

Technique de maillage adaptatif pour la résolution de l'équation de la chaleur 2D avec la PGD (Proper Generalized Decomposition)

Tuan Linh Nguyen - Marianne Beringhier - Jean-Claude Grandidier
Institut P' - Département Physique et Mécanique des Matériaux – ENSMA
Téléport 2 – 1 av. Clément Ader – BP 40109 – F – 86961 Futuroscope Cédex

Mots clés : PGD, Représentations séparées, AMR.

Le traitement de problèmes multiphysiques nécessite la résolution d'un grand nombre d'équations couplées et de natures différentes (équations de transport, de dynamique, d'évolution chimique). Numériquement, les principales difficultés sont la gestion de l'allocation mémoire ou encore du temps de calcul. Pour un problème dont la solution présente localement de forts gradients, l'utilisation de grilles régulières mène à des temps de calcul trop élevés. Afin d'y remédier, des techniques de raffinement local du maillage ont été introduites [1], [2], [3].

Dans ce papier, une technique de maillage adaptatif de type AMR adaptée à la résolution d'un problème transitoire avec la méthode PGD est présentée. Cette technique est discutée pour l'équation de la chaleur 2D. La méthode PGD [4], qui s'appuie sur l'approximation radiale [5], a montré son efficacité pour réduire le temps de calcul notamment pour la résolution de problèmes multiphysiques [6]. L'idée principale de cette méthode est de rechercher la solution comme une somme de produits de fonctions de chaque variable, chacune d'elle étant discrétisée sur son propre maillage. Comme dans le cas de la méthode des éléments finis, la qualité de la solution dépend du maillage choisi pour chaque variable. L'objectif de ce papier est de proposer une technique de maillage adaptatif qui permet de trouver le maillage optimal afin de capturer de manière automatique les zones de fortes variations de la solution de l'équation de la chaleur 2D lorsque celle-ci est recherchée avec la PGD.

L'équation de la chaleur 2D étudiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 20(\sin(x)\sin(y)\cos(t)e^{-2t} + \sin(2x)\sin(2y)\cos(t)e^{-8t}) \quad (1)$$

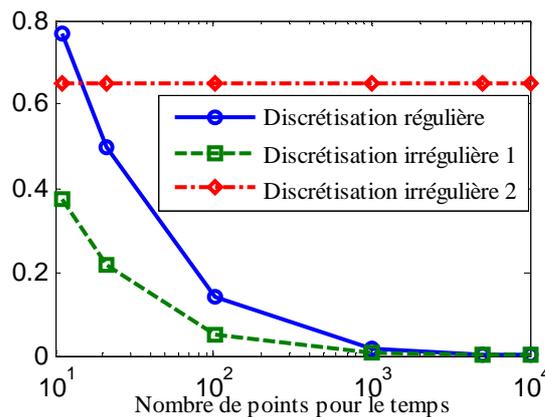


FIG. 1 - Evolution de l'erreur relative en fonction du nombre de points

La Figure 1 représente l'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de points en temps pour trois maillages temporels différents mais contenant le même nombre de points. La discrétisation irrégulière 1 contient les 9/10 de ces points dans la zone transitoire de la solution, la discrétisation irrégulière 2 contient 5 points uniquement dans la zone transitoire quel que soit le nombre total de points. Cette figure illustre le lien entre le gradient (dans la

partie transitoire) et le choix du maillage, mettant en évidence la nécessité d'avoir plus de points dans les zones transitoires afin d'obtenir une meilleure solution avec un même nombre de points et par suite un même temps de calcul.

L'objectif de la technique de maillage adaptatif proposée ici est de rechercher un critère ou indicateur permettant de savoir dans quelles zones il est nécessaire de raffiner le maillage et répondant aux exigences suivantes : déterminer les zones transitoires sans les connaître a priori et minimiser le nombre de points dans le maillage pour une précision donnée de la solution.

Le critère proposé ici (noté AVM) est basé sur la variation du gradient de la fonction recherchée, indépendamment selon chaque variable x , y ou t . Des points sont ajoutés aux endroits où la variation du gradient dépasse un certain seuil. Le procédé de maillage adaptatif est illustré sur la Figure 2. Pour la fonction testée, 11 étapes de maillage adaptatif ont été nécessaires pour satisfaire le critère. On peut noter dans l'étape 4 qu'une forte variation localisée a été détectée automatiquement.

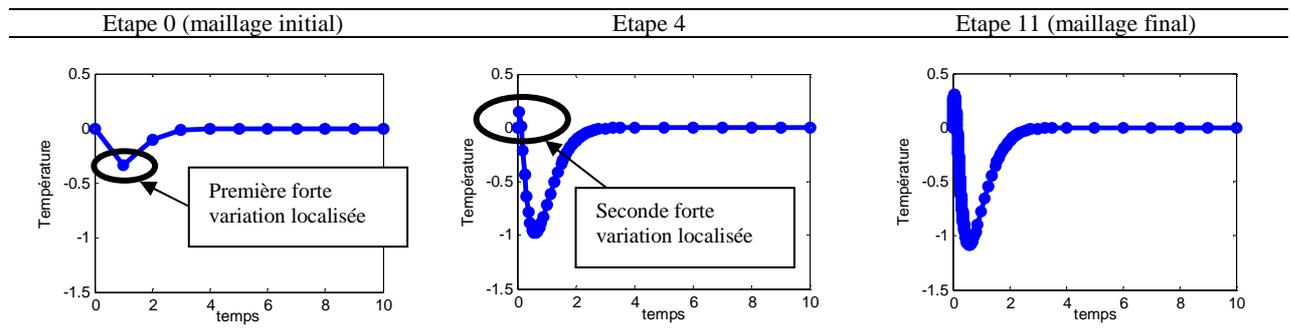


FIG. 2 - Evolution de la température en fonction du temps pour un point donné en espace.

Différentes méthodes pour ajouter et/ou enlever des points ont été testées et une méthode optimale a été mise en évidence. Le critère a été discuté pour différents maillages initiaux et différents seuils, et a permis de déterminer les zones transitoires dans le cas de l'équation de la chaleur 2D tout en optimisant le nombre de points utilisés pour le maillage temporel. Présenté ici pour la variable t , ce critère peut être étendu facilement à chaque variable. L'extension de ce critère à des problèmes couplés avec différents temps caractéristiques est envisageable et constitue la suite de notre travail.

Bibliographie :

- [1] A. Brandt. *Multi-level adaptive solutions to boundary value problems*, Mathematics of Computation 31, 333–390, 1977.
- [2] M.J. Berger, J. Olinger. *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, Journal of Computational Physics 53, 484-512, 1984.
- [3] O. V. Vasilyev, S. Paoluccia, M. Sen. *A Multilevel Wavelet Collocation Method for the Solution for solving Partial Differential Equations in a finite domain*, Journal of Computational Physics 120,33–47, 1995.
- [4] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids - Part II: Transient simulation using space-time separated representations*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 144 , 98-121,2007.
- [5] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999.
- [6] M. Beringhier, M. Gueguen, J.C. Grandidier. *Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – Application to thermoviscoelasticity*, Archives of Computational Methods in Engineering, doi:10.1007/s11831-010-9050-5.