentant simultanément des zones où le saut de déplacement croît et d'autres où il décroît. Le pilotage par prédiction élastique permet de résoudre ce problème puisque l'on contrôle un incrément d'endommagement. Nous sommes alors certains à chaque pas de temps de progresser de façon irréversible sur une branche dissipative.

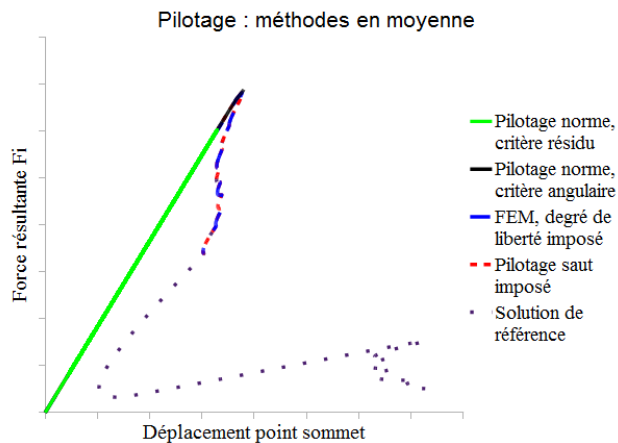


Fig. 7: pilotage en moyenne: comparaison FEM/X-FEM

Si cette branche est unique, la méthode de sélection de la solution n'influence pas le résultat final. Un blocage du calcul pourrait donc uniquement provenir d'une non-convergence de la méthode de Newton.

Si une sélection par résidu est appliquée, ce qui est le choix le plus générique, nous observons un tel blocage. Suivant la forme de la loi cohésive, on observe certaines situations pour lesquelles la solution de résidu initial minimal ne converge pas alors que c'est le cas de la solution de résidu initial maximal. Si la solution de résidu initial minimal échoue, nous proposons alors de recommencer le pas de temps courant sans le subdiviser en choisissant la solution de résidu maximal à la première itération où l'équation de pilotage présente deux solutions. On subdivisera uniquement si les deux possibilités ont échoué. Cette possibilité ayant été implémentée dans Code_Aster, on arrive à décrire la ruine complète de la structure. Une façon plus élégante de procéder ici (mais non généralisable contrairement à la précédente, ce qui pourrait se traduire par une absence de convergence), consiste à utiliser un critère géométrique et à dire que la solution la plus susceptible de converger est celle qui fait le moins varier le saut de déplacement par rapport à l'état d'équilibre précédent : il s'agit du critère en norme, dont l'utilisation permet également le calcul de la ruine de la structure.

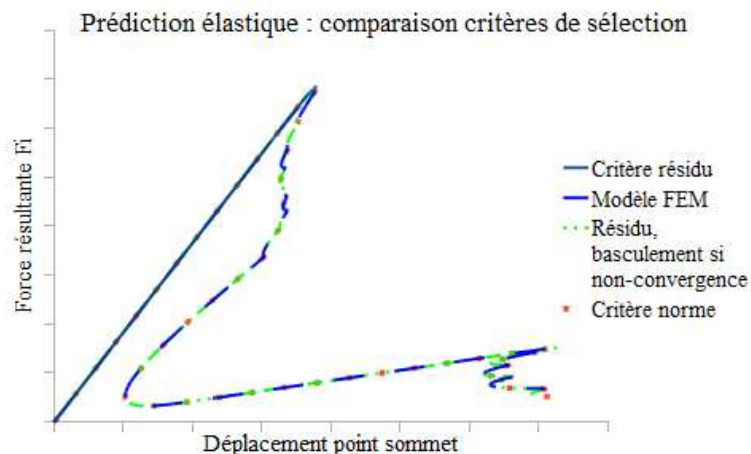


Fig. 8: Comparaison FEM/X-FEM en prédiction élastique

Références

1. N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 131-150, 1999.
2. N. Sukumar, Chopp D.L., Moës N., T. Belytschko. *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190, 6183-6200, 2001.
3. M. Charlotte, J. Laverne, J-J Marigo. *Initiation of cracks with cohesive force models: a variational approach*. European Journal of Mechanics, A/Solids, 25, 649-669, 2006.
4. S. Géniaut, P. Massin, N. Moës. *A stable 3D contact formulation for cracks using XFEM*, Revue Européenne de Mécanique Numérique, 16, 259-275, 2007.
5. G. Meschke, P. Dummstorff, *Energy-based modelling of cohesive and cohesionless cracks via X-FEM*. Computational Methods in Applied Mechanics Engineering, 196, 2338-2357, 2007.
6. J.L. Batoz, G. Dhatt. *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 14, Pages 1262-1267, 1979.
7. E. Riks. *The application of Newton's method to the problem of elastic stability*. Journal of Applied Mechanics, Vol.39, Pages 1060-1066, 1972.
8. E. Lorentz., P.Badel. *A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations*. International journal for numerical methods in engineering., 60, 499 – 526, 2004.
9. N. Moës, E. Béchet, M. Tourbier. *Imposing essential boundary conditions in the X-FEM*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006
10. N. Moës, T. Belytschko. *Extended finite element method for cohesive crack growth*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 69, Pages 813-833, 2002.