



HAL
open science

Application de la PGD à un problème viscoélastique avec un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation

Mohammad Hammoud, Marianne Béringhier, Jean-Claude Grandidier

► **To cite this version:**

Mohammad Hammoud, Marianne Béringhier, Jean-Claude Grandidier. Application de la PGD à un problème viscoélastique avec un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592813

HAL Id: hal-00592813

<https://hal.science/hal-00592813>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Application de la PGD à un problème viscoélastique avec un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation

M. Hammoud¹, M. Beringhier¹, J.C. Grandidier¹

¹ Institut P², Département Physique Mécanique des Matériaux, UPR CNRS 3346, ENSMA, Téléport 2, 1 avenue Clément Ader, 86961 Futuroscope, Cedex, France, {mohammad.hammoud, marianne.beringhier, jean-claude.grandidier}@ensma.fr

Résumé — La PGD (Proper Generalized Decomposition) a été mise en œuvre dans le cas d'un problème viscoélastique couplé à la thermique [2]. La faisabilité et la robustesse de la PGD vis-à-vis de ce type de problème ont été éprouvées. Dans cet article, on propose de tester la PGD dans le cas d'un problème viscoélastique plus complexe caractérisé par un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation.

Mots clefs — PGD, variables internes, temps de relaxation.

1 Introduction

La résolution d'un problème avec un grand nombre de degrés de liberté (ddl) avec la Méthode des Eléments Finis pose le problème de la gestion de l'allocation mémoire et du temps de calcul. Pour pallier cette difficulté, des techniques numériques telles que le calcul parallèle ou la décomposition de domaine ont été développées. Pour un problème avec un grand nombre de variables internes, cela revient à résoudre un grand nombre d'équations différentielles.

Une méthode alternative, la méthode PGD, qui s'appuie sur l'approximation radiale [5], a montré son efficacité pour la résolution de problèmes à grand nombre de ddl [1,3] et en particulier dans le cas d'un problème thermomécanique couplé [2]. L'idée principale de cette méthode est de rechercher la solution définie sur l'ensemble du domaine espace-temps sous la forme d'une somme de produits de fonctions de chaque variable, chacune d'elle étant discrétisée sur son propre maillage.

Ce papier constitue la suite du travail effectué dans [2] où la PGD était mise en œuvre dans le cas d'un problème thermo-viscoélastique sans variables internes. La PGD est appliquée ici à un problème viscoélastique avec un très grand nombre de variables internes (50 voire 100 [4]) représentant l'état de relaxation du milieu. Ce grand nombre de variables internes nécessite la résolution d'un large système d'équations différentielles non linéaires traduisant le retour à l'équilibre. Notre objectif est de valider la faisabilité et la robustesse de la PGD vis-à-vis de ce type de problème. Une application visée est la simulation du comportement du polymère *PE-HD* sous chargement cyclique.

La section 2 introduit les équations du problème mécanique viscoélastique. Dans la section 3, la PGD est mise en place pour la résolution d'un problème à variables internes. La section 4 illustre les résultats obtenus par la méthode pour une seule variable interne et différents temps caractéristiques. L'outil numérique est ensuite discuté.

2 Résolution d'un problème viscoélastique à variables internes

2.1 Equations du problème

Dans le cadre de notre étude, nous considérons un problème unidimensionnel en espace (noté x). La forme générique du problème viscoélastique avec variables internes étudié est la suivante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = -\frac{1}{\tau_j} (z_j - z_j^\infty) \quad (2)$$

Où

$$\sigma = E_v \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{j=1}^m z_j \quad (3)$$

$$z_j^\infty = E_{ij}^\infty \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

où z_j^∞ représente l'état relaxé de la variable interne z_j , τ_j son temps de relaxation, E_{ij}^∞ son module d'Young relaxé et E_v est le module d'Young vitreux du matériau.

Notons que le module vitreux dépend du module infini E_∞ et du module relaxé E_r par la relation:

$$E_v = E_\infty + \sum_j^m E_{ij}^\infty \quad \text{où} \quad E_r = \sum_j^m E_{ij}^\infty .$$

Le domaine est noté: $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t$, où $\Omega_x = [0, L_x]$ et $\Omega_t = [0, L_t]$. Les conditions initiales sont nulles et les conditions aux bords sont : $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{F}$ sur $\partial\Omega_f$ et $\underline{u} = \underline{0}$ sur $\partial\Omega_u$.

Remarque 1. L'indice j concerne les variables internes et varie de 1 à m si m représente le nombre de variables internes. Si l'on considère un problème avec m variables internes, l'équation (2) est reportée m fois. Pour une variable interne donnée, la spécificité de cette équation est liée au temps de relaxation de la variable interne concernée.

Remarque 2. Le champ de déplacement et les variables internes sont donc couplés.

2.2 Résolution des équations avec la PGD

La méthode PGD consiste à exprimer la solution en une combinaison linéaire de fonctions à variables séparées, qui forment une famille que l'on enrichit par itérations successives. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [3].

Le champ de déplacement et les variables internes sont recherchés sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \sum_i^p A_i(x)B_i(t) \\ z_j(x,t) = \sum_k^p C_{kj}(x)D_{kj}(t) \end{array} \right. \quad (5)$$

Où p est le nombre final de couples de fonctions nécessaire pour décrire u et z_j avec une précision donnée.

A l'itération n , pour enrichir la famille, on cherche des fonctions $R(x)$, $S(t)$, $V_j(x)$ et $W_j(t)$ telles que :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(t) + R(x)S(t), \quad z_j(x,t) = \sum_{i=1}^n C_{ij}(x)D_{ij}(t) + V_j(x)W_j(t) \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f) u^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} (\sigma(l) - F) u^* d\Omega = 0 \quad \forall u^* \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dz_j}{dt} + \frac{1}{\tau_j} (z_j - z_j^\infty) \right) z_j^* d\Omega = 0 \quad \forall z_j^* \quad (8)$$

Ces fonctions sont solution de la formulation variationnelle de Galerkin liées aux équations (1)-(2) et notées équations (7)-(8) avec les champs virtuels suivants :

$$u^*(x,t) = R^*(x)S(t) + R(x)S^*(t), \quad z_j^*(x,t) = V_j^*(x)W_j(t) + V_j(x)W_j^*(t) \quad (9)$$

2.3 Spécificités liées au problème étudié

Le champ de déplacement et les variables internes sont dépendants les uns des autres. Nous avons choisi de résoudre alternativement ces deux champs ((7) puis (8)) à chaque étape d'enrichissement, ce qui revient à les considérer découplés. Le processus est initialisé avec la solution d'un problème élastique sans variables internes. Une fois le champ de déplacement calculé (7), la solution est introduite dans l'équation (4) pour ensuite calculer la variable interne avec (8). La variable interne est ensuite injectée dans la loi de comportement (3) afin de calculer la solution en déplacement du problème viscoélastique. Le processus est itéré jusqu'à convergence.

Pour une étape d'enrichissement, la méthode de point fixe à directions alternées est utilisée pour le calcul de $R(x)$ et $S(t)$ ainsi qu'après pour le calcul de $V_j(x)$ et $W_j(t)$. Les équations à résoudre pour calculer ces différentes fonctions sont les suivantes :

Calcul de $R(x)$

$$E_v \beta_t \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = -E_v \sum_{i=1}^n \alpha_t^i \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_t^j \frac{\partial C_{ij}}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \delta_t^j \frac{\partial V_j}{\partial x} - \theta_t \quad (10)$$

Calcul de $S(t)$

$$E_v \beta_x S(t) = -E_v \sum_{i=1}^n \alpha_x^i B_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_x^j D_{ij}(t) + \sum_{j=1}^m \delta_x^j W_j(t) - \theta_x \quad (11)$$

Calcul de $V_j(x)$

$$\left(\gamma_{ij}^j + \frac{1}{\tau_j} \theta_t^j \right) V_j = - \sum_{i=1}^n \beta_t^i C_{ij} - \frac{1}{\tau_j} \sum_{i=1}^n \delta_{ij}^j C_{ij} + \frac{B}{\sqrt{\tau_j}} \sum_{i=1}^n \beta_{ij}^i \frac{\partial A_i}{\partial x} + \frac{B}{\sqrt{\tau_j}} \frac{\partial R}{\partial x} \Gamma_t^i \quad (12)$$

Calcul de $W_j(t)$

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} \gamma_{xj}^j + \frac{1}{\tau_j} W_j \gamma_{xj}^j = - \sum_{i=1}^n \beta_{xj}^i \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{\tau_j} \sum_{i=1}^n \beta_{xj}^i D_{ij} + \frac{B}{\sqrt{\tau_j}} \sum_{i=1}^n \alpha_{xj}^i B_i + \frac{B}{\sqrt{\tau_j}} S \delta_{xj}^i \quad (13)$$

$$\text{Où : } \beta_t = \int_{\Omega_t} S^2(t) dt, \quad \alpha_t^i = \int_{\Omega_t} B_i(t) S(t) dt, \quad \gamma_t^j = \int_{\Omega_t} D_{ij}(t) S(t) dt, \quad \delta_t^j = \int_{\Omega_t} W_j(t) S(t) dt,$$

$$\theta_t = \int_{\Omega_t} (\sigma(l) - F) S(t) dt.$$

$$\beta_x = \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial^2 R(x)}{\partial^2 x} dx, \alpha_x^i = \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial^2 A_i(x)}{\partial^2 x} dx, \gamma_x^j = \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial C_{ij}(x)}{\partial x} dx, \delta_x^j = \int_{\Omega_x} R(x) \frac{\partial V_j(x)}{\partial x} dx,$$

$$\theta_x = \int_{\Omega_x} (\sigma(l) - F) R(x) dx.$$

$$\theta_t^j = \int_{\Omega_t} W_j^2(t) dt, \beta_t^j = \int_{\Omega_t} \frac{\partial D_{ij}(t)}{\partial x} W_j(t) dt, \delta_{ij}^j = \int_{\Omega_t} D_{ij}(t) W_j(t) dt, \alpha_{ij}^i = \int_{\Omega_t} B_i(t) W_j(t) dt,$$

$$\Gamma_t^j = \int_{\Omega_t} S(t) W_j(t) dt, \gamma_{ij}^j = \int_{\Omega_t} \frac{\partial W_j(t)}{\partial x} W_j(t) dt.$$

$$\gamma_{xj}^j = \int_{\Omega_x} V_j^2(x) dx, \beta_{xj}^j = \int_{\Omega_x} C_{ij}(x) V_j(x) dx, \alpha_{xj}^i = \int_{\Omega_x} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x} V_j(x) dx, \delta_{xj}^i = \int_{\Omega_x} \frac{\partial R(x)}{\partial x} V_j(x) dx.$$

Après chaque itération l , deux résidus sont calculés donnés, équations (14) et (15) et relatifs à u et z_j respectivement. La procédure itérative est stoppée lorsque ces résidus atteignent un certain seuil ε suffisamment petit.

$$R_u = \frac{\|(u_{l+1} - u_l)\|}{\|u_l\|} \leq \varepsilon \quad (14)$$

$$R_{z_j} = \max \left(\frac{\|(z_{j,l+1} - z_{j,l})\|}{\|z_{j,l}\|} \right) \leq \varepsilon \quad (15)$$

Où $\| \cdot \|$ représente la norme L^2 . u_l et $z_{j,l}$ représentent le déplacement et la variable interne j obtenus après l itérations (soit $p=l$ dans (5)).

3 Application à la résolution d'un problème avec une seule variable interne

Considérons l'exemple d'une poutre unidimensionnelle de longueur $L = 5$ mm encadrée à l'une de ses extrémités. Cette poutre est soumise à une charge uniformément répartie en espace d'intensité 15 N.mm^{-1} et une force concentrée à son extrémité qui traduit le fluage comme représenté Figure 1. Les paramètres matériau utilisés pour la simulation sont donnés dans le tableau 1.

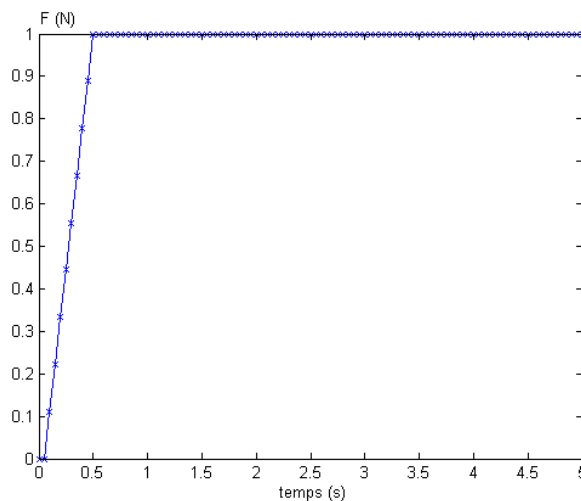


Figure 1 : Fluage à l'extrémité de la poutre

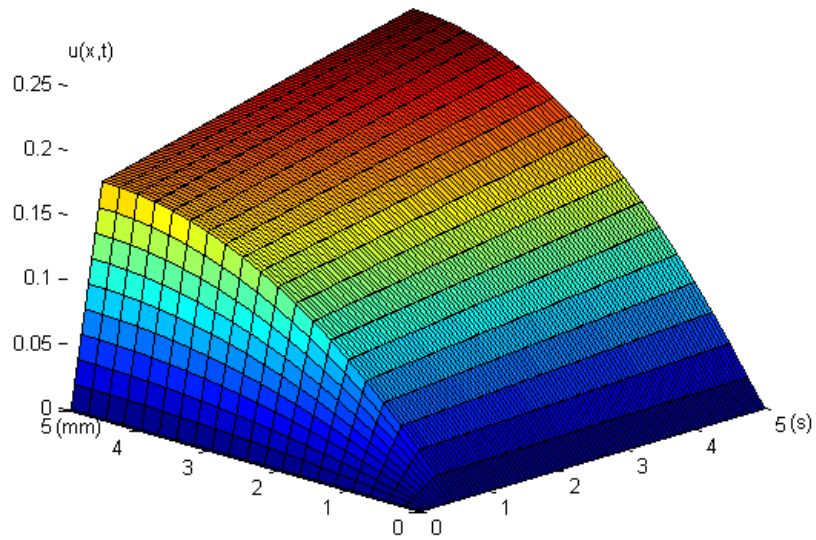
E_v (MPa)	E_∞ (MPa)
1140	140

Tableau 1 : Propriétés matériau

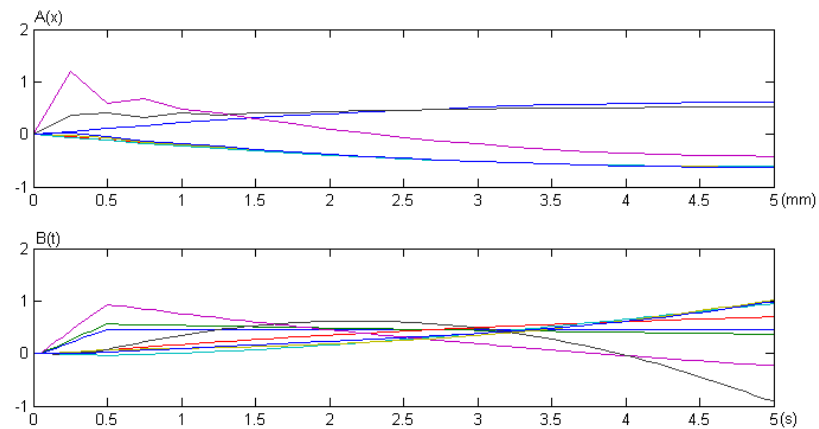
Le domaine temporel est pris égal à 5s. Pour la simulation avec la PGD, un maillage régulier de 11 points est utilisé ce qui revient à un pas de d'espace de 0,5 mm et un pas de temps de 0,05 s.

Nous considérons ici une seule variable interne et étudions l'influence de cette variable interne sur le champ de déplacement pour différents temps de relaxation.

Pour τ égal à 10s, la solution est obtenue avec la PGD en 8 itérations avec $(\|A_i\| \times \|B_i\|) = (1491.36 - 866.70 - 320.22 - 94.16 - 21.36 - 3.97 - 0.47 - 0.14)$ pour le champ de déplacement et $(\|C_i\| \times \|D_i\|) = (1874.91 - 1570.26 - 339.84 - 77.12 - 13.72 - 7.76 - 2.69 - 0.92)$ pour la variable interne. La Figure 2a représente le champ de déplacement obtenu. Les modes spatiaux et temporels du champ de déplacement sont représentés sur la Figure 2b. La Figure 3 illustre la convergence de la solution en représentant les deux résidus (équations (14) et (15)) en fonction des itérations.



a)



b)

Figure 2 : (a) Champ de déplacement et (b) les modes spatiaux $A(x)$ et temporels $B(t)$ (Eq (5))

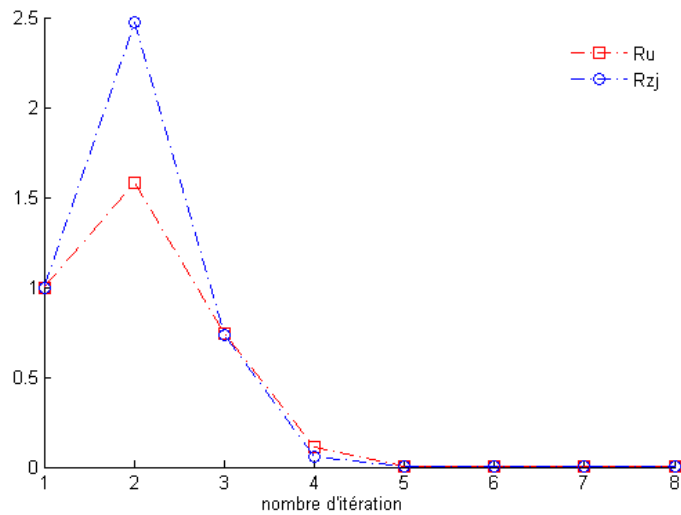


Figure 3 : Convergence de la PGD

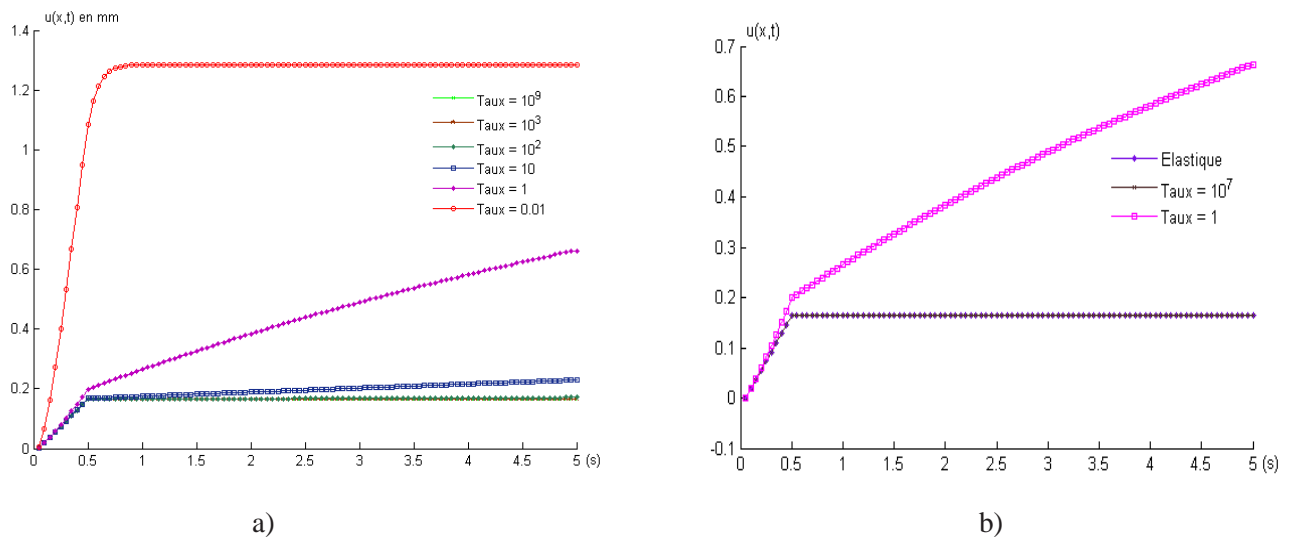


Figure 4 : Influence du temps de relaxation sur le champ de déplacement (a) et comparaison avec la solution élastique (b).

La même simulation a été reproduite pour différentes valeurs de τ . Selon la valeur de ce paramètre, la solution n'a pas été obtenue avec le même nombre de modes, celui-ci augmentant lorsque τ diminue.

La figure 4a montre l'influence du temps de relaxation sur le champ de déplacement. Nous remarquons que plus le temps de relaxation diminue, plus l'influence de la variable interne sur le déplacement est importante. La Figure 4b met en évidence le fait que lorsque le temps de relaxation est très grand, la solution tend vers la solution d'un problème élastique pure. Ceci explique le fait que moins de modes sont nécessaires pour traduire notre champ de déplacement lorsque le temps de relaxation augmente.

4 Conclusion

La méthode PGD a été validée dans le cas d'un problème à variables internes. La méthode a été discutée dans le cas d'un problème viscoélastique avec une variable interne. Ce problème a été résolu pour différents temps de relaxation et nous avons vu que le nombre de modes nécessaires pour décrire notre champ de déplacement dépend du temps de relaxation considéré.

La résolution du problème « découplée » (d'abord le champ de déplacement puis après la variable interne) a été validée.

Ces premiers résultats sont encourageants et vont être étendus dans le cas avec plusieurs variables internes et par suite plusieurs temps de relaxation afin de simuler le comportement du polymère *PE-HD* sous chargement cyclique. Dans un premier temps, la même base temporelle sera choisie pour u et z_j . Ensuite, une base temporelle propre à chaque variable fera l'objet de notre travail futur.

5 Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids - Part II: Transient simulation using space-time separated representations*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 144, 98-121, 2007.
- [2] M. Béringhier, M. Gueguen, J.C. Grandidier. *Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – Application to thermoviscoelasticity*, Archives of Computational Methods in Engineering, doi: 10.1007/s11831-010-9050-5.
- [3] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto. *Proper generalized decomposition of multiscale models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 83, 1114-1132, 2010.
- [4] Ch. Cunat. *A thermodynamic theory of relaxation based on a distribution of non-linear processes*, Journal of Non-Crystalline Solids, Volumes 131-133, Part 1, 11 June 1991, Pages 196-199.
- [5] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999.