

## Étude de la multifissuration e délamination par l'approche variationnelle à la mécanique de la fracture

A. A. León Baldelli<sup>c,d</sup>, B. Bourdin<sup>b</sup>, J.-J. Marigo<sup>a</sup>, C. Maurini<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

<sup>b</sup> Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA

<sup>c</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC Univ Paris 06 (UMR 7190), 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

<sup>d</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS (UMR 7190), 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

**Résumé** — On étudie la fissuration et délamination de couches minces par l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture. La disposition des fissures et des zones délaménées est obtenue suivant un principe de minimisation. Les résultats analytiques en 1D, ainsi que ceux numériques obtenus par approximation avec des modèles d'endommagement permettent de retrouver les evidences experimentales de périodicité des fissures et symétrie des domaines de délamination.

**Mots clés** — approche variationnelle, modèles d'endommagement, optimisation, microfissuration, régularisation

La présence de systèmes multicouche est désormais vaste dans les applications technologiquement avancées. Dans ces systèmes la différence des paramètres matériaux des couches, les procédés d'assemblage et les conditions de chargement induisent des fortes contraintes à la fois à l'intérieur des couches et en correspondance des interfaces. Ceci provoque souvent les phénomènes typiques de délamination et fissuration des plis qui s'avèrent variés et complexes. En étendant [1] et [2], on utilise une formulation énergétique globale dans le cadre de l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture, qui permet de reconstruire la complexité des phénomènes observés expérimentalement sans ajouter aucune hypothèse phénoménologique *a priori* sur la caractérisation des fissures.

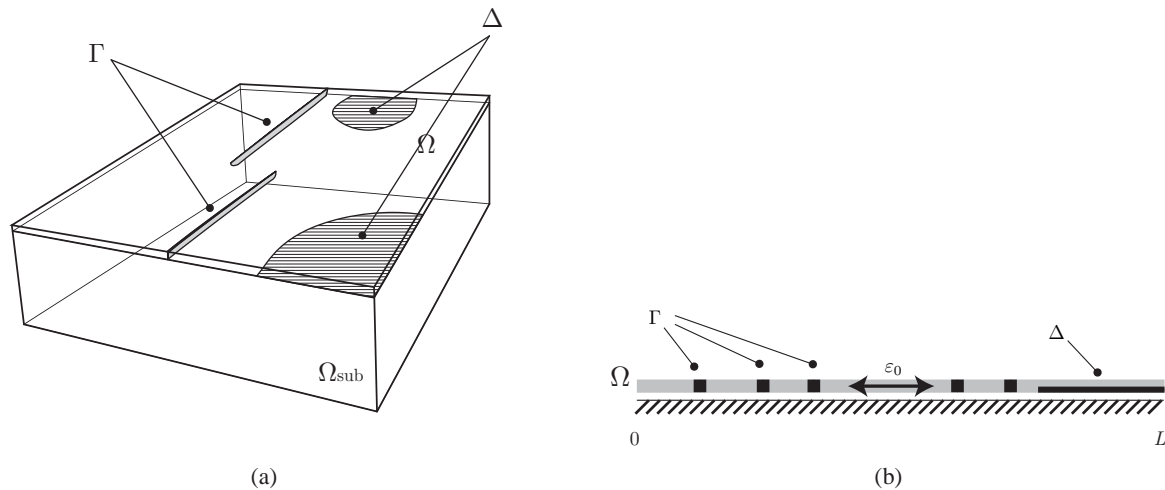


FIGURE 1 – Modèle 2D et 1D équivalent, les fissures et les zones de délamination sont notées  $\Gamma$  et  $\Delta$ , respectivement.

Le géométrie du système 3D est schématisée en Figure 1.a. Une couche mince  $\Omega$  est collée sur un support  $\Omega_{sub}$ . Notre étude se base sur un modèle 2D équivalent, voir [3], où la couche mince est assimilé à une membrane et le substrat modélisé par une rigidité une *rigidité équivalente*, ce qui correspond à la forme suivante de l'énergie élastique :

$$P(\underline{u}, \Gamma, \Delta) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\varepsilon}}_0) \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\varepsilon}}_0) d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Delta} \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} (\underline{u} - \underline{u}_0) \cdot (\underline{u} - \underline{u}_0) d\Omega$$

où  $\underline{\underline{A}}$  désigne le tenseur de rigidité,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur gradient de déplacement symétrisé,  $\underline{u}$  le vecteur déplacement et  $\underline{K}$  la rigidité équivalente du substrat. Les fractures peuvent apparaître à l'intérieur de la couche et en correspondance de l'interface. L'ensemble des points de discontinuité du champ déplacement est noté  $\Gamma$  alors que le domaine de délamination de la couche est nommé  $\Delta$ . Les paramètres de chargement du système sont une déformation inélastique imposée  $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$  et le champ déplacement imposé  $u_0$ .

En adoptant un modèle de rupture de type Griffith, l'énergie nécessaire pour créer les fissures est supposée être sur la forme :

$$S(\Gamma, \Delta) = G_{c2D} \text{longueur}(\Gamma) + G_{d2D} \text{aire}(\Delta)$$

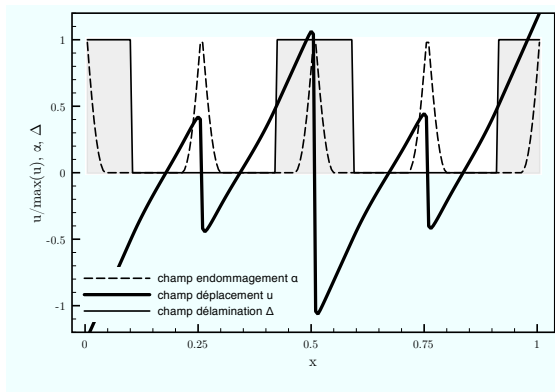
où  $G_{c2D}$  et  $G_{d2D}$  sont les ténacités à la fissuration transverse et à la délamination dans le modèle 2D.

L'évolution quasi-statique du système soumis au chargement, répond à un critère de minimisation de l'énergie globale  $E(u, \Gamma, \Delta) = P(u, \Gamma, \Delta) + S(\Gamma, \Delta)$  : pour niveau de charge  $(\underline{\underline{\varepsilon}}_0, u_0)$  au cours du processus de chargement, l'état de fissuration ( $\Gamma$ ) et de délamination ( $\Delta$ ) est celui qui minimise l'énergie globale, pour tout champ  $u, \Gamma, \Delta$  admissible. Une notion d'irréversibilité permet d'empêcher la refermeture des fissures.

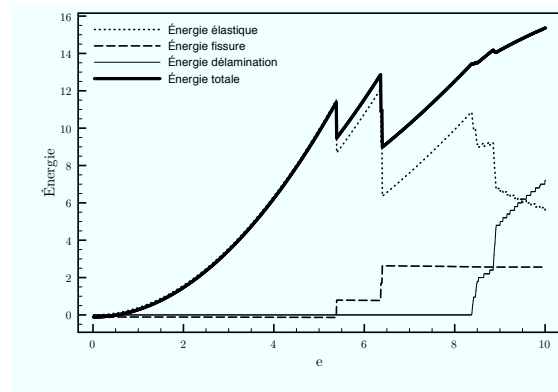
On trouve analytiquement pour le cas 1D (Figure 1.b) les lois d'évolution des fissures  $\Gamma$  et des domaines de délamination  $\Delta$  ainsi que le champ déplacement  $u$  qui réalisent l'optimum pour un niveau de charge  $\varepsilon_0, u_0$  donnée. En particulier on montre que :

- la distribution optimale des fissures est périodique
- la délamination est symétrique et commence aux bords de la couche

La résolution numérique du problème passe par l'approximation de la fonctionnelle de fracture  $E(u, \Gamma, \Delta)$  par une fonctionnelle régularisée [4] d'endommagement  $E_\ell(u, \alpha, \Delta)$  où  $\alpha \in [0, 1]$  représente le champ d'endommagement et le paramètre  $\ell$  est interprété comme une *longueur interne*. La solution numérique du problème d'endommagement est en accord avec les résultats analytiques, notamment elle reproduit les caractéristiques de périodicité des fissures, de symétrie de la délamination (Figure 2.a), du nombre des fissures et de la dimension du domaine délaminé, pour une charge donnée.



(a) Champ déplacement  $u$ , endommagement  $\alpha$  et délamination  $\Delta$ . L'endommagement se localise en correspondance des fissures.



(b) Evolutions des énergies totale, élastique, de fissure et de délamination suite à un charge croissante.

FIGURE 2 – Résultats numériques du problème approché par un modèle d'endommagement

## Références

- [1] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J-J. Marigo. The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, 2007.
- [2] G. A. Francfort and J-J. Marigo. Revisiting Brittle Fracture as an Energy Minimization Problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :1319–1342, 1998.
- [3] Z. C. Xia and J. W. Hutchinson. Crack patterns in thin films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1107–1131, 2000.
- [4] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via  $\Gamma$ -convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8) :999–1036, December 1990.