

Technique de maillage adaptatif pour la résolution de l'équation de la chaleur 2D avec la PGD (Proper Generalized Decomposition)

T.L. Nguyen¹, M. Béringhier¹ et J.C. Grandidier¹

¹ Institut P² - Département Physique et Mécanique des Matériaux - ENSMA, France, {tuan-linh.nguyen,marianne.beringhier,jean-claude.grandidier}@ensma.fr

Résumé — Dans ce papier, une technique de maillage adaptatif adaptée à la résolution d'un problème transitoire avec la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) est présentée. Le problème étudié ici est l'équation de la chaleur 2D. En utilisant un critère simple basé sur la variation du gradient de la fonction recherchée, l'objectif de cette technique est de trouver le maillage optimal afin de capturer de manière automatique les zones de fortes variations de la solution lorsque celle-ci est recherchée avec la PGD.

Mots clefs — PGD; Représentations séparées; Maillage adaptatif

1 Introduction

Le traitement de problèmes multiphysiques nécessite la résolution d'un grand nombre d'équations couplées et de natures différentes (équations de transport, de dynamique, d'évolution chimique). Numériquement, les principales difficultés sont la gestion de l'allocation mémoire ou encore du temps de calcul. La résolution de tels problèmes avec la Méthode des Eléments Finis (MEF) classique i.e. le même problème pour chaque physique et un schéma incrémental en temps, mène à la résolution de systèmes numériques de taille croissante.

Pour pallier cette difficulté, des méthodes non linéaires non incrémentales ont été développées. La méthode non incrémentale la plus utilisée est la Méthode Eléments Finis espace-temps qui permet l'utilisation de solveurs espace-temps parallèles [6]. Une autre méthode, la méthode LATIN (Large Time INcrement method), est aussi très efficace pour la résolution de ce type de problèmes [7]. Elle utilise un solveur non linéaire, qui à chaque itération génère une approximation sur tout le domaine temporel. Elle a été étendue aux problèmes multiphysiques [9]. Un des ingrédients les plus importants de la méthode LATIN est l'approximation radiale, qui consiste à écrire une représentation séparée espace-temps des champs inconnus. Basée sur l'approximation radiale, une autre méthode alternative, la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition), a été développée [8]. L'idée principale de cette méthode est de rechercher la solution comme une somme de produits de fonction de chaque variable. Elle a montré son efficacité pour la résolution de problèmes avec un grand nombre de degrés de liberté [1] mais aussi dans le cas de problèmes multiphysiques dans le sens où le maillage peut être facilement adapté à chaque physique [3]. Il est proposé dans ce papier d'utiliser cette méthode pour résoudre notre problème.

Dans les problèmes couplés où interviennent des phénomènes physiques avec des temps caractéristiques fortement différents, l'utilisation d'une même grille temporelle pour chaque physique mène à des temps de calcul prohibitifs. Pour y remédier, différentes techniques ont été proposées. Certaines d'entre elles consistent à utiliser des schémas numériques multi-temps dans différents sous-domaines ou différentes physiques qu'il faut ensuite faire communiquer entre elles aux interfaces [5, 9]. Il peut être intéressant d'optimiser le maillage de chacune des physiques pour pouvoir capter les phénomènes transitoires. Ce point a été largement traité dans le cas où la solution représente localement de forts gradients (singularités, chocs, discontinuités) et des techniques de raffinement local du maillage ont été introduites [2, 4, 10]. Ces techniques n'ont pas été discutées dans le cadre de la résolution de problème avec la méthode PGD.

L'objectif de ce papier est de proposer une technique de maillage adaptatif adaptée à la résolution d'un problème transitoire avec la méthode PGD. En utilisant un critère simple basé sur la variation du gradient de la température en fonction du temps, cette technique doit permettre de trouver

le maillage optimal afin de capturer de manière automatique les zones de fortes variations de la solution de l'équation de la chaleur 2D lorsque celle-ci est recherchée avec la PGD. De plus, comme la solution est recherchée avec la PGD, i.e. en séparant chaque variable (d'espace et de temps), le même critère pourra être utilisé pour l'espace.

La section 2 introduit l'équation de la chaleur 2D ainsi que le formalisme général de la méthode et illustre l'intérêt du maillage adaptatif pour la résolution de ce type de problème. Dans la section 3, un indicateur pour le raffinement de maillage est proposé et validé. Dans la section 4, la technique est discutée et des améliorations sont proposées.

2 Présentation de la méthode PGD pour la résolution de l'équation de la chaleur 2D

2.1 Résolution de l'équation de la chaleur 2D

L'équation de la chaleur 2D étudiée s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = 20(\sin(x)\sin(y)\cos(t)e^{-2t} + \sin(2x)\sin(2y)\cos(t)e^{-8t}) \quad (1)$$

où la température T est une fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps, i.e. $T=T(x,y,t)$. Le domaine est $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_t =]-\pi, +\pi[\times]0, 10]$ et on considère des conditions aux bords et initiales nulles.

La méthode PGD consiste à exprimer la solution comme une combinaison linéaire de fonctions à variables séparées, qui forment une famille que l'on enrichit par itérations successives, les coefficients de la combinaison étant ajustés successivement. Nous présentons ici uniquement les notations que nous utiliserons par la suite. Pour plus de détails sur la méthode, le lecteur pourra se référer à [1].

La solution est recherchée sous la forme :

$$T(x, y, t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j F_j(x) G_j(y) H_j(t) \quad (2)$$

où n est le nombre final de triplets de fonctions requis pour décrire T avec une précision donnée.

Le résidu relatif RRe lié à l'Eq. (1) est défini par :

$$RRe = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} ((C\partial T / \partial t) - \lambda_i \Delta T - f(x, y, t))^2 d\Omega}}{\|f\|_2} \quad (3)$$

où $\| \cdot \|_2$ représente la norme L^2 . La procédure itérative d'enrichissement est stoppée lorsque ce résidu est suffisamment petit.

La solution exacte de l'Eq. (1) est :

$$T_{ex} = 20(\sin(x)\sin(y)\sin(t)e^{-2t} + \sin(2x)\sin(2y)\sin(t)e^{-8t}) \quad (4)$$

2.2 Illustration de l'intérêt du maillage adaptatif

Nous choisissons ici un maillage spatial régulier fixé en x et y de 101 points afin d'étudier uniquement l'influence de la discrétisation temporelle. La Figure 1 représente l'évolution de l'erreur relative en fonction du nombre de points en temps pour trois maillages temporels différents mais

contenant le même nombre de points. La discrétisation irrégulière 1 contient les 9/10 de ces points dans la zone transitoire de la solution ($t \in [0,3]$ pour l'exemple étudié), la discrétisation irrégulière 2 contient 5 points uniquement dans la zone transitoire quel que soit le nombre total de points. Cette figure illustre le lien entre le gradient (dans la partie transitoire) et le choix du maillage, mettant en évidence la nécessité d'avoir plus de points dans les zones transitoires afin d'obtenir une solution plus précise pour un même nombre de points et par suite un même temps de calcul.

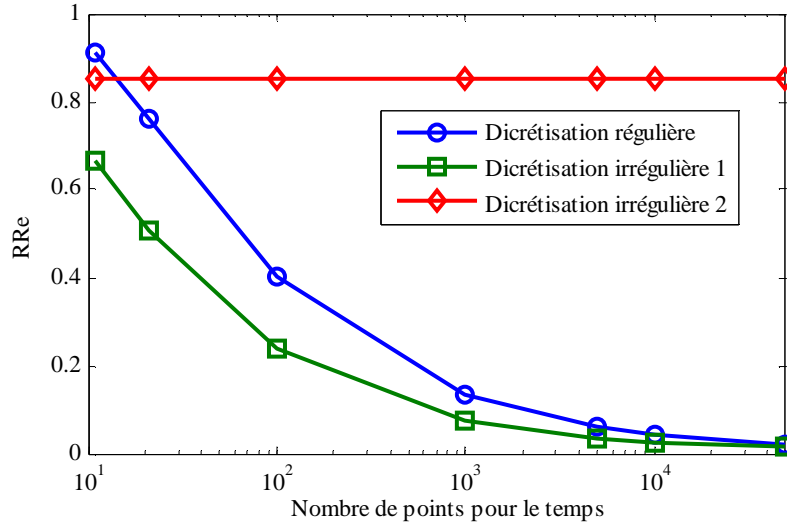


FIG. 1 - Evolution du résidu relatif (Eq. 3)

3 Présentation de la technique de maillage adaptatif

La technique de maillage adaptatif a pour objectif de proposer un indicateur permettant de savoir dans quelles zones il est nécessaire de raffiner le maillage et répondant aux exigences suivantes : déterminer les zones transitoires sans les connaître a priori et minimiser le nombre de points dans le maillage pour une précision donnée de la solution.

3.1 L'indicateur AVM

L'indicateur proposé ici est basé sur la variation du gradient de la fonction recherchée, indépendamment selon chaque variable x , y ou t et appliquée ici uniquement à la variable t . Pour chaque point k de la variable t , la variation du gradient notée AV est définie comme suit :

$$AV_t^k(x, y) = \left| \arctan \frac{T(x, y, t^k) - T(x, y, t^{k-1})}{t^k - t^{k-1}} - \arctan \frac{T(x, y, t^{k+1}) - T(x, y, t^k)}{t^{k+1} - t^k} \right| \quad (5)$$

Notons que c est une fonction de x et y .

En considérant tous les points de l'espace, la valeur maximale d' AV est calculée pour chaque point t^k :

$$AVM_t^k = \max \left(AV_t^k(x_l, y_m), (x_l, y_m) \in (\Omega_x, \Omega_y) \right) \quad (6)$$

afin d'obtenir un indicateur qui ne dépend que de la variable t noté AVM . Une fois AVM calculé, des points en temps sont ajoutés (deux points : un à droite et un à gauche) aux endroits où AVM dépasse un certain seuil ε_t . La procédure est illustrée Figure 2 pour $\varepsilon_t = 5^\circ$. Dans ce cas, 11 étapes de maillage adaptatif ont été nécessaires pour satisfaire le critère. On peut noter dans l'étape 4 qu'une forte

variation localisée a été détectée automatiquement. La solution exacte (Eq. 4) possède deux zones transitoires qui ont bien été captées par cet indicateur alors qu’avec le maillage initial (contenant seulement 11 points) seule une zone avait été repérée. La Figure 3 illustre la convergence de la solution au cours des étapes de maillage adaptatif. On peut noter une forte décroissance de l’étape 0 à l’étape 4.

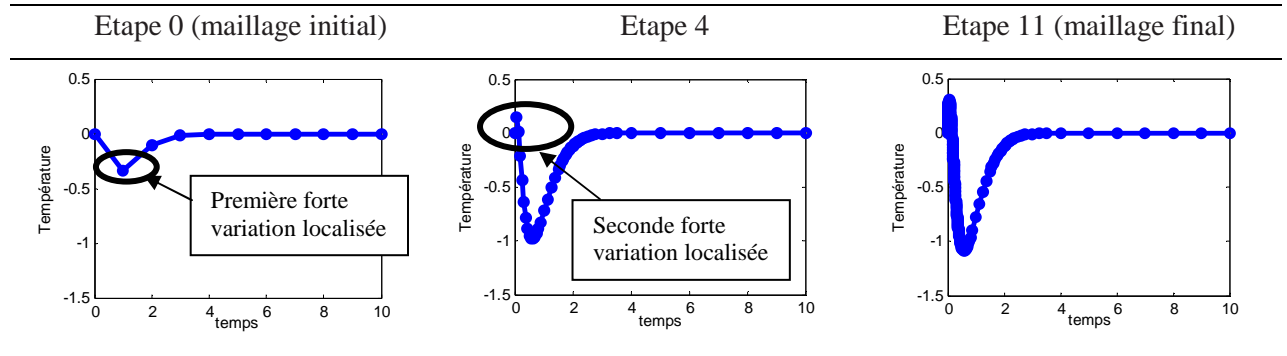


FIG. 2 - Evolution de la température en fonction du temps pour un point donné en espace.

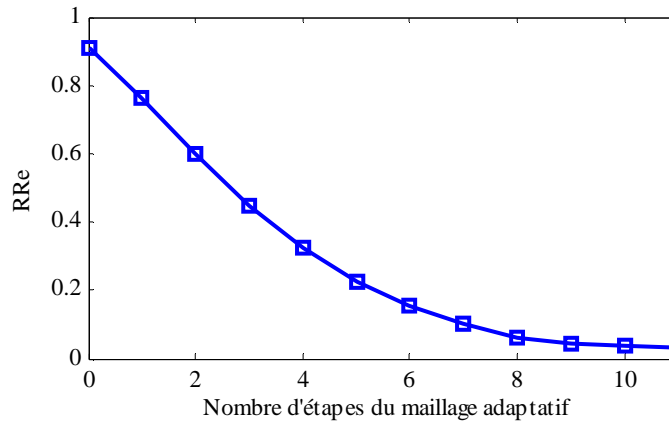


FIG. 3 - Evolution du RRe (Eq. 3)

Remarque. Après chaque étape du maillage adaptatif, la solution est entièrement recalculée sur le nouveau maillage avec la PGD. L’utilisation des modes précédents (de l’ancien maillage) pour recalculer les nouveaux modes (sur le nouveau maillage) n’a pas montré d’intérêt dans le cas de l’exemple traité. A chaque étape de maillage, la solution est obtenue avec seulement deux modes (Eq. 2 avec $n=2$).

3.2 L’indicateur AVH

Pour l’indicateur précédent, la recherche de la valeur AVM maximale à chaque point du temps consiste à balayer tous les points de l’espace et constitue un point faible en terme de temps de calcul de cet indicateur. Pour pallier cette faiblesse et tirer profit de la méthode PGD, l’indicateur AVH est proposé. La méthode PGD consiste à rechercher la fonction sous la forme donnée Eq. 2 où les modes temporels sont $H_j(t)$, $j=1,n$. Le nouvel indicateur AVH est basé non pas sur l’évolution de la température mais sur celle des modes temporels. La procédure précédente est modifiée comme suit. A partir du seuil pour l’évolution de T , on définit un seuil équivalent noté $\varepsilon_{t_{eq}}$ et calculé à partir du premier enrichissement ($n=1$ dans l’Eq. 2) comme suit :

$$\varepsilon_{t_eq} = \arctan \left(\frac{\tan(\varepsilon_t)}{|\alpha_1^{(1)}| \times \max|F_1(x)| \times \max|G_1(y)|} \right) = \arctan \left(\frac{\tan(\varepsilon_t)}{\max|\gamma_1^{(1)}|} \right) \quad (7)$$

Une fois la solution de T obtenue, les autres modes sont normalisés par rapport à $H_1(t)$:

$$H_j^*(t) = \frac{\max|\gamma_j^{(n)}|}{\max|\gamma_1^{(n)}|} H_j(t), j = 2, n \quad (8)$$

Ce procédé permet lui aussi de capter la solution et les deux zones transitoires après cette fois-ci 10 étapes de raffinement pour une même simulation avec un ε_{t_eq} correspondant à $\varepsilon_t = 5^\circ$. La réduction du temps de calcul par rapport au premier indicateur AVM est d'autant plus marquée que la discrétisation spatiale est fine. Considérons par exemple une simulation avec $1001 \times 1001 \times 101$ points pour x , y et t respectivement, le calcul d' AVH pour une étape de maillage nécessite un temps de calcul de seulement 0,5s par rapport à 70s pour AVM .

4 Discussion

Les indicateurs proposés ont été validés et ont montré leur capacité à capter les zones transitoires à partir d'un maillage grossier en rajoutant des points selon la valeur de l'indicateur par rapport à une valeur seuil. L'indicateur AVH est celui que nous utiliserons dans la suite de cette discussion dans la mesure où il permet de réduire le temps de calcul par rapport à l'indicateur AVM . La sensibilité de l'indicateur est discutée selon le maillage initial, la valeur du seuil, mais aussi le nombre de points ajoutés à chaque étape de maillage adaptatif.

L'indicateur que nous avons présenté consiste à ajouter des points dans le maillage selon une certaine valeur seuil. Si l'on souhaite diminuer le temps de calcul des simulations, il n'est pas nécessaire d'avoir des maillages fins dans les zones de régime permanent de la solution or cette situation peut se produire si le maillage initial est trop fin. Un procédé de déraffinement du maillage basée sur le même indicateur est proposé. Il consiste à enlever les points où AVH est inférieur à un certain seuil. Le Tableau 1 montre les résultats obtenus dans le cas où le seuil de déraffinement est égal à $0,5^\circ$. Le maillage final obtenu présente moins de points pour une même précision de la solution. Nous remarquons que cette étape de déraffinement est plus utile lorsque le maillage initial est plus dense.

TAB. 1 – Comparaison entre les cas avec (a) ou sans (b) déraffinement

	51 points (a)	51 points (b)	201 points (a)	201 points (b)
Nombre d'étapes de raffinement	8	8	6	6
Nombre final de points pour le temps	270	302	277	415
RRe	0,065	0,065	0,070	0,070

La précision et le nombre final de points en temps dépendent de la valeur du seuil choisi pour

l'indicateur. Le Tableau 2 montre des résultats obtenus avec trois valeurs différentes de ε_t (seule la procédure de raffinement est utilisée ici). La valeur du résidu relatif (RRe) qui traduit la précision de la solution diminue lorsque ε_t diminue. Pourtant, le nombre de points a augmenté. Ainsi, le ε_t choisi ne doit pas être trop faible. Cela mène à la nécessité d'avoir un lien entre le RRe obtenu et ε_t . On peut donc se fixer au départ de la simulation une valeur de RRe et de ε_t et ensuite diminuer la valeur de ε_t afin d'approcher au mieux la précision souhaitée.

TAB. 2 – Comparaison pour différentes valeurs du seuil

	$\varepsilon_t = 1^\circ$	$\varepsilon_t = 5^\circ$	$\varepsilon_t = 15^\circ$
Nombre d'étapes de raffinement	12	10	8
Nombre final de points pour le temps	1238	263	74
RRe	0,033	0,068	0,129

Dans les premiers résultats que nous avons montré, nous avons ajouté un point à droite et un point à gauche du point pour lequel la valeur du critère n'était pas satisfaite. Nous allons discuter ici différentes façons d'ajouter des points. Pour cela, notons RN le rapport entre la valeur de AVH et ε_{t_eq} :

$$RN = \frac{|AVH|}{\varepsilon_{t_eq}} \quad (9)$$

Lorsque nous sommes très loin du seuil (RN plus grand), cela signifie que le gradient est plus important et il est donc nécessaire d'ajouter plus de points à ces endroits là. Néanmoins, comme nous ne voulons pas que le nombre de points dans le maillage « explose », nous proposons les limitations suivantes :

- Si RN n'est pas supérieur à 1, aucun point ne sera ajouté.
- Le nombre maximal de points à ajouter est inférieur à N_{max} .

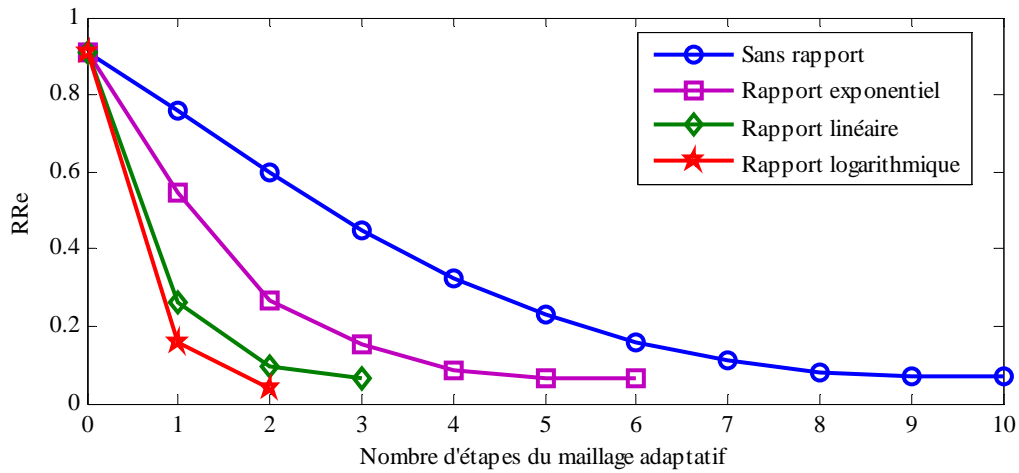
La Figure 4 (a) illustre l'évolution du résidu relatif RRe par rapport au nombre d'étapes de maillage et la Figure 4 (b) celle du nombre de points pour 4 cas différents (pour tous ces cas, N_{max} est égal à 100) notés :

- « sans rapport » qui correspond au cas précédent où on ajoute un point à droite et un point à gauche,

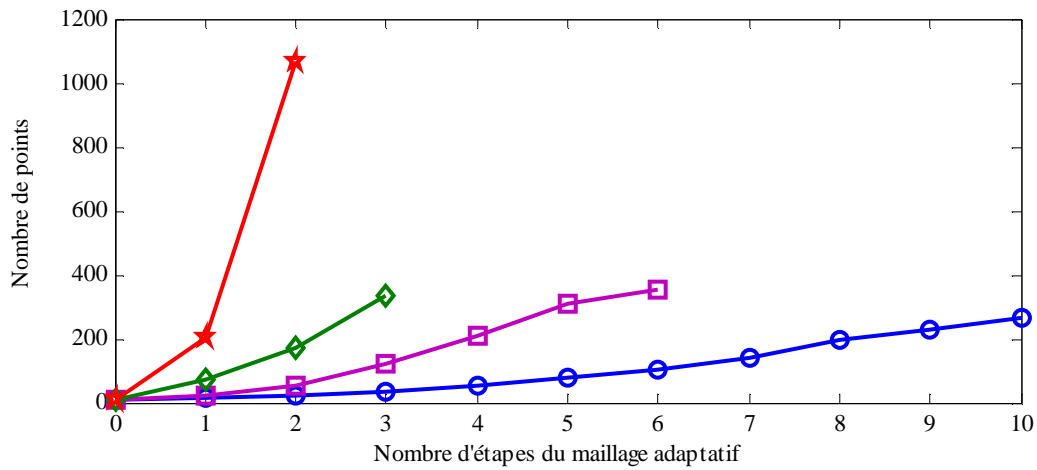
- « rapport exponentiel », « rapport linéaire » ou « rapport logarithmique » entre RN et le nombre de points ajoutés.

Lorsque l'on ajoute des points avec « rapport », le RRe diminue plus rapidement et le nombre d'étapes de maillage est largement réduit (2 étapes pour un « rapport logarithmique » par rapport à 10 étapes pour un « sans rapport »). Néanmoins, le nombre de points ajoutés est très élevé.

Pour les différents cas étudiés, le « rapport linéaire » semble être le plus adapté puisqu'il limite le nombre d'étapes de maillage tout en gardant un nombre de points raisonnables.



(a)



(b)

FIG. 4 – L'évolution du RRe (a) et du nombre de points pour le temps (b) au cours des étapes de maillage adaptatif.

5 Conclusion

Une technique de maillage adaptatif pour la résolution de problèmes transitoires avec la méthode PGD a été proposée. Celle-ci a été testée pour l'équation de la chaleur 2D dans le cas où la solution cherchée présente deux zones transitoires. Avec un maillage grossier, la méthode PGD ne permettait de localiser qu'une seule zone transitoire. Deux indicateurs basés sur la variation du gradient de la fonction recherchée ont été proposés et ont permis de capter les gradients dans le domaine transitoire en raffinant le maillage uniquement dans certaines zones. Le deuxième indicateur, utilisant les propriétés des solutions calculées avec la PGD, est une amélioration du premier dans le sens où le temps de calcul est réduit.

Différentes méthodes pour améliorer la technique du maillage adaptatif ont été discutées comme par exemple le déraffinement, la sensibilité de la méthode suivant le seuil de l'indicateur ainsi que la façon d'ajouter des points en fonction des valeurs prises par le critère. Dans tous les cas, les résultats obtenus sont prometteurs. Présenté ici pour la variable t , ce critère peut être étendu facilement aux autres variables. L'extension de ce critère à des problèmes couplés avec différents temps caractéristiques est envisageable et constitue la suite de notre travail.

Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids - Part II: Transient simulation using space-time separated representations*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 144, 98-121, 2007.
- [2] M.J. Berger, J. Olinger. *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, Journal of Computational Physics 53, 484-512, 1984.
- [3] M. Béringhier, M. Gueguen, J.C. Grandidier. *Solution of strongly coupled multiphysics problems using space-time separated representations – Application to thermoviscoelasticity*, Archives of Computational Methods in Engineering 17, 393-401, 2010.
- [4] A. Brandt. *Multi-level adaptive solutions to boundary value problems*, Mathematics of Computation 31, 333-390, 1977.
- [5] A. Combescure, A. Gravouil, B. Herry. *An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains*, Computers and Structures 81, 1211-1222, 2003.
- [6] A. Idesman, R. Niekamp, E. Stein. *Continuous and discontinuous Galerkin methods with finite elements in space and time for parallel computing of viscoelastic deformation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190, 1049-1063, 2000.
- [7] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and non-incremental methods of calculation*, Springer Verlag, 1999.
- [8] P. Ladevèze, J.C. Passieux, D. Néron. *The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199, 1287-1296, 2010.
- [9] D. Néron, D. Dureisseix. *A computational strategy for thermo-poroelastic structures with a time-space interface coupling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 75, 1053-1084, 2008.
- [10] O. V. Vasilyev, S. Paoluccia, M. Sen. *A Multilevel Wavelet Collocation Method for the Solution for solving Partial Differential Equations in a finite domain*, Journal of Computational Physics 120,33-47, 1995.