



HAL
open science

Identification de fissures dans des milieux homogènes ou bimatériaux par sensibilité topologique élastodynamique temporelle

Cédric Bellis, Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Cédric Bellis, Marc Bonnet. Identification de fissures dans des milieux homogènes ou bimatériaux par sensibilité topologique élastodynamique temporelle. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 7 p. ; Clé USB. hal-00592820

HAL Id: hal-00592820

<https://hal.science/hal-00592820v1>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Identification de fissures dans des milieux homogènes ou bimatériaux par sensibilité topologique élastodynamique temporelle

C. Bellis, M. Bonnet

Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, France, {bellis,bonnet}@lms.polytechnique.fr

Résumé — Le concept de sensibilité topologique quantifie la perturbation induite à une fonction coût donnée lors de l'introduction d'un défaut infinitésimal dans un domaine sain de référence, et peut être utilisé pour définir une fonction indicatrice de défauts. Cette communication présente une extension de cette notion à l'identification 3D de fissures dans des solides homogènes ainsi qu'à l'interface de bimatériaux. Des simulations numériques élastodynamiques 3D montreront que cette formulation nouvelle permet une identification simple et fiable des emplacements et des orientations locales des fissures recherchées.
Mots clés — Sensibilité Topologique, Identification, Fissures.

1 Introduction

L'identification dynamique de fissures enfouies dans des solides est un problème inverse intervenant dans de nombreuses applications comme le contrôle non destructif ou l'imagerie sismique. Depuis une vingtaine d'années les théories mathématiques en diffraction inverse ont évolué vers le développement de méthodes qualitatives et non itératives [1] qui visent à construire des fonctions indicatrices des défauts recherchés. Les principales approches pertinentes pour le problème étudié incluent la méthode de *linear sampling* [2, 3] et le concept de sensibilité topologique considéré ici. Ce dernier a été initialement introduit pour l'optimisation topologique des structures [4], puis a été utilisé pour construire des fonctions indicatrices de défauts enfouis [5]. Cette approche est à rapprocher des méthodes asymptotiques [6] utilisées pour résoudre des problèmes de diffraction dans la limite d'un petit défaut.

L'analyse de sensibilité topologique a récemment été étendue à des problèmes d'identification en dynamique transitoire [7, 8]. D'autre part, seulement un nombre limité d'études a concerné son utilisation pour la reconstruction de fissures [9, 10, 11]. Ainsi, cette communication est dédiée à l'identification de fissures dans des solides élastiques 3D utilisant l'approche par sensibilité topologique dans le domaine temporel, et elle constitue, à notre connaissance, la première étude en ce sens.

Considérons un problème d'identification de fissures où le domaine homogène élastique linéaire de référence Ω (caractérisé par sa masse volumique ρ et son tenseur d'élasticité C) de frontière S et initialement au repos au temps $t = 0$, contenant une (ou plusieurs) fissure(s) Γ_{true} , est sollicité dynamiquement par des efforts appliqués sur S (d'autres configurations pouvant aussi être considérées avec des adaptations mineures). L'excitation engendre un champ de déplacement élastodynamique \mathbf{u} (le champ libre) dans le domaine (sain) Ω de référence et, considérant une fissure test Γ , un champ \mathbf{u}_Γ dans le domaine fissuré $\Omega_\Gamma = \Omega \setminus \Gamma$.

Le problème d'imagerie considéré postule l'accès à données surabondantes sur S sous la forme d'une mesure (potentiellement bruitée) \mathbf{u}_{obs} sur une surface $S_{\text{obs}} \subset S_N$ et durant un intervalle de temps $[0, T]$ du champ $\mathbf{u}_{\Gamma_{\text{true}}}$. Les différences topologiques entre une configuration test $\Omega \setminus \Gamma$ et la configuration réelle $\Omega \setminus \Gamma_{\text{true}}$ sont évaluées par une fonction coût \mathbb{J}

$$\mathbb{J}(\Omega_\Gamma) = \int_0^T \int_{S_{\text{obs}}} \varphi[\mathbf{u}_\Gamma, \boldsymbol{\xi}, t] dS_\xi dt, \quad (1)$$

où la densité φ mesure typiquement un écart aux sens des moindres carrés

$$\varphi[\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, t] = \frac{1}{2} \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi}, t)\|^2. \quad (2)$$

2 Sensibilité topologique élastique

La sensibilité topologique de la fonction coût (1) est ici définie comme sa sensibilité à la création d'une fissure infinitésimale de taille caractéristique $a > 0$ en un point donné $z \in \Omega$ et définie par $\Gamma_a(z) = z + a\bar{\Gamma}$ où la surface ouverte normalisée $\bar{\Gamma}$ contient l'origine et décrit la forme de la fissure employée (par exemple $\bar{\Gamma}$ est un disque unitaire pour une fissure circulaire plane). Le domaine fissuré test correspondant est noté $\Omega_{a,z}$. Classiquement (voir [12]), on caractérise le comportement asymptotique de $\mathbb{J}(\Omega_{a,z})$ lorsque $a \rightarrow 0$ par le développement :

$$\mathbb{J}(\Omega_{a,z}) \underset{a \rightarrow 0}{=} \mathbb{J}(\Omega, T) + \eta(a)\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma}) + o(\eta(a)) \quad (3)$$

où la fonction η (à déterminer) s'annule dans la limite $a \rightarrow 0$ et la *sensibilité topologique* \mathbb{T} dépend du point z choisi et de la durée T de l'expérience.

Le chargement dynamique appliqué à $\Omega_{a,z}$ induit un champ de déplacement $\mathbf{u}_{a,z}$ pouvant être décomposé comme $\mathbf{u}_{a,z} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_{a,z}$ où le champ libre \mathbf{u} est la réponse du domaine de référence Ω tandis que le champ diffracté $\mathbf{v}_{a,z}$ est gouverné par le problème

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[C : \nabla \mathbf{v}_{a,z}] &= \rho \ddot{\mathbf{v}}_{a,z} & \text{in } \Omega_{a,z} \times [0; T] & \quad \mathbf{v}_{a,z} = \mathbf{0} & \text{on } S_D \times [0; T] \\ \mathbf{t}^\pm[\mathbf{v}_{a,z}^\pm] &= -\mathbf{t}^\pm[\mathbf{u}] & \text{on } \Gamma_{a,z}^\pm \times [0; T] & \quad \dot{\mathbf{v}}_{a,z}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_{a,z} \\ \mathbf{t}[\mathbf{v}_{a,z}] &= \mathbf{0} & \text{on } S_N \times [0; T] & \quad \mathbf{v}_{a,z}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_{a,z}, \end{aligned} \quad (4)$$

où les deux faces $\Gamma_{a,z}^\pm$ de la fissure supportent des déplacements $\mathbf{v}_{a,z}^\pm$, et le vecteur contrainte est défini par $\mathbf{t}[\mathbf{w}] = (C : \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n}$ (resp. $\mathbf{t}^\pm[\mathbf{w}^\pm] = \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}^\pm] \cdot \mathbf{n}^\pm$) au moyen de la normale extérieure \mathbf{n} sur S (resp. \mathbf{n}^\pm on $\Gamma_{a,z}^\pm$).

En développant la fonction coût (1) autour de $\mathbf{u}_{a,z} = \mathbf{u}$ au premier ordre en $\mathbf{v}_{a,z} = \mathbf{u}_{a,z} - \mathbf{u}$, le champ diffracté vérifiant dans la limite d'une fissure infinitésimale $\lim_{a \rightarrow 0} \|\mathbf{v}_{a,z}\| = 0$, la sensibilité topologique $\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma})$ ainsi que le comportement asymptotique dominant $\eta(a) = o(\|\mathbf{v}_{a,z}\|_{L^2(S_{\text{obs}})})$ représentés dans l'équation (3) peuvent être trouvés par identification avec

$$\int_0^T \int_{S_{\text{obs}}} \partial_u \varphi[\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}, t] \cdot \mathbf{v}_{a,z}(\boldsymbol{\xi}, t) dS_\xi dt = \eta(a)\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma}) + o(\eta(a)). \quad (5)$$

Une formulation par champ adjoint repose alors sur l'identification de l'intégrale figurant dans (5) comme l'un des termes apparaissant dans l'identité de réciprocité reliant les deux solutions élastodynamiques suivantes : i) champ diffracté $\mathbf{v}_{a,z}$ et ii) *champ adjoint* $\hat{\mathbf{u}}$ solution du problème suivant [7, 13]

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[C : \nabla \hat{\mathbf{u}}] &= \rho \ddot{\hat{\mathbf{u}}} & \text{in } \Omega \times [0; T] & \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{on } S_D \times [0; T] \\ \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}](\cdot, t) &= \partial_u \varphi[\mathbf{u}, \cdot, T - t] & \text{on } S_{\text{obs}} \times [0; T] & \quad \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}] &= \mathbf{0} & \text{on } S_N \setminus S_{\text{obs}} \times [0; T] & \quad \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Ainsi, après développement, (5) peut être réécrit comme

$$\int_0^T \int_{\Gamma_{a,z}} \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}](\boldsymbol{\xi}, T - t) \cdot \Delta \mathbf{v}_{a,z}(\boldsymbol{\xi}, t) dS_\xi dt = \eta(a)\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma}) + o(\eta(a)), \quad (7)$$

où $\Delta \mathbf{v}_{a,z} = \mathbf{v}_{a,z}^+ - \mathbf{v}_{a,z}^-$ représente le déplacement d'ouverture de fissure, le vecteur contrainte $\mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}]$ est défini sur $\Gamma_{a,z}$ au moyen de la normale unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{n}^-$, et en ayant utilisé les conditions à la frontière dans les problèmes (4) et (6) ainsi que la continuité du champ de déplacement adjoint $\hat{\mathbf{u}}$ à travers $\Gamma_{a,z}$.

Sensibilité topologique. La détermination de $\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma})$ et $\eta(a)$ dans (7) requiert maintenant la caractérisation du comportement asymptotique dominant le déplacement relatif $\Delta \mathbf{v}_{a,z}$ lorsque $a \rightarrow 0$, une étape cruciale qui n'est pas décrite ici par brièveté. Ces termes sont finalement trouvés comment étant égaux à

$$\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma}) = [\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \star (\mathcal{A}(\bar{\Gamma}) : \boldsymbol{\sigma}[\hat{\mathbf{u}}])](z, T), \quad \eta(a) = a^3, \quad (8)$$

en termes des solutions libre et adjointe \mathbf{u} , $\hat{\mathbf{u}}$ et du *tenseur de polarisation* du 4^{eme} ordre $\mathcal{A}(\bar{\Gamma})$ donné par

$$\mathcal{A}_{ijkl}(\bar{\Gamma}) = \int_{\bar{\Gamma}} \Delta V_k^{ij}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) n_l(\bar{\boldsymbol{\xi}}) dS_{\bar{\boldsymbol{\xi}}}. \quad (9)$$

Dans l'équation (9), $\bar{\xi}$ représente le vecteur position adimensionné défini par $\xi = z + a\bar{\xi}$ et les fonctions vectorielles ΔV^{ij} sont solutions de l'équation intégrale

$$\oint_{\bar{\Gamma}} [\mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{C} \cdot \Sigma_{\infty}(\bar{\xi} - \bar{\mathbf{x}})] : \mathcal{D} \Delta V^{ij}(\bar{\xi}) dS_{\bar{\xi}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Gamma}) \quad (10)$$

(où $\Sigma_{\infty}(\mathbf{r})$ est la solution fondamentale *elastostatique* dans \mathbb{R}^3 (Kelvin), $\mathbf{w} \mapsto \mathcal{D}\mathbf{w} = \nabla \mathbf{w} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \nabla \mathbf{w}$ définit un opérateur différentiel tangentiel tensoriel et f indique une intégrale en valeur principale de Cauchy qui peut être identifiée [14] comme régissant le problème élastostatique extérieur pour la fissure normalisée $\bar{\Gamma}$ contenue dans un domaine élastique infini et soumise sur ses faces à un chargement $\mathbf{t}^{\pm} = -\frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n}^{\pm}(\bar{\mathbf{x}})$. Il peut alors être démontré que \mathcal{A} possède la symétrie majeure.

Une expression synthétique de \mathcal{A} peut alors être obtenue dans le cas d'une fissure circulaire plane, pour laquelle $\bar{\Gamma}$ est un disque unitaire de normale \mathbf{n} , sous la forme

$$\mathcal{A} = \frac{8(1-\nu)}{3\mu(2-\nu)} \mathbf{n} \otimes (2\mathbf{I} - \nu \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n}. \quad (11)$$

3 Reconstruction de fissures : mise en œuvre

Puisque $\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma})$ quantifie la sensibilité de la fonction coût considérée \mathbb{J} à la création d'une fissure infinitésimale en un point z du milieu de référence, il est naturel de considérer $z \mapsto \mathbb{T}(z, \bar{\Gamma})$ comme une possible fonction indicatrice de fissures. Cette approche heuristique consiste à rechercher la (ou les) fissure(s) réelle(s) aux points z où \mathbb{T} atteint ses valeurs négatives extrémales (c'est-à-dire là où la création d'une fissure test infinitésimale minimisera l'écart entre prédiction et mesures réelles). Dans le reste de cette communication \mathcal{A} sera considéré comme étant donné par (11), de sorte qu'on ait $\mathbb{T}(z, \bar{\Gamma}) = \mathbb{T}(z, \mathbf{n})$.

Le calcul de $\mathbb{T}(\cdot, \mathbf{n})$ utilisant (8) entraîne l'évaluation d'une intégrale de convolution temporelle qui requiert le stockage de l'ensemble des champs libre et adjoint calculés sur l'intervalle de temps considéré. Pour limiter à un temps aussi court que possible la mise en mémoire associée, il peut être utile de réécrire $\mathbb{T}(z, \mathbf{n})$ sous la forme équivalente suivante

$$\mathbb{T}(z, \mathbf{n}) = \mathbf{\Pi}(z) :: \mathcal{A}(\mathbf{n}), \quad (12)$$

où le tenseur du 4^{eme} ordre $\mathbf{\Pi}(z)$ est défini par

$$\mathbf{\Pi}(z) = \int_0^T \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}[\hat{\mathbf{u}}](z, T-t) \otimes \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}](z, t) + \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}](z, t) \otimes \boldsymbol{\sigma}[\hat{\mathbf{u}}](z, T-t) \} dt.$$

L'avantage numérique de l'utilisation de l'équation (12) plutôt que (8a) se manifeste lors de l'évaluation du champ $\mathbf{\Pi}(z)$ immédiatement après avoir résolu les problèmes aux limites des champs libre et adjoint, après quoi les solutions correspondantes peuvent être abandonnées. Ce traitement possède deux avantages principaux. D'une part, lorsque la fonction coût employée synthétise additivement plusieurs expériences, pour lesquelles chaque tenseur $\mathbf{\Pi}_m(z)$ associé à l'expérience m peut être calculé séquentiellement, alors la sensibilité topologique est donnée par

$$\mathbb{T}(z, \mathbf{n}) = \left\{ \sum_m \mathbf{\Pi}_m(z) \right\} :: \mathcal{A}(\mathbf{n}).$$

D'autre part, $\mathbf{\Pi}(z)$ ne dépendant pas de \mathbf{n} , ce traitement simplifie la prise en compte des différentes orientations possibles en chaque point z et minimise les coûts de calcul associés.

Une caractéristique importante des fissures recherchées sont leurs orientations, qui ne sont usuellement pas connues *a priori*. Conformément à l'approche heuristique décrite, il est naturel de chercher l'orientation minimisant $\mathbb{T}(z, \mathbf{n})$ en un point z donné. Par conséquent, on peut définir pour $z \in \Omega$

$$\mathbb{T}^{\text{opt}}(z) = \min_{\mathbf{n}} \mathbb{T}(z, \mathbf{n}). \quad (13)$$

Finalement, afin de ne retenir que les point $z \in \Omega$ où \mathbb{T}^{opt} prend des valeurs (négatives) minimales, en notant $\mathbb{T}^{\text{min}} = \min_{z \in \Omega} \mathbb{T}^{\text{opt}}(z)$, une version seuillée \mathbb{T}_{λ} de \mathbb{T}^{opt} est définie par

$$\mathbb{T}_{\lambda}(z) = \begin{cases} \mathbb{T}^{\text{opt}}(z) & \text{si } \mathbb{T}^{\text{opt}}(z) \leq \lambda \mathbb{T}^{\text{min}} \\ 0 & \text{si } \mathbb{T}^{\text{opt}}(z) > \lambda \mathbb{T}^{\text{min}} \end{cases} \quad (14)$$

(où $\lambda > 0$ est la valeur du seuil retenue avec l'hypothèse implicite $\mathbb{T}^{\min} < 0$). Enfin, une normale optimale moyenne $\mathbf{n}_\lambda^{\text{opt}}$ en un point \mathbf{z} donné est définie par

$$\mathbf{n}_\lambda^{\text{opt}}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{n}|\mathbb{T}(\mathbf{z},\mathbf{n}) < \lambda\mathbb{T}^{\min}} \mathbf{n} \, dS_\xi.$$

4 Exemples numériques

Des expériences numériques sont maintenant présentées pour évaluer la qualité de la reconstruction fournie par la sensibilité topologique. En utilisant un code éléments finis conventionnel (Cast3m), des données synthétiques sont produites pour différents maillages contenant des fissures et les sensibilités topologiques associées à des fonctions coûts aux moindres carrés (1), (2) sont calculées.

Les solutions élastodynamiques libre et adjointe sont calculées sur des maillages utilisant des éléments tétraédriques isoparamétriques à quatre nœuds associés à des fonctions de formes linéaires et en employant l'algorithme de Newmark inconditionnellement stable avec des paramètres $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ [15]. Des versions de (1) et (8) discrétisées en temps et en espace sont alors employées en utilisant le tenseur de polarisation (11).

Le domaine de référence Ω choisi pour cet exemple est une coque cylindrique allongée avec des rayons intérieur et extérieur $R_i = 0.9$, $R_e = 1$ et une hauteur $H = 4$ discrétisée en 40650 nœuds. On définit $S_N = \partial\Omega$ et $S_D = \emptyset$, et la surface d'observation est $S_{\text{obs}} = \{r = 1, 0 < z < 4\}$. Les paramètres matériaux sont tels que $c_S = \sqrt{\mu/\rho} = 1$ (vitesse unitaire des ondes de cisaillement), avec $\nu = 0.3$. Une fissure hélicoïdale, débouchante sur la surface intérieure de la coque, est centrée en \mathbf{x}^* dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) et paramétrée par des longueurs fixes h et l et un angle orienté α variable (Fig. 2) à identifier.

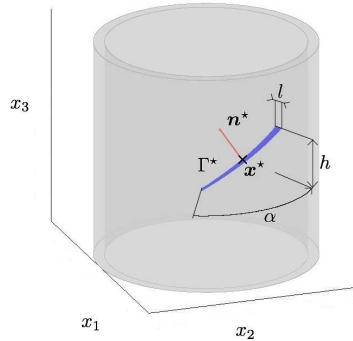


FIG. 1: Coque cylindrique fissurée : modèle et notations

La première configuration étudiée contient une fissure unique centrée sur $\mathbf{x}^* = (0.945, 0, 1.75)$ et caractérisée par $h = 0.5$ et $l = 0.09$. Des données synthétiques sont produites en utilisant une expérience unique de durée $T = 8$ pendant laquelle un chargement spatialement uniforme défini par $\mathbf{t}(\xi, t) = (-\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)g(t, 1, 0.3)$, est imposé sur la surface $\{r = 1, (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [3.9, 4]\}$ (où $t \mapsto g(t; m, d)$ représente la fonction de Gauss de moyenne m et d'écart type d). Les résultats numériques sont présentés en figures 2a,b (champ de sensibilité topologique) et 3 (champs de normales estimé).

Une deuxième configuration contenant deux fissures centrées sur $\mathbf{x}_1^* = (0.945, 0, 1.25)$ et $\mathbf{x}_2^* = (0.945, 7\pi/9, 3)$ et respectivement caractérisées par des angles $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/4$, et des longueurs $h = 0.5$, $l = 0.09$, est ensuite étudiée en utilisant une expérience (simulée) unique. Le chargement et la durée T sont identiques à ceux utilisés dans le cas précédent d'une seule fissure. Les résultats numériques sont présentés en figures 2c (champ de sensibilité topologique) et 4 (champs de normales estimé).

5 Extension aux fissures d'interface

L'approche précédente est maintenant étendue à l'identification de fissures d'interface dans un bi-matériaux telles qu'elles apparaissent dans un grand nombre d'applications : fissures de délamination dans les matériaux composites résultant d'un comportement en fatigue des laminés ou décollement aux

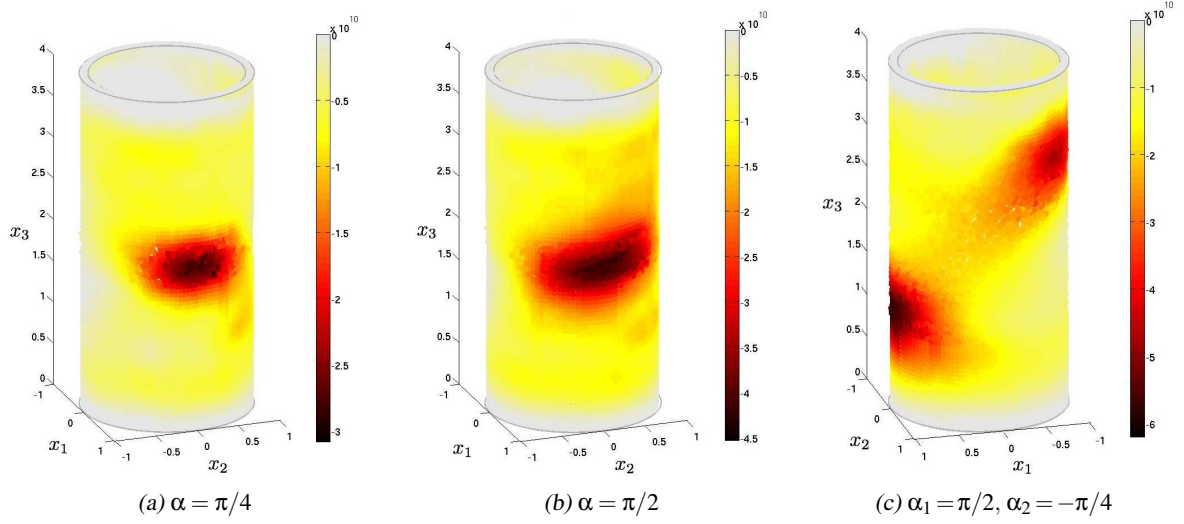


FIG. 2: Champ \mathbb{T}_0 : (a,b) fissure unique ; (c) deux fissures

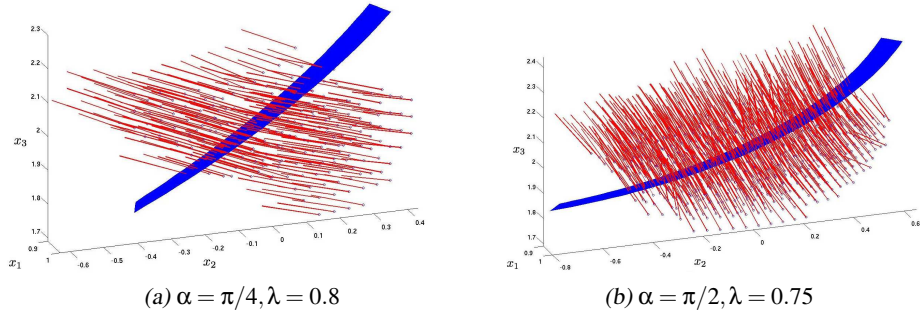


FIG. 3: Identification d'une fissure unique : champ de normales n_λ^{\min}

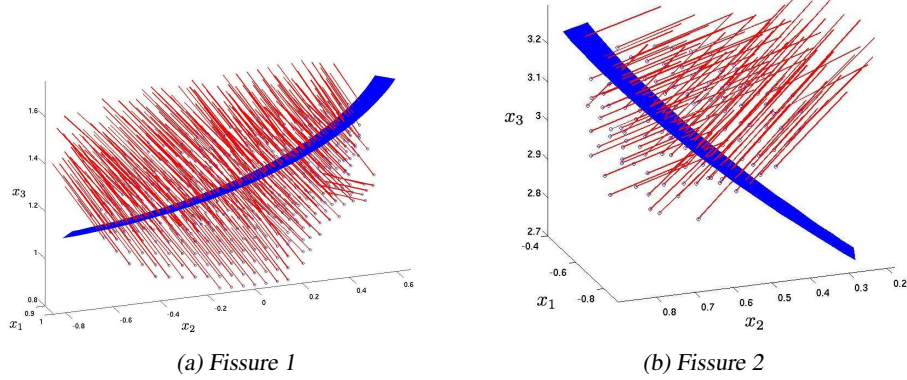


FIG. 4: Identification de deux fissures : champ de normales $n_{0.65}^{\min}$

interfaces matrice-matrice et fibre-matrice. Dans ce contexte, le domaine de référence Ω considéré est constitué de deux sous domaines homogènes élastiques linéaires Ω^\pm tels que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ et caractérisés par les masses volumiques correspondantes ρ^\pm , ainsi que modules de cisailment μ^\pm et coefficients de Poisson ν^\pm . De plus $S_{\text{int}} = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ représente l'interface des deux sous domaines dont l'emplacement est en général connu *a priori* dans les applications mentionnées, et qui contient une (ou plusieurs) fissure(s) Γ_{true} à identifier. L'expression (8) de sensibilité topologique reste valable et le tenseur de polarisation \mathcal{A}^\pm correspondant est défini par une intégrale analogue à (9) pour le domaine bimatériaux. Ce tenseur de polarisation peut encore être exprimé de façon synthétique lorsque $\bar{\Gamma}$ est une fissure circulaire plane, en utilisant une solution analytique donnée dans [16]. Il se réduit alors à forme suivante :

$$\mathcal{A}^\pm = \frac{8}{3} \Lambda^\pm \mathbf{n} \otimes \left\{ 2\mathbf{I} + \frac{(\alpha - \delta)\pi\kappa(1 + \kappa^2) - \beta}{\beta} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right\} \otimes \mathbf{n},$$

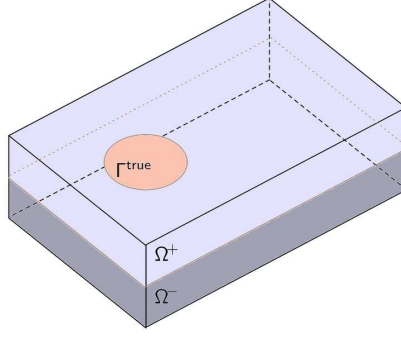


FIG. 5: *Domaine bimatériaux fissuré*

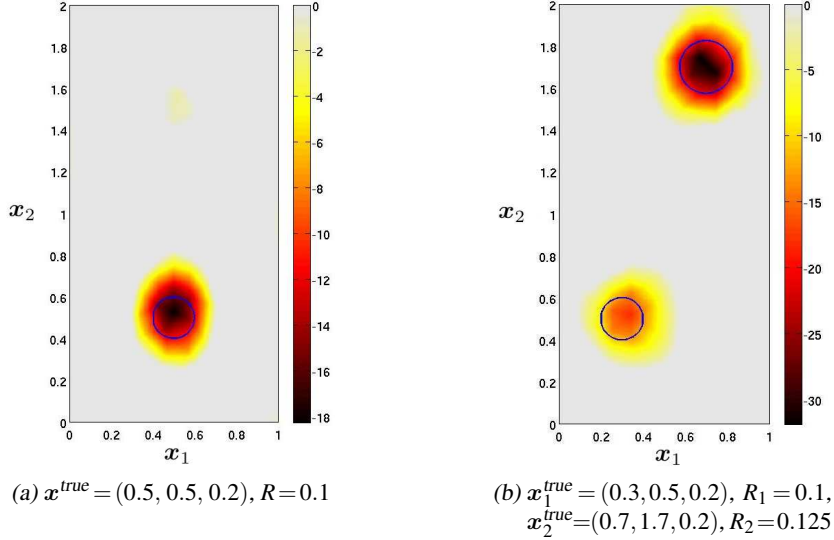


FIG. 6: *Champ \mathbb{T}_0 sur S_{int}*

en termes de paramètres matériaux donnés par

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-\nu^+}{2\pi\mu^+} + \frac{1-\nu^-}{2\pi\mu^-}, & \beta &= \frac{1-2\nu^+}{4\pi\mu^+} - \frac{1-2\nu^-}{4\pi\mu^-}, \\ \gamma &= \frac{\nu^+}{2\pi\mu^+} + \frac{\nu^-}{2\pi\mu^-}, & \kappa &= \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right), \\ \delta &= \frac{\alpha\gamma + \beta^2}{\alpha + \gamma}, & \Lambda^\pm &= \frac{\pi^2\kappa(1+\kappa^2)(\alpha^2 - \beta^2)}{(\alpha - \delta)\pi\kappa(1+\kappa^2) + \beta}. \end{aligned}$$

En utilisant le contexte éléments finis décrit Section 4, nous considérons les cas d'une et de deux fissures circulaires dans un domaine bimatériaux parallélépipédique $\Omega = \{\xi \in [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 0.4]\}$ où S_{int} se situe dans le plan $\xi_3 = 0.2$ et caractérisé par des paramètres matériaux $\nu^+ = \nu^- = 0.3$, $\mu^+ = 2\mu^- = 7.7$ et $\rho^+ = 2\rho^- = 10$, avec un chargement uniforme spatialement en compression $t[u_{\Gamma^*}](\xi, t) = -g(t, 0.5, 0.3)e_3$ imposé sur la face supérieure. S_{int} est supposée *a priori* connue et pouvant contenir une (ou plusieurs) fissure(s), de sortes que le champ de sensibilité topologique donné par (13) est utilisé avec $n^{opt}(z, T) = e_3$. La Figure 6 représente à l'interface S_{int} sa version seuillée (14).

6 Conclusion

La méthode de sensibilité topologique proposée est une approche globale, non itérative et qualitative pour l'identification élastodynamique de fissures. La formulation par champ adjoint employée, qui requiert seulement le calcul de deux solutions du problème *direct* (à savoir les champs libre et adjoint définis sur la configuration saine de référence), est performante numériquement en comparaison des

méthodes de minimisation itératives. La fonction indicatrice proposée est de nature globale puisqu'elle permet de trouver l'emplacement de plusieurs fissures sans information a priori sur leur nombre. Sur la base de l'interprétation heuristique de la dérivée topologique de la fonction coût considérée, l'utilisation d'expressions synthétiques de tenseurs de polarisation correspondants à l'emploi de fissures infinitésimales circulaires planes dans l'analyse asymptotique, permet la reconstruction qualitative de fissures en termes d'emplacement et d'orientation locale. Finalement, la mise en œuvre de la méthode dans un code éléments finis classique illustre la simplicité et la souplesse de cette approche.

Références

- [1] F. Cakoni, D. Colton, *Qualitative methods in inverse scattering theory*, Springer-Verlag, 2006.
- [2] F. Cakoni, D. Colton, "The linear sampling method for cracks," *Inverse Problems*, 19 :279–295, 2003.
- [3] S. Nintcheu Fata, B. Guzina, "A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics," *Inverse Problems*, 20 :713–736, 2004.
- [4] H. A. Eschenauer, V. V. Koblelev, A. Schumacher, "Bubble method for topology and shape optimization of structures," *Structural Optimization*, 8 :42–51, 1994.
- [5] M. Bonnet, B. Guzina, "Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative," *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 61 :2344–2373, 2004.
- [6] H. Ammari, H. Kang, *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, Springer-Verlag, 2004.
- [7] M. Bonnet, "Topological sensitivity for 3D elastodynamics and acoustic inverse scattering in the time domain," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :5239–5254, 2006.
- [8] N. Dominguez, V. Gibiat, Y. Esquerré, "Time domain topological gradient and time reversal analogy : an inverse method for ultrasonic target detection," *Wave Motion*, 42 :31–52, 2005.
- [9] S. Amstutz, I. Horchani, M. Masmoudi, "Crack detection by the topological gradient method," *Control and Cybernetics*, 34 :81–101, 2005.
- [10] H. Ammari, H. Kang, H. Lee, W. K. Park, "Asymptotic imaging of perfectly conducting cracks," *SIAM J. Sci. Comput.*, 32 :894–922, 2010.
- [11] S. Amstutz, N. Dominguez, "Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic non-destructive testing," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32 :936–947, 2008.
- [12] S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi, "The topological asymptotic for pde systems : the elasticity case., " *SIAM J. Control Optim.*, 39 :1756–1778, 2001.
- [13] C. Bellis, M. Bonnet, "A fem-based topological sensitivity approach for fast qualitative identification of buried cavities from elastodynamic overdetermined boundary data," *Int. J. Solids Struct.*, 47 :1221–1242, 2010.
- [14] M. Bonnet, *Boundary integral equations methods for solids and fluids*, Wiley, 1999.
- [15] T. J. R. Hughes, *The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis*, Dover, 2000.
- [16] J. R. Willis, "The penny-shaped crack on an interface," *Quart. J. Mech. and Applied Math.*, 25 :367–385, 1972.