

Proposition de communication – Thème : Méthodes et techniques de résolution

## Application de la PGD à un problème viscoélastique avec un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation

M. Hammoud<sup>1</sup>, M. Beringhier<sup>1</sup>, J.C. Grandidier<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut P<sup>2</sup>, Département Physique Mécanique des Matériaux, UPR CNRS 3346, ENSMA, Téléport 2, 1 avenue Clément Ader, 86961 Futuroscope, Cedex, France, {mohammad.hammoud, marianne.beringhier, [jean-claude.grandidier](mailto:jean-claude.grandidier@ensma.fr)}@ensma.fr

**Résumé** — La PGD (Proper Generalized Decomposition) a été mise en œuvre dans le cas d'un problème viscoélastique couplé à la thermique [1]. La faisabilité et la robustesse de la PGD vis-à-vis de ce type de problème ont été éprouvées. Dans cet article, on propose de tester la PGD dans le cas d'un problème viscoélastique plus complexe caractérisé par un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation.

**Mots clefs** — PGD, variables internes, temps de relaxation.

Pour déterminer la solution d'un problème avec un grand nombre de degrés de liberté (ddl), des techniques numériques peuvent être utilisées telles que le calcul parallèle ou la décomposition de domaine. Dans le cas d'un problème multiphysique ou d'un problème avec un grand nombre de variables internes, cela revient à résoudre un grand nombre d'équations différentielles.

La méthode PGD, qui s'appuie sur l'approximation radiale [2], a montré son efficacité pour la résolution de problèmes à grand nombre de ddl [3] et en particulier dans le cas d'un problème thermomécanique couplé [1]. L'idée principale de la PGD est de rechercher la solution définie sur l'ensemble du domaine espace-temps sous la forme d'une somme de produits de fonctions de chaque variable, chacune d'elle étant discrétisée sur son propre maillage.

Cet article constitue la suite du travail effectué dans [1]. La PGD est ici appliquée à un problème viscoélastique avec un très grand nombre de variables internes (50 voire 100 [4]) représentant l'état de relaxation du milieu. Ce grand nombre de variables internes nécessite la résolution d'un large système d'équations différentielles non linéaires traduisant le retour à l'équilibre. Notre objectif est de valider la faisabilité et la robustesse de cette méthode numérique vis-à-vis de ce problème complexe. Une application visée est la simulation du comportement de polymères sous chargement cyclique. Dans le cas 1D, la forme générique du problème avec variables internes étudié est la suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = 0 \quad (1)$$

$$\sigma = E_{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{j=1}^n (z_j - z_j^{\infty}) \quad (2)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{1}{\tau_j} (z_j - z_j^{\infty}) \quad (3)$$

où  $z_j^{\infty}$  est une fonction non linéaire de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  représentant l'état relaxé de la variable interne  $z_j$ ,

$\tau_j$  est le temps de relaxation et  $E_{\infty}$  est le module d'Young.

La méthode consiste à exprimer la solution en une combinaison linéaire de fonctions à variables séparées, qui forment une famille que l'on enrichit par itérations successives. Le champ de déplacement et les variables internes sont recherchés sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \sum_i^p A_i(x)B_i(t) \\ z_j(x,t) = \sum_k^p D_{kj}(x)E_{kj}(t) \end{array} \right. \quad (4)$$

où  $p$  est le nombre final de couples de fonctions nécessaire pour décrire  $u$  et  $z_j$  avec une précision donnée.

Dans un premier temps, la même base temporelle est choisie pour  $u$  et  $z_j$ . Ensuite, une base temporelle propre à chaque variable est discutée. Ce choix est d'autant plus judicieux qu'il permet d'optimiser la discrétisation en temps en l'adaptant au temps caractéristique  $\tau_j$  de la variable concernée  $z_j$ . Les deux solutions ont été implémentées et les résultats sont en cours.

Une fois la méthode validée sur un cas simple, le champ de déplacement et les variables internes seront calculés dans le cas d'un chargement cyclique à grand nombre de cycles pour un polymère.

## Références

- [1] M. Béringhier, M. Gueguen, J.C. Grandidier. *Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – Application to thermoviscoelasticity*, Archives of Computational Methods in Engineering, doi: 10.1007/s11831-010-9050-5.
- [2] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999.
- [3] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids - Part II: Transient simulation using space-time separated representations*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 144, 98-121, 2007.
- [4] Ch. Cunat. *A thermodynamic theory of relaxation based on a distribution of non-linear processes*, Journal of Non-Crystalline Solids, Volumes 131-133, Part 1, 11 June 1991, Pages 196-199.