

# Des outils de simulation pour les mécanismes d'interaction : rupture dynamique de matériaux hétérogènes et écoulements granulaires immergés.

F. Perales<sup>1,2</sup>, V. Topin<sup>1,2</sup>, F. Dubois<sup>2,3</sup>, Y. Monerie<sup>1,2</sup>, B. Piar<sup>1</sup>, A. Wachs<sup>4</sup>

<sup>1</sup> IRSN, DPAM, CE Cadarache, BP3 - 13115 St Paul-Lez-Durance Cedex, France

<sup>2</sup> Laboratoire MIST, CNRS - IRSN - Université Montpellier 2

<sup>3</sup> LMGC, CNRS-Université Montpellier 2, case 048, Place Eugène Bataillon, F-34095 cedex 5, France

<sup>4</sup> IFP Energies nouvelles, Fluid Mechanics Department, Etablissement de Lyon, Rond-point de l'échangeur de Solaize - BP 3, 69630 Solaize

**Résumé** — Les travaux concernent les outils numériques développés pour l'étude des interactions entre corps rigides ou déformables. On s'intéresse : 1) aux interactions de séparation : rupture dynamique des matériaux fortement hétérogènes et 2) aux interactions de contact en présence de fluide : particules immergées. Les plate-formes associées reposent sur le couplage de la bibliothèque logicielle parallélisée PELICANS pour la résolution des problèmes volumiques (Eléments finis ou Volumes Finis) et du logiciel LMGC90 (Dynamique des Contacts) pour la prise en compte d'interactions complexes entre particules.

**Mots clés** — Fissuration, Modèles de Zone Cohésive Frottante, Dynamique non régulière, Ecoulements particulaires denses, Multiplicateur de Lagrange/ Domaines Fictifs

## 1 Introduction

Ces travaux concernent les outils numériques développés dans le cadre des recherches de l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire relatives à la sûreté des réacteurs à eau sous pression. Plus précisément, les études présentées dans ce papier portent sur la modélisation des mécanismes d'interactions complexes entre corps rigides ou déformables. Deux situations spécifiques sont analysées : d'une part la rupture dynamique des matériaux fortement hétérogènes et d'autre part le comportement d'un ensemble de particules immergées dans un fluide.

Ces modélisations d'interactions reposent sur l'approche Non Smooth Contact Dynamics (NSCD), initialement développée par Moreau [1] et Jean [2] et dédiée au traitement de systèmes dynamiques en présence de contraintes unilatérales sans régularisation ni pénalisation. Elle est implémentée dans le logiciel LMGC90 (Logiciel de Mécanique Gérant le Contact) [3, 4].

Dans le cadre de la fissuration dynamique de matériaux hétérogènes, l'approche NSCD est étendue à une modélisation multicorps volumique-surfacique périodique en utilisant notamment des Modèles de Zone Cohésive Frottante (MCFZ) [5, 6]. La plate-forme numérique associée, appelée Xper (eXtended cohesive zone models and PERiodic homogenization), permet de simuler la rupture dynamique de matériaux hétérogènes et à gradients de propriétés, de l'amorçage de multifissures jusqu'à la ruine du matériau ainsi que des interactions complexes post-rupture [6, 7].

L'étude des mélanges fluide/grains repose sur un couplage de type Multiplicateur de Lagrange/ Domaines Fictifs (ML/DF) développé dans le cadre du logiciel PeliGRIFF [8, 9], basé sur une méthode par éléments finis de bas degrés inf-sup stables pour la modélisation de la phase fluide et l'approche NSCD pour la phase granulaire [10]. L'outil numérique associé, appelé ApoloGRIFF (enhAnced Particle inter-actiOn using Lmgc90 sOftware for GRains In Fluid Flow) par l'IRSN, permet de traiter des problèmes d'écoulement non compressibles complexes.

Ces plate-formes reposent sur le couplage mixte en programmation orientée objet de la bibliothèque logicielle parallélisée (mémoire distribuée) PELICANS [11] pour la résolution des problèmes volumiques (Eléments finis ou Volumes Finis) et du logiciel LMGC90 pour le traitement des interactions non régulières.

Les modèles utilisés dans ces plate-formes sont succinctement présentés, puis les architectures sont évoquées et enfin, les potentialités des logiciels associés sont illustrées respectivement sur les problèmes

de béton numériques et d'effondrement d'une colonne de grains dans un fluide lors d'une avalanche sous-marine.

## 2 Modélisation

### 2.1 L'approche Non Smooth Contact Dynamics

La discrétisation spatiale de l'équation de la dynamique s'écrit :

$$M\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) + r \quad (1)$$

où  $q$ ,  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération discrets,  $M$  est la matrice de masse,  $F(q, \dot{q}, t)$  représente les forces intérieures et extérieures et  $r$  les forces de contact. Cette équation est traitée dans le cadre de la méthode NSCD [2] et du cadre fonctionnel proposé par [1].

Dans le cadre de la méthode utilisée, l'équation (1) est écrite au sens des mesures différentielles et son intégration temporelle entre  $]t_i, t_{i+1}]$  est réalisée par une  $\theta$ -méthode. Les inconnues du problème sont alors des vitesses et des impulsions. Par ailleurs, le système est condensé sur les inconnues de contact et dans le cas non linéaire résolu par une méthode de Newton-Raphson. Pour chaque contact  $\alpha$ , le système s'écrit :

$$\begin{cases} U^\alpha - U_{loclib}^\alpha - W^{\alpha\alpha} h R^\alpha = 0 \\ R_N^\alpha - \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_N^\alpha - \rho U_N^\alpha) = 0 \\ R_T^\alpha - \text{proj}_{D(\mu|R_N^\alpha|)}(R_T^\alpha - \rho U_T^\alpha) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où  $\rho > 0$  et  $D(\mu|R_N^\alpha|)$  est le disque de centre 0 et de rayon  $\mu|R_N^\alpha|$ ,  $U$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  le coefficient de frottement de Coulomb et  $R$  les valeurs locales de la vitesse et de la réaction de contact,  $U_{loclib}^\alpha$  la vitesse au contact  $\alpha$  et  $W^{\alpha\alpha}$  la condensation de l'inverse de la matrice des itérations. Les quantités  $N$  et  $T$  indiquent respectivement les parties normales et tangentielles.

Le système non linéaire (2) est résolu par la méthode de Newton généralisé proposée dans [12].

### 2.2 Fissuration : l'approche Non Smooth Fracture Dynamics

L'approche NSCD est étendue au traitement des problèmes de fissuration par translation de la réaction de contact frottant d'une quantité  $R^{adh}$  traduisant l'effort qu'il faut fournir pour ouvrir les lèvres d'une fissure en train de se créer d'une ouverture  $[u]$  [13] :

$$R^{adh} = K(\beta) \cdot [u] \quad \text{et} \quad \beta = \min(\beta, g(\|[u]\|)) \quad (3)$$

où  $I_X$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $X$ ,  $\beta$  une variable traduisant l'endommagement surfacique,  $K(\beta)$  un tenseur de deuxième ordre traduisant l'adoucissement progressif du comportement surfacique lors d'une fissuration et  $g$  une fonction décroissante de  $\|[u]\|$ .

Une variante de la loi d'endommagement surfacique de [14] est introduite (pour la présente écriture voir [15]) :

$$\beta = \min(g(\|[u]\|), g(\|[u]\|_{\max})),$$

$$g(x) = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } x \leq \delta_0, \\ \beta_0 \frac{\delta_0}{x} \left(1 - \left(\frac{x - \delta_0}{\delta_c - \delta_0}\right)^2\right) & \text{si } \delta_0 < x < \delta_c, \\ 0 & \text{si } x \geq \delta_c, \end{cases}$$

avec  $\delta_0 = \frac{R_{\max}}{2} \left(\frac{1}{C_N} + \frac{1}{C_T}\right)$ ,  $\delta_c = \frac{3}{2} \left(\frac{w}{R_{\max}} + \frac{\delta_0}{6}\right)$ ,  $0 \leq \beta_0 \leq 1$ ,  $C_N$  et  $C_T$  des raideurs ( $Pa/m$ ),  $0 \leq \beta_0 \leq 1$  un niveau d'endommagement surfacique initial et  $w$  une énergie de référence (en  $J/m^2$ ),  $R_{\max}$  est la valeur maximum atteinte par la force adhésive ( $MPa$ ),  $\|[u]\|_{\max}$  est la valeur maximale atteinte par  $\|[u]\|$ .

### 2.3 Granulaire immergé : Multiplicateur de Lagrange/Domains Fictifs - NSCD

Soit  $\Omega$  un domaine fermé et  $\Gamma$  son contour. Nous supposons que  $\Omega$  est rempli de  $N_p$  particules  $P_i$  avec  $i \in (1, N_p)$ . L'ensemble du domaine occupé par les particules est noté  $P$  et  $\delta P$  sa frontière.

Introduisons les espaces fonctionnels suivants [8] :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0(\Omega) &= \{v_f \in \mathcal{H}1(\Omega)^d / v_f = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\} \\ \mathcal{V}_\Gamma(\Omega) &= \{v_f \in \mathcal{H}1(\Omega)^d / v_f = u_{f,\Gamma} \text{ sur } \Gamma\} \\ \Lambda &= \mathcal{H}^1(P(t))^d\end{aligned}$$

la formulation variationnelle du problème fluide et granulaire s'écrit [8] :

Trouver  $u_f \in \mathcal{V}_\Gamma(\Omega)$ ,  $u_s \in \Lambda$  tels que :

(a) Equations combinées du mouvement

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho_f (\partial u_f / \partial t + (u_f \cdot \nabla) u_f - g) \cdot v_f \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v_f \, d\Omega + \int_{\Omega} \tau_f : D(v_f) \, d\Omega \\ + (1 - \rho_f / \rho_s) (\mathbf{M} (du_s^t / dt - g) \cdot v_s^t + \mathbf{1} d\omega / dt \cdot \xi) - \sum_j F_{cj} \cdot v_s^t - \sum_j r_j \cdot (\xi \times C_j) \\ + \int_P \lambda \cdot (v_f - (v_s^t + \xi \times c)) \, d\Omega = 0 \quad \forall v_f \in \mathcal{V}_0(\Omega), v_s^t \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^{\bar{d}}, \quad (4)\end{aligned}$$

$$\int_P \gamma \cdot (u_f - (u_s^t + \omega \times c)) \, d\Omega = 0, \forall \gamma \in \Lambda. \quad (5)$$

(b) Equation de continuité

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot u_f \, d\Omega = 0, \forall q \in \mathcal{L}_0^2(\Omega). \quad (6)$$

où  $\rho_f$  et  $u_f$  sont respectivement la densité et la vitesse du fluide,  $p$  la pression,  $\tau_f$  la composante déviatorique du tenseur des contraintes fluide,  $u_s$  la vitesse des particules,  $\rho_s$  et  $f_s$  respectivement la densité des particules et la force volumique associée,  $g$  la force de gravité,  $u_s^t \in \mathbb{R}^d$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^{\bar{d}}$  une vitesse angulaire telle que  $u_s = u_s^t + \omega \times c$ ,  $c$  le vecteur position associé au centre de gravité des particules,  $\bar{d}$  est le nombre de composantes non-nulles  $s$  de  $\omega$ ,  $(v_f, q, \gamma, v_s^t, \xi)$  correspond aux fonctions tests de  $(u_f, p, \lambda, u_s^t, \omega)$ ,  $r_j \in \mathbb{R}^d$  sont les forces de contact,  $C_j \in \mathbb{R}^d$  les vecteurs entre le centre de gravité des particules et le point de contact,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse des particules,  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{\bar{d} \times \bar{d}}$  le tenseur d'inertie des particules.

L'intégration en temps du problème (4)-(6) est effectuée à l'aide de l'algorithme de Marshuk-Yanenko, le problème est ainsi décomposé en cinq sous-problèmes simplifiés [8] :

- 1) Problème de Stokes "dégénéré"
- 2) Problème de transport
- 3) Problème visqueux  
 $\Rightarrow$  trouver  $u_f^{n+\frac{i}{5}}$  à partir de  $u_f^{n+\frac{i-1}{5}}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$
- 4) Problème granulaire (Méthode NSCD)  
 $\Rightarrow$  Trouver  $u_s^{t, n+4/5}$ ,  $\omega^{n+4/5}$  à partir de  $u_s^{t, n}$ ,  $\omega^n$
- 5) Problème des domaines fictifs  
 $\Rightarrow$  Trouver  $u_f^{n+1}$ ,  $u_s^{t, n+1}$ ,  $\omega^{n+1}$  à partir de  $u_f^{n+4/5}$ ,  $u_s^{t, n+4/5}$ ,  $\omega^{n+4/5}$

A chaque pas de temps, la méthode de décomposition d'opérateur permet de résoudre indépendamment les équations de Navier-Stokes (étapes de 1 à 3) et le problème granulaire (étape 4) avant de corriger finalement les vitesses du fluide et des particules (étape 5). Le problème granulaire est ici résolu à l'aide de l'approche NSCD. Cette résolution granulaire permet d'une part le traitement des interactions entre particules sans régularisation ni pénalisation et d'autre part l'accès à de nombreux modèles d'interactions (contact, frottement, adhésion, dilatance, etc...) implémentés dans la plateforme LMGC90.

### 3 Outils numériques

La spécificité de l'approche proposée dans ce papier réside dans l'utilisation du même formalisme non régulier pour le traitement des interactions complexes entre les corps : l'approche Non Smooth Contact Dynamics. D'un point de vue mécanique, ces modèles d'interactions regroupent toutes les situations mettant en jeu des situations de traction-compression-frottement : contact frottant, endommagement surfacique (modèles de zone cohésive avec ou sans raideur initiale), usure, dilatance, etc. Ces interactions peuvent se produire entre corps rigides ou déformables, corps simples (particules sphériques, polyédriques, maille d'une discrétisation) ou complexes (assemblages de particules, groupement de mailles).

Cette approche permet d'aborder différents couplages physiques. Parmi ces couplages, on peut citer : particules ou corps maillés en présence de fluide résolu [10] ou non résolu (approche de type milieux poreux) [16], couplages thermiques [17], tenue des ouvrages maçonnés [18], fissuration des matériaux composites [6], comportement des milieux granulaires secs, drainés ou immergés [10], etc.

Les couplages présentés ici concernent en particulier la fissuration de matériaux hétérogènes et le couplage fluide-grains. Les logiciels associés résultent du couplage mixte (C++ et Fortran90) et orienté objet d'applications issues de la bibliothèques PELICANS et du logiciel LMGC90.

LMGC90 [4] est une plateforme conçue avec une approche orientée objet et réalisée en Fortran90. Cette plateforme développée au Laboratoire de Mécanique et Genie Civil (LMGC) de Montpellier est dédiée à la modélisation et au traitement des problèmes d'interaction entre corps et repose sur l'approche NSCD. En particulier, elle permet la prise en compte sans régularisation ni pénalisation de l'interaction entre particules ou entre corps en fissuration.

Les discrétisations des fluides (Eléments Finis/Volume Finis) ou des solides (Eléments Finis) sont prises en compte dans des applications développées à partir de la bibliothèque logicielle parallélisée (mémoire distribuée) PELICANS [11]. Celle-ci est développée par l'Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire en C++ et est consacrée à la résolution des Equations aux Dérivées Partielles.

Les outils numériques obtenus permettent d'une part de simuler en grandes déformations la rupture dynamique des matériaux hétérogènes et à gradients de propriétés, de l'amorçage de multifissures jusqu'à la ruine finale et la prise en compte des interaction complexes post-ruptures (contact, frottement,...) et d'autre part de traiter des problèmes 3D d'écoulements non compressibles complexes avec une prise en compte d'interactions entre particules.

Dans la suite, deux exemples d'application de ces outils numériques sont présentés.

## 4 Applications

### 4.1 Fissuration d'un matériau hétérogène, le béton numérique

A titre illustratif des potentialités du formalisme proposé, une première application concerne la simulation du comportement d'un béton numérique. Les calculs sont effectués sur un volume élémentaire rectangulaire ( $350 \times 200 \text{ mm}^2$ ) contenant des inclusions circulaires polydisperses. La taille de maille est de 5mm, taille de la plus petite inclusion (voir FIGURE 1).

Les matériaux sont considérés élastiques isotropes, avec les propriétés suivantes :  $E^{\text{mat}} = 15 \text{ GPa}$ ,  $E^{\text{incl}} = 60 \text{ GPa}$ ,  $\nu^{\text{mat}} = \nu^{\text{incl}} = 0.2$ ,  $\rho^{\text{mat}} = \rho^{\text{incl}} = 2500 \text{ kg/m}^3$ . Les propriétés surfaciques retenues pour les interfaces matrice/matrice, inclusions/inclusions et matrice/inclusions sont :  $C_N^{\text{mat}} = C_T^{\text{mat}} = 2 \cdot 10^{14} \text{ Pa/m}$ ,  $C_N^{\text{incl}} = C_T^{\text{incl}} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Pa/m}$ ,  $C_N^{\text{mat/incl}} = C_T^{\text{mat/incl}} = 2 \cdot 10^{14} \text{ Pa/m}$ ,  $w^{\text{mat}} = 20 \text{ J/m}^2$ ,  $w^{\text{incl}} = 40 \text{ J/m}^2$  et  $w^{\text{mat/incl}} = 60 \text{ J/m}^2$ .

Les conditions aux limites appliquées au béton numérique sont les suivantes :

- traction uniforme sur les deux bords haut et bas :  $v = 3 \text{ mm/s}$ ,
- chargement en pré-contrainte représentatif d'un chargement thermomécanique avec un profil de température linéaire ( $300^\circ \text{C}$  sur le bord droit et  $50^\circ \text{C}$  sur le bord gauche).

Une préfissure est présente sur le bord droit et les calculs sont effectués sans frottement et en deux dimensions sous l'hypothèse des déformations planes.

La FIGURE 1 montre le faciès de rupture du béton :

- une fissure principale traverse le milieu en contournant les inclusions, la tortuosité bidimensionnelle de cette fissure est proche de 1.36,

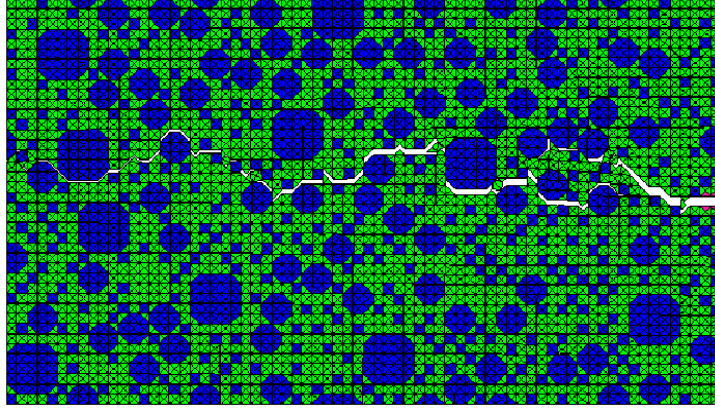


FIGURE 1 – Faciès de rupture du béton numérique.

- la fissure s’est propagée à une vitesse moyenne de  $0.7 v^{\text{Rayleigh}}$  (traitement dynamique des ondes dans la structure) jusqu’à la rupture de la structure.

Cette tortuosité apparente assez classique dans les bétons est directement liée à la microstructure polydispense du milieu ; une quantification précise de cette relation est en cours de réalisation.

## 4.2 Effondrement d’une colonne de grains dans un fluide

Ce second exemple concerne l’effondrement d’une colonne de grains immergée dans un milieu fermé (conditions de non-glissement  $\mathbf{u}_f = 0$  sur toutes les frontières) [10]. L’échantillon est composé de disques de diamètre moyen  $D$  avec une densité  $\rho_s$  donnée par le rapport des densités  $\rho_r = \rho_s/\rho_f$ . Les variables du problème sont adimensionnées par  $l_c = D$  pour les longueurs, par  $u_c = \sqrt{\mathbf{g}D}$  pour les vitesses et par  $t_c = l_c/u_c$  pour le temps. Le domaine est carré de longueur  $100l_c$  contenant 1250 particules monodisperse avec un rapport hauteur/largeur de 2 et une compacité de 0.906. Les interactions suivent une loi de contact de Signorini-Coulomb avec un coefficient de frottement égal à 0.3. La densité relative entre le fluide et les particules est fixée à  $\rho_r = 1.5$  et la viscosité du fluide est  $\eta = 10\eta_c$  avec  $\eta_c = 10^{-3}(\text{Pa.s})$  la viscosité dynamique de l’eau.

La FIGURE 2 représente une séquence d’images issues de la simulation. La colonne s’effondre suivant trois régimes, observés également dans les milieux secs [19] : un régime dit de “chute”, un régime de “glissement” et enfin un régime d’étalement. Ces phénomènes sont étudiés en détails dans l’étude [10]. L’exemple présenté ici permet de mettre en évidence le phénomène de recirculations dans le fluide et notamment la formation de vagues à la surface de l’écoulement granulaire. La phase granulaire semble se comporter comme une deuxième phase fluide [20].

À titre de faisabilité, un calcul similaire a été effectué en 3D. L’échantillon est composé de 60 particules sphériques. La FIGURE 3 représente une séquence d’images issues de la simulation. Bien que le nombre de particules soit petit, les régimes d’effondrements décrits dans la précédente simulation sont observés.

## 5 Conclusion

Ce papier a présenté une stratégie de simulation numérique dédiée aux mécanismes d’interactions complexes entre corps rigides ou déformables en présence de couplages multiphysiques. Deux exemples ont été mis en évidence : la fissuration dynamique de matériaux hétérogènes, depuis l’initiation de fissures jusqu’au comportements post-ruptures, et l’étude du comportement d’écoulements granulaires dans des fluides non compressibles. Les plate-formes numériques associées reposent respectivement sur l’approche Non Smooth Contact Dynamics. La stratégie logicielle est obtenue à l’aide du couplage modulaire de deux bibliothèques principales : PELICANS, dédiée à la résolution par Eléments Finis solides ou fluides, et LMGC90, dédiée à la résolution des problèmes d’interaction entre corps sans régularisation ni pénalisation. Deux exemples d’application de ces outils ont été illustrés par la fissuration dynamique

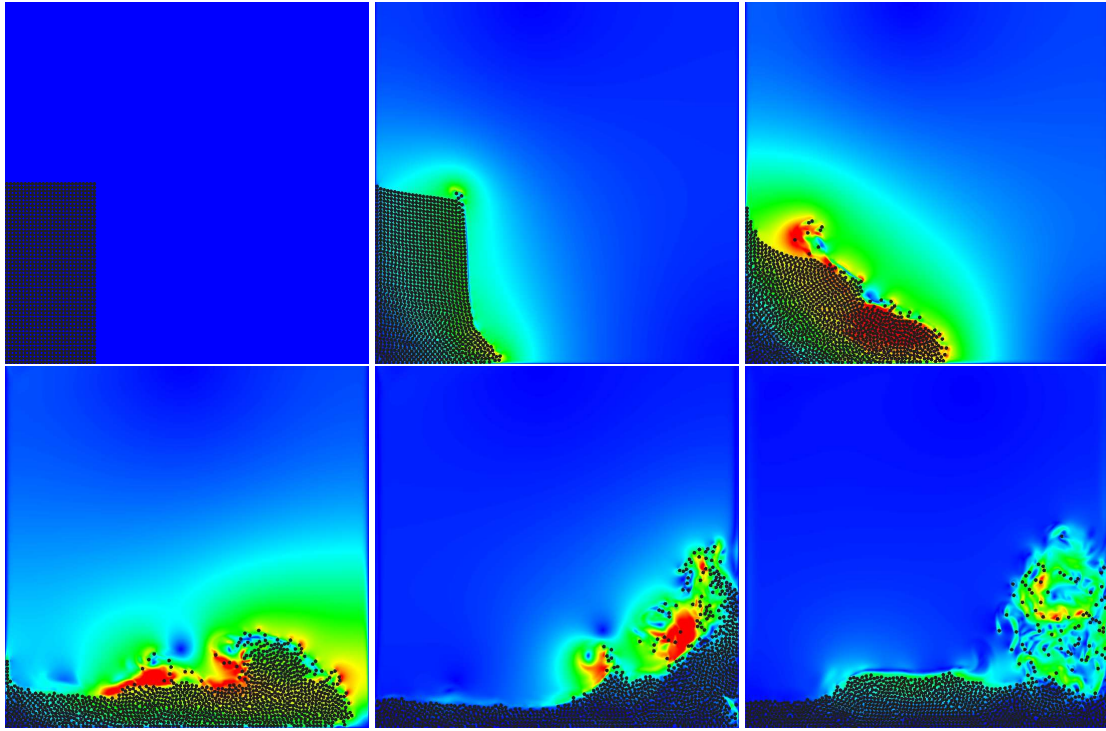


FIGURE 2 – Effondrement d’une colonne de grains mono-disperse dans un fluide. Les vitesses dans le fluide sont représentées en niveau de couleur.

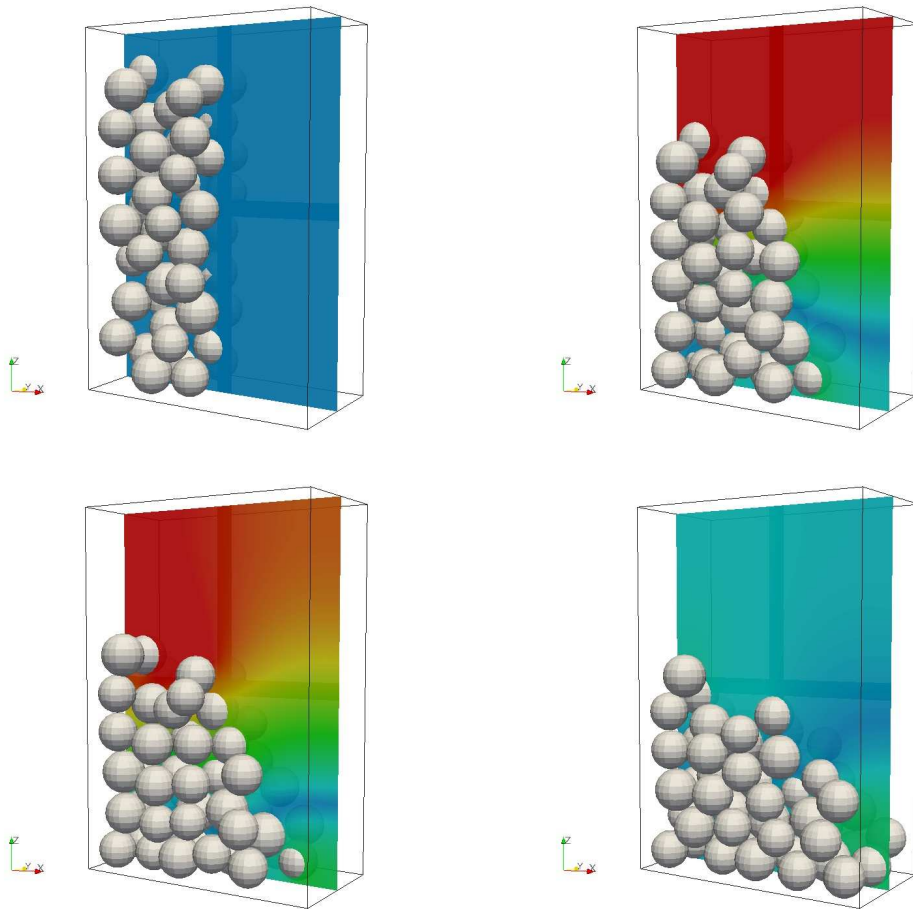


FIGURE 3 – Effondrement 3D d’une colonne de grains mono-disperse dans un fluide.

d'un matériau hétérogène, le béton numérique, et l'effondrement en 2D et 3D d'une colonne de grains dans un fluide en milieu fermé.

## Références

- [1] J.-J. Moreau *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics* Non Smooth Mechanics and Applications, Moreau, J.-J. and Panagiotopoulos, P.D., CISM - Courses and Lectures, Springer, 1-82, 302, 1988.
- [2] M. Jean *The non-smooth contact dynamics method* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 235-257, 177, 1999.x
- [3] F. Dubois and M. Jean. *Une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d'interaction* 6ème colloque national en calcul de structures, Potier-Ferry, M. and Bonnet, M. and Bignonnet, A., 1 :111-118, 2003.
- [4] LMG90. *Web site* : <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~dubois/LMG90/>
- [5] M. Jean. *The non-smooth contact dynamics method* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 :235-257, 1999.
- [6] F. Perales, F. Dubois, Y. Monerie, B. Piar, L. Stainier. *A NonSmooth Contact Dynamics-based multi-domain solver*, European Journal of Computational Mechanics, 19 :389-417, 2010.
- [7] F. Perales, S. Bourgeois, A. Chrysochoos, and Y. Monerie. *Two field multibody method for periodic homogenization in fracture mechanics of nonlinear heterogeneous materials*, Engineering Fracture Mechanics, 75 :3378-3398, 2008.
- [8] A. Wachs. *A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows : Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions*, Computers & Fluids, 38(8) :1608-1628, 2009.
- [9] A. Wachs. *PeliGRIFF, a parallel DEM-DLM/FD direct numerical simulation tool for 3D particulate flows*, in press in to Journal of Engineering Mathematics, available online, DOI 10.1007/s10665-010-9436-2, 2010.
- [10] V. Topin, F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, and A. Wachs. *Micro-rheology of dense particulate flow : application to immersed avalanches*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166 :63-72, 2010.
- [11] PELICANS. *Web site* : <https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans/>
- [12] P. Alart and A. Curnier *A generalized newton method for contact problems with friction* Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, 7 :67-82, 1988.
- [13] Y. Monerie and V. Acary *Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement* Revue Européenne des Elements Finis, 10 :489-503, 2001.
- [14] J.-C. Michel, P. Suquet and F. Thébaud *Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique* Revue Européenne des Elements Finis, 3 :573-595, 1994.
- [15] Y. Monerie, M. Raous, F.H. Leroy, O. Sudre, F. Feyel and J.L. Chaboche *Comparaison de lois d'interface fibre/matrice sur la base d'un modèle uniaxial d'expérience de micro-indentation* Comptes Rendus des Onzièmes Journées Nationales sur les Composites, AMAC, J. Lamon and D. Baptiste ed., 565-574, 1998.
- [16] A. Martin *Écoulement confiné d'un matériau granulaire en interaction avec un gaz : application à la relocalisation du combustible nucléaire*. Thèse de doctorat de Montpellier 2, 2010.
- [17] T. Champelovier and M. Renouf *Modèle multi-physiques par éléments discrets. Applications à la modélisation du troisième corps* CSMA, Giens, 2009.
- [18] B. Chetouane, F. Dubois, M. Vinches, C. Bohatier *NSCD discrete element method for modeling masonry structures* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 64 :65-94, 2005.
- [19] L. Lacaze and R. Kerswell *Axisymmetric granular collapse : a transient 3D flow test of visco-plasticity* Physical Review Letter, 102 :108-305, 2009.
- [20] T. Maxworthy, J. Leilich, J.E. Simpson and E.H. Meiburg *The propagation of a gravity current into a linearly stratified fluid* Journal of Fluid Mechanics, 453 :371-394, 2002.