



**HAL**  
open science

# Étude de la multifissuration e délamination par l'approche variationnelle à la mécanique de la fracture

Andrés Alessandro León Baldelli, Blaise Bourdin, Jean-Jacques Marigo,  
Corrado Maurini

► **To cite this version:**

Andrés Alessandro León Baldelli, Blaise Bourdin, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini. Étude de la multifissuration e délamination par l'approche variationnelle à la mécanique de la fracture. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. ; Clé USB. hal-00592809

**HAL Id: hal-00592809**

**<https://hal.science/hal-00592809v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude de la multifissuration e délamination par l'approche variationnelle à la mécanique de la fracture

A. A. León Baldelli<sup>c,d</sup>, B. Bourdin<sup>b</sup>, J-J. Marigo<sup>a</sup>, C. Maurini<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex

<sup>b</sup> Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803, USA

<sup>c</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC Univ Paris 06 (UMR 7190), 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

<sup>d</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS (UMR 7190), 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

**Résumé** — Cette article traite de la fissuration transverse et délamination de couches minces par l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture. La disposition des fissures et des zones délaminées est obtenue suivant un principe de minimisation. Les résultats analytiques en 1D, ainsi que ceux numériques obtenus par approximation avec des modèles d'endommagement permettent de retrouver les evidences expérimentales de périodicité des fissures et symétrie des domaines de délamination.

**Mots clés** — approche variationnelle, modèles d'endommagement, optimisation, microfissuration, régularisation

## 1 Introduction

La présence de systèmes multicouche est désormais largement répandu dans les applications technologiquement avancées. Dans ces systèmes la différence des paramètres matériaux des couches, les procédés d'assemblage et les conditions de chargement induisent des fortes contraintes à la fois à l'intérieur des couches et au niveau des interfaces. Ceci provoque souvent les phénomènes typiques de délamination —où fracture d'interface— et fissuration —où fracture transverse— des plis qui s'avèrent variés et complexes. En étendant [1] et [2], on utilise une formulation énergétique globale dans le cadre de l'approche variationnelle à la mécanique de la rupture, qui permet de reconstruire la complexité des phénomènes observés expérimentalement sans ajouter aucune hypothèse *a priori* sur la géométrie des fissures.

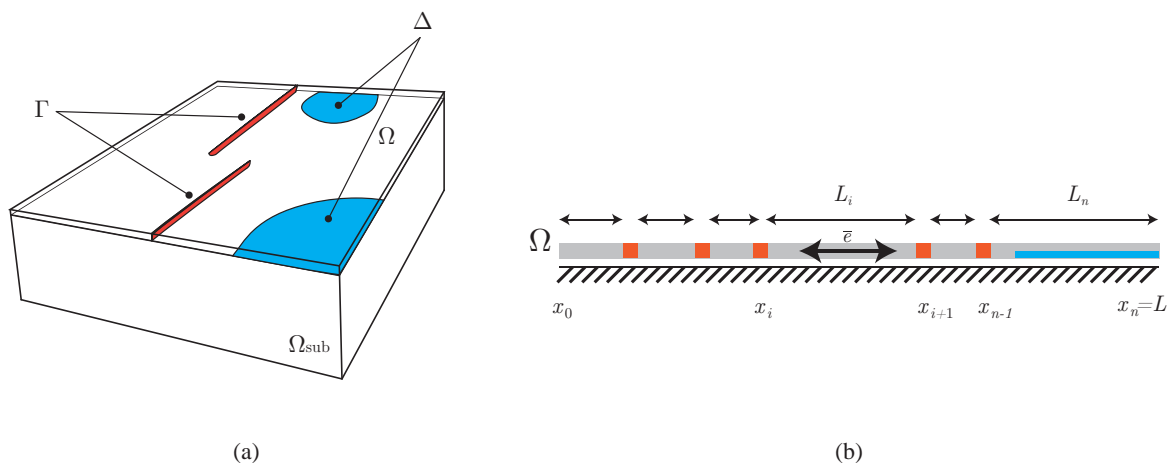


FIGURE 1 – Modèle 3D (a) et 1D (b) équivalent, les fissures et les zones de délamination sont notées  $\Gamma$  et  $\Delta$ , respectivement.

La géométrie du système 3D est schématisée en Figure 1.a. Une couche mince  $\Omega$  est collée sur un support  $\Omega_{sub}$ . Notre étude se base sur un modèle 2D équivalent, voir [3], où la couche mince est assimilée à une membrane et le substrat modélisé par une rigidité équivalente, qui correspond à la forme suivante

de l'énergie élastique :

$$\hat{P}(\underline{u}, \Gamma, \Delta) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} (\underline{e}(\underline{u}) - \underline{\bar{e}}) \cdot (\underline{e}(\underline{u}) - \underline{\bar{e}}) d\Omega + \int_{\Omega \setminus \Delta} \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) \cdot (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) d\Omega \quad (1)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  désigne le tenseur de rigidité,  $\underline{e}$  le tenseur gradient de déplacement symétrisé,  $\underline{u}$  le vecteur déplacement et  $\underline{\underline{K}}$  la rigidité équivalente du substrat. Les fractures peuvent apparaître à l'intérieur de la couche et au niveau de l'interface. L'ensemble des points de discontinuité du champ déplacement est noté  $\Gamma$ , alors que le domaine de délamination de la couche est nommé  $\Delta$ . Les paramètres de chargement du système sont une déformation inélastique imposée  $\underline{\bar{e}}$  et un champ déplacement imposé  $\underline{\bar{u}}$ .

En adoptant un modèle de rupture de type Griffith, l'énergie nécessaire pour créer les fissures est supposée être de la forme :

$$\hat{S}(\Gamma, \Delta) = G_{c2D} h \text{longueur}(\Gamma) + G_{d2D} \text{aire}(\Delta)$$

où  $G_{c2D}$  et  $G_{d2D}$  sont les ténacités à la fissuration transverse et à la délamination dans le modèle 2D, et  $h$  l'épaisseur du film.

L'évolution quasi-statique du système soumis au chargement, répond à un critère de minimisation de l'énergie globale  $\hat{E}(u, \Gamma, \Delta) = \hat{P}(u, \Gamma, \Delta) + \hat{S}(\Gamma, \Delta)$  : pour un niveau de charge  $(\underline{\bar{e}}, \underline{\bar{u}})$  au cours du processus de chargement, l'état de fissuration ( $\Gamma$ ) et de délamination ( $\Delta$ ) est celui qui minimise l'énergie globale, pour tout champ  $u, \Gamma, \Delta$  admissibles. Une notion d'irréversibilité permet d'empêcher la refermeture des fissures.

On pose le problème en temps discret. Après discrétisation du temps en  $N$  intervalles équidistribués, i.e.  $t \rightarrow t_j, j = 0 \dots N, t_{j+1} - t_j = 1/N$ , l'évolution quasi-statique du système se formalise à l'instant  $t_j$  comme suit :

$$\begin{cases} \text{au temps } t_{j+1} \\ \text{trouver } (u_{j+1}, \Gamma_{j+1}, \Delta_{j+1}), \quad \text{t. q. :} \\ \min \hat{E}(u, \Gamma, \Delta) \\ \text{avec } u \in \mathcal{U}_{adj}(\Gamma_j, \Delta_j), \Gamma_{j+1} \supseteq \Gamma_j, \Delta_{j+1} \supseteq \Delta_j \end{cases} \quad (3)$$

Où  $\mathcal{U}_{adj}(\Gamma_j, \Delta_j)$  est l'espace des déplacements admissibles au temps  $t_j$ , qui dépend des fissures et de la délamination présentes, et  $\Gamma \supseteq \Gamma_j, \Delta \supseteq \Delta_j$  traduisent les conditions d'irréversibilité.

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2 on résout analytiquement le problème dans le cas 1D. Pour une valeur de charge donnée on trouve le nombre de fissures présent, leur position, la taille du domaine de délamination et son emplacement. Pour une charge monotone croissante, on introduit un plan d'état qui décrit complètement l'évolution quasi-statique du système. Dans la section 3 on résout numériquement le problème à l'aide d'une approximation de l'énergie par une fonctionnelle régularisée en les comparant avec les résultats analytiques.

## 2 Résultats analytiques

Le système 1D est celui présenté en Figure 1 (b). Une barre occupant le domain  $\Omega = [0, L]$  est collée sur un substrat élastique. Les deux paramètres de charge sont une déformation inélastique et un déplacement imposés. Suite au processus de chargement, fractures transverses et zones de délamination peuvent apparaître comme illustre la Figure 1 (b). Dans cette dernière,  $n$  fissures transverses séparent  $n - 1$  morceaux de barre occupants les  $n - 1$  domaines  $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1 \dots n, x_0 = 0, x_n = L$ , chacun de longueur  $L_i, i = 1 \dots n$ . La zone de délamination occupe le domain  $\Delta$  et sa longueur est  $\text{meas}(\Delta)$ . On note  $u(x) : x \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le déplacement de la barre,  $\Gamma$  l'ensemble des fissures,  $\bar{e}$  la déformation imposée et  $\bar{u}$  le déplacement imposé sur le substrat. Dans le cas 1D,  $\text{meas}(\Gamma)$  se réduit au nombre des fissures  $n - 1$ , et  $\text{meas}(\Delta)$  est donnée par  $\int_{\Omega} \chi_{\Delta} dx$ , où  $\chi_{\Delta}$  indique la fonction caractéristique du domain  $\Delta$ . Dans le cas 1D l'énergie (1) peut être mise sous forme adimensionnée dans le domain  $\Omega = [0, L = 1]$  comme suit :

$$E(u, n, \{L_1, \dots, L_n\}, \chi_{\Delta}) = \sum_{i=1}^n P(u, L_i, \chi_{\Delta}) + \gamma \int_{\Omega} \chi_{\Delta} dx + (n - 1) \quad (4)$$

où  $P(u, L_i, \chi_{\Delta}) = \int_0^{L_i} \frac{1}{2} (e(u) - \bar{e})^2 + \frac{\beta^2}{2} (u - \bar{u})^2 dx$ . Les deux paramètres adimensionnés qui apparaissent sont le rapport entre la raideur du film et celle du substrat  $\beta = kL^2/E$ , et le rapport entre les

tenacités de délamination et de fracture transverse  $\gamma = G_{d1D}/LG_{c1D}$  où  $E$  est le module de Young du film,  $k$  la raideur équivalente du substrat et  $G_{c1D}$  et  $G_{d1D}$  les ténacités de fracture et de délamination, considérées uniformes dans cet étude.  $G_{c1D}$  est identifié avec  $G_{c2D}h$ , où  $h$  est l'épaisseur du film, donc  $G_{c1D}$  et  $G_{d1D}$  ont les dimensions d'une énergie par unité de ligne et de surface —respectivement.

On peut vérifier que la fonctionnelle d'énergie (4) est convexe par rapport à chacune de ses variables indépendamment, ce qui donne l'unicité de la solution par rapport à chacune des variables —les autres étant fixées. On exploite cette caractéristique pour résoudre le problème :

$$\min_{u, n, \{L_i\}, \chi_\Delta} E(u, n, \{L_i\}, \chi_\Delta) \quad (5)$$

avec la démarche suivante :

**Solution élastique :**  $\{\Delta = 0, n = 1, \{L_i\} = 1\}$  fixés, on minimise par rapport à  $u$  pour trouver la solution élastique  $u^*(x)$

**Distribution des fissures sans délamination :** à  $\{\Delta, n, u^*\}$  fixés, on minimise par rapport aux  $\{L_i\}$  pour trouver la position optimale des fissures  $\{L_i^*\}$ , sous la contrainte  $\sum_i L_i = 1$

**Nombre de fissures :** on se donne une histoire de chargement et on cherche le minimiseur en  $n$ , ce qui donne le nombre des fissures présentes à une charge donnée.

**Délamination** on fixe  $\{n = 1\}$  et on résout le problème de minimisation en  $\chi_\Delta$  qui fournit le domaine de délamination

Le problème de fracture transverse et de délamination est ainsi résolu.

## 2.1 Solution élastique

On fixe  $\Delta = 0, n = 1$ . La solution du problème  $\min_{u \in \mathbb{H}^1(\Omega)} E(u, 1, L, 0)$  fournit le déplacement élastique pour le film sain :

$$u^*(x) = \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{H}^1(\Omega)} E(u, 1, L, 0) = \frac{\bar{e} \sinh(\beta(x - L/2))}{\beta \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right)} + \bar{u}$$

avec lequel on calcule l'énergie élastique associée :

$$P(u^*, 1, 0) = \min_{u \in \mathbb{H}^1(\Omega)} E(u, 1, L, 0) = \bar{e}^2 \left( \frac{L}{2} - \frac{\tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{2\beta} \right)$$

## 2.2 Distribution des fissures

On s'intéresse à l'emplacement des fissures optimal au sens du minimum de l'énergie, pour un nombre de fissures donné  $n^*$ . En fixant  $\Delta = 0$  la distribution optimale des fissures est celle qui résout :

$$\min_{\sum_{i=1}^n L_i = 1} P(u^*, \{L_i\}, 0)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation en  $n$  variables sous contrainte linéaire. L'énergie potentielle  $P(\cdot, \{L_i\}, \cdot)$  est convexe par rapport aux  $\{L_i\}$ ,  $i = 1 \dots n$ , ce qui donne l'unicité du minimum. De plus, on impose la contrainte  $\sum_{i=1}^n L_i = 1$  ce qui implique que le minimum est le même pour tout  $L_i$  :

$$L_i = \operatorname{argmin}_{\sum_{i=1}^n L_i = 1} P(u^*, \{L_i\}, 0) = L/n^*$$

En autres termes les fissures sont equidistribuées. L'énergie totale du système ne dépend que du nombre de fissures, *i.e.*

$$E = E(n) = nP(1/n) + n - 1$$

### 2.3 Nombre de fissures pour une charge donnée

L'état du système en termes de nombre de fissures est donnée par la solution de :

$$\min_{n \in \mathbb{N}} E(n) \quad (6)$$

La famille des courbes  $E(n)$  paramétrée par  $n \in \mathbb{N}$  est montrée en Figure 2 avec les traits pointillés gris, vis à vis de la charge imposée  $\bar{e}$ . Une fois qu'une fissure est créée, l'irréversibilité couplée à l'équidistribution des fissures, empêche, suite au chargement, que une seule fissure se produise, évoluant ainsi sur la branche  $E(n = 2)$ . Deux fissures doivent apparaître pour que l'équidistribution soit satisfaite, et ainsi de suite. Cela pose une contrainte sur l'ensemble des  $n$  admissibles, notée  $\mathcal{N}_{ad}$  qui doit avoir la forme  $\mathcal{N}_{ad} = \{2^k, k \in \mathbb{N}\}$ . Les courbes  $E(n), n \in \mathcal{N}_{ad}$  sont montrées en trait bleu. En trait épais rouge on montre le minimiseur pour  $n \in \mathcal{N}_{ad}$ , qui donne —pour une charge  $\bar{e}$  fixée— le nombre de fissures du système.

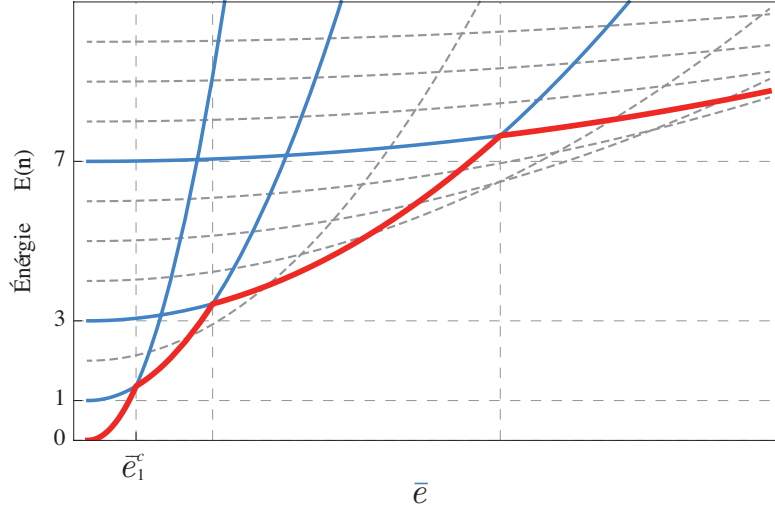


FIGURE 2 – Famille des courbes d'énergie  $E(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (gris),  $n \in \mathcal{N}_{ad}$  (bleu), minimum d'énergie (rouge)

Le premier seuil critique de fissuration, noté  $\bar{e}_1^c$  sur la Figure 2 vérifie  $E(1) = E(2)$ . On trouve l'expression analytique de  $\bar{e}_1^c$  = dépendent du paramètre  $\beta$ .

D'après la condition d'irréversibilité et l'équidistribution des fissures, suite à une histoire de chargement croissant  $\bar{e} \nearrow t$ , l'évolution du système est un processus *auto-similaire*. À une échelle près, le sous-problème pour chaque morceau de film fracturé est le même du film initialement sain. On peut alors construire un plan d'état  $(\bar{e}, L_i/L)$  qui montre l'évolution complète d'une film de longueur initiale  $L_1 = L$  soumis à un chargement monotone croissant. Le plan d'état est montré en Figure 3, la courbe du "locus de fracture" est la courbe  $\bar{e} = \bar{e}_1^c(L)$  pour  $\beta$  fixé, les états dans la zone gris ne sont pas admissibles pour le système au sens du minimum de l'énergie. Les couples des états admissibles sont de la forme  $(\bar{e}, L_i/L) = \{\bar{e} \leq \bar{e}_1^c\} \times \{L_i/Ln, n \in \mathcal{N}_{ad}\}$

### 2.4 Problème de délamination

On aborde maintenant le problème de délamination du film sans fractures soumis à une charge du type déformation imposée, c'est à dire fixant  $\bar{u} = 0$  et  $n = 1$ . L'état du système est déterminé en résolvant :

$$\min_{\chi_\Delta} E(u, 1, 1, \chi_\Delta) = \min_{\chi_\Delta} \int_0^1 \frac{1}{2} (u' - \bar{e})^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 (1 - \chi_\Delta) + \gamma \chi_\Delta dx$$

ce qui fournit un critère de délamination locale, c'est à dire :

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } u^2(x) > (u_c^d)^2 \\ 0 & \text{si } u^2(x) < (u_c^d)^2 \end{cases}$$

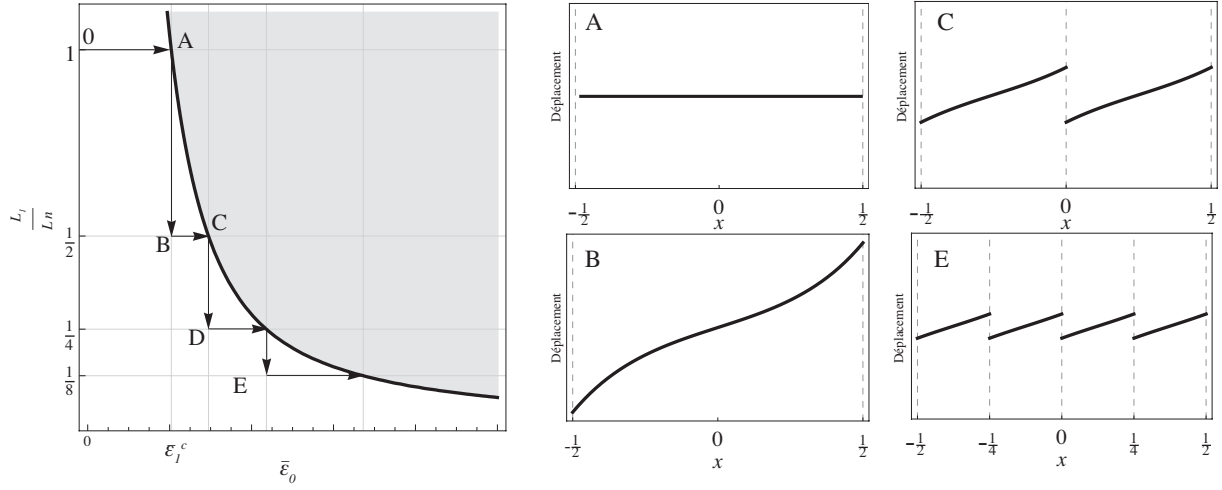


FIGURE 3 – À gauche le plan d'état pour le problème de fissuration pour  $L_1 = L = 1$ , à droite les déplacements correspondants aux points indiqués sur le plan d'état.

où le seuil critique en déplacement pour la délaminacion est donné par  $(u_c^d)^2 = 2\gamma/\beta^2$ . Le champ déplacement élastique étant une fonction croissante vis à vis de  $x$ , *i.e.*  $u'(x) \geq 0$  et symétrique, on trouve que les points qui atteignent les premiers le critère de délaminacion sont les deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , en retrouvant analytiquement un résultat expérimental. De plus le domaine de délaminacion est symétrique par rapport à l'axe du film. On détermine la fonction  $\delta : \bar{\epsilon} \mapsto [0, 1]$  qui donne la fraction de film collé par rapport à l'état initial vis à vis de la charge imposée  $\bar{\epsilon}$ .

$$\delta(\bar{\epsilon}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{\epsilon} < \bar{\epsilon}_d^c \\ \frac{2}{\beta} \operatorname{arc} \tanh \frac{\sqrt{2\gamma}}{\bar{\epsilon}}, & \text{si } \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_d^c \end{cases} \quad (7)$$

$\bar{\epsilon}_d^c$  étant la valeur de  $\bar{\epsilon}$  tel que  $\max_{x \in \Omega} u^2 = (u_c^d)^2$  *i.e.*  $\bar{\epsilon}_d^c = \frac{\beta \sqrt{2\gamma}}{\tanh \frac{\beta L}{2}}$

Un plan d'état pour le problème de délaminacion est construit en Figure 4 (gauche) à partir de la loi  $\delta : \bar{\epsilon} \mapsto [0, 1]$ . La courbe "locus de délaminacion" est la courbe  $\delta = \delta(\bar{\epsilon})$  pour  $\beta$  et  $\gamma$  fixés, les états admissibles sont les couples  $(\bar{\epsilon}, \bar{\delta}) \in \mathbb{R} \times \{\bar{\delta} \leq \delta\}$ .

En faisant référence à la Figure 4 un film est chargé élastiquement à partir d'une charge nulle (point 0), jusqu'à la charge critique est atteinte au point A. La délaminacion commence par les deux extrémités et l'état du système suit la courbe du locus de délaminacion.

Sur le plan d'état dans la Figure 4 (gauche) on visualise l'état du système par rapport à quatre différents niveaux de charge. Dans la figure à droite on montre les déplacements associés, les domaines de délaminacion indiqués en bleu clair correspondent au 0%, 25%, 50% et 70% de la longueur initiale du film  $L_1 = L = 1$ .

## 2.5 Problème couplé

On s'intéresse maintenant à la compétition entre les deux modes de fracture. Les deux plans d'état montrés peuvent être combinés. Pour deux différents choix des paramètres  $\beta, \gamma$  dans les Figures 5.(a)–(b) on représente le plan d'état complet du système, où les deux modes —de fracture et de délaminacion sont pris en compte. Le locus de fracture est indiqué par une ligne continue rouge, et celui de délaminacion par une ligne pointillée bleu. L'évolution des films suite à une charge croissante monotone est indiquée par les flèches.

Pour le film dont les paramètres sont ceux de la Figure 5 (gauche), trois fissures apparaissent —la première au point A, les deux successives au point B— avant du décollement au point C.

Sur la Figure 5 (droite), le critère de décollement est atteint au point D avant toute fissuration, et le système est soumis à un procès de décollement progressif.

Observations faites sur une grande plage de valeurs pour  $\beta$  et  $\gamma$  semblent indiquer que une fois le critère de délaminacion est atteint, aucune fissure ne va se produire. L'évolution du système la plus

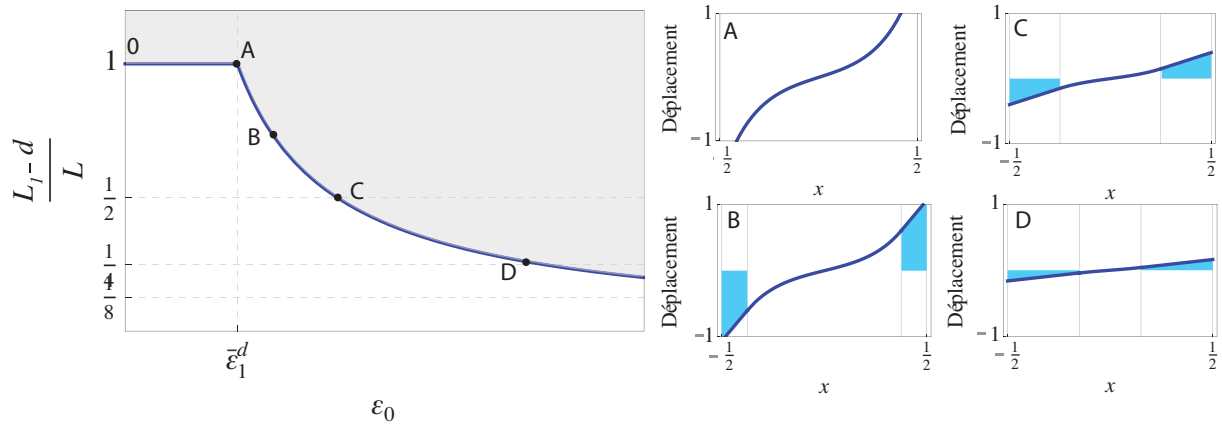


FIGURE 4 – À gauche le plan d'état pour le problème de délamination pour  $L_1 = L = 1$ , à droite les déplacements correspondants aux points indiqués sur le plan d'état.

générale est donc une combinaison du type :  $N$ -fissures-délaminations, avec  $N$  fini.

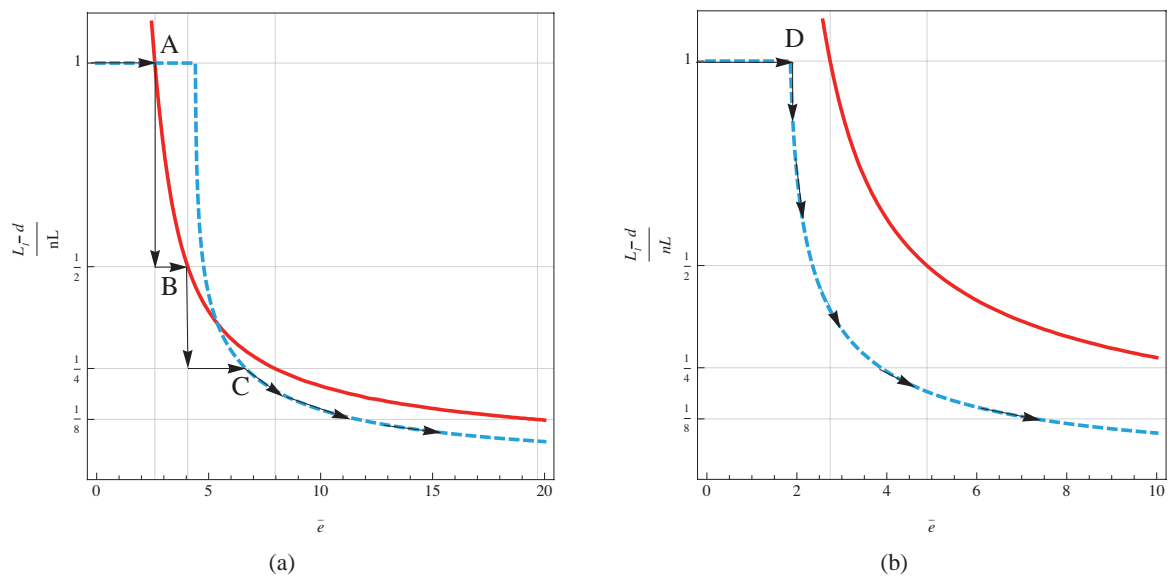


FIGURE 5 – Plan d'état du système, 3 fractures et délaminations dans la figure (a), uniquement délaminations dans la figure (b), pour  $L_1 = L = 1$

### 3 Résultats numériques

En étendant les idées proposées par [1] la solution numérique du problème passe par l'approximation de la fonctionnelle  $E(u, \Gamma, \Delta)$  par sa régularisée  $E_\varepsilon(u, \alpha, \Delta)$  au sens de la notion de  $\Gamma$ -convergence introduite dans [4]. On substitue l'ensemble de fissures  $\Gamma$  par sa représentation régularisée  $\alpha(x) : x \in \Omega \mapsto [0, 1]$ , champs scalaire qui peut être interprété comme un champ d'endommagement. La suite de fonctionnelles régularisées, indexée par  $\varepsilon$  a la forme suivante :

$$E_\varepsilon(u, \alpha, \Delta) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha)^2 (u' - \bar{e})^2 + \frac{\beta^2}{2} (u - \bar{u})^2 (1 - \chi_\Delta) + \frac{9}{64\varepsilon} \alpha^2 + \varepsilon \alpha'^2 + \gamma \chi_\Delta dx \quad (8)$$

Où  $\varepsilon$  —ayant la dimension d'une longueur— peut être interprété comme une "longueur interne", aussi bien comme un paramètre matériel. L'apparition des fissures est indiquée par la localisation du champ endommagement  $\alpha$  dans des zones de taille comparable à  $\varepsilon$ .

On cherche la solution au problème de l'évolution quasi-statique du système suite à une charge croissante monotone en termes de déformations inélastiques imposées. On peut vérifier que la fonctionnelle



(8) est convexe par rapport à chacune de ses variables indépendamment, ce qui permet de construire un algorithme de minimisation alternée en chacune des variables, montré dans le Tableau 1

```

Initialisation :  $u_0, \alpha_0, \chi_{\Delta 0} \leftarrow 0$ ; /* film sain, charge nulle */
for  $i = 1 : n$  do
   $j \leftarrow 0$ ;
  repeat
    Initialisation :  $u_i^0, \alpha_i^0, \chi_{\Delta i}^0 \leftarrow u_{i-1}, \alpha_{i-1}, \chi_{\Delta i-1}$ ; /* avec solution au pas précédent */
     $u_i^{j+1} = \underset{u}{\operatorname{argmin}} E_\varepsilon(u, \alpha_i^j, \chi_{\Delta i}^j)$ ; /* solveur linéaire */
     $\alpha_i^{j+1} = \underset{\alpha_i^{j+1} \geq \alpha_{i-1}}{\operatorname{argmin}} E_\varepsilon(u_i^{j+1}, \alpha, \chi_{\Delta i}^j)$ ; /* solveur linéaire avec contraintes */
     $\chi_{\Delta i}^{j+1} = \underset{\chi_{\Delta i}^{j+1} \geq \chi_{\Delta i-1}}{\operatorname{argmin}} E_\varepsilon(u_i^{j+1}, \alpha_i^{j+1}, \chi_\Delta)$ ; /* linéaire en  $\chi$  */
  until  $\|\alpha_i^{j+1} - \alpha_i^j\|_{L^\infty} \leq \text{tol}$ ;
end

```

**Algorithm 1:** Minimisation Alternée

Les résultats des simulations effectuées sur un domaine discretisé avec 800 éléments linéaires sont montrés sur les Figures 6. La Figure 6.(a) montre l'évolution quasi-statique des énergies de Volume, de Fracture, de Délamination et Totale pour un film en délamination, pour  $\beta = 10, \gamma = 2 \cdot 10^3$ , indiquées respectivement en ligne noir pointillée, rouge pointillée, bleu continue et noir continue épaisse. En gris fin on montre la famille des énergies calculées analytiquement  $E(n), n \in \{1, 2, 4, 8\} \subset \mathcal{X}_{ad}$ . On constate que les deux résultats collent pour ce qui regarde l'amorçage des fissures ( $t = 0.35, t = 0.41, t = 0.65$ ). Les mêmes résultats de l'étude analytique sont retrouvés pour ce qui concerne l'évolution des énergies. La dérive qu'on observe à partir de l'apparition du troisième ordre de fissures est due à la perte de rigidité globale de la structure, à cause de la présence importante des domaines endommagés. On remarque que cet algorithme cherche des *minima locaux*, alors que la minimisation accomplie analytiquement est *globale*. Les résultats des Figures 6 ont été obtenues à l'aide d'un algorithme "Backtracking" [5] qui effectue une sélection des solutions de minimum local obtenues numériquement. Grâce à la 2-homogénéité de l'énergie élastique, on peut déduire une condition nécessaire que les minimas globaux doivent satisfaire. L'algorithme de "Backtracking" permet de sélectionner — parmi les solutions de minimum locale trouvés numériquement — celles qui satisfont cette condition nécessaire.

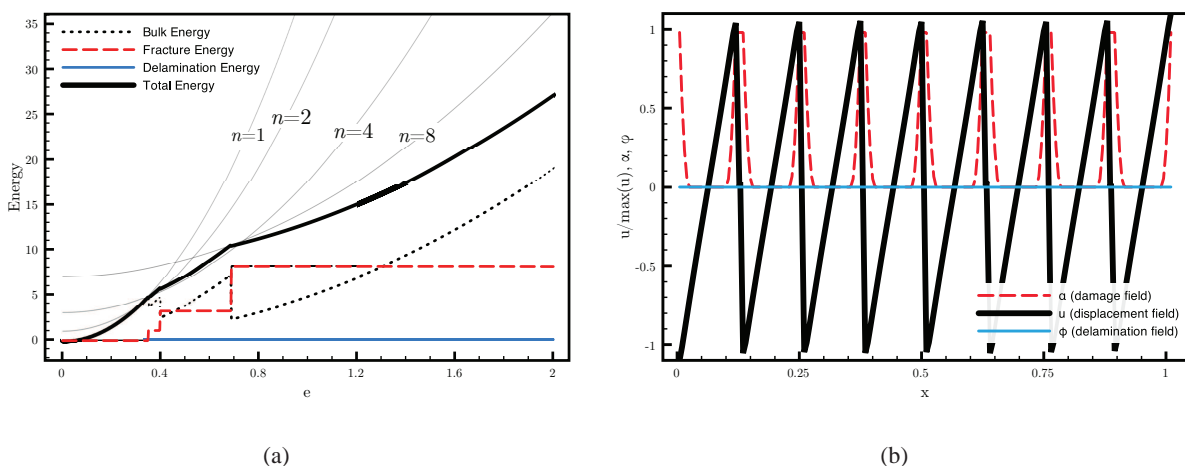


FIGURE 6 – Evolution du système, énergies (a), champs déplacement  $u$  en noir, endommagement  $\alpha$  en rouge, et délamination  $\chi_\Delta$  en bleu. Le système présente 7 fissures



## 4 Conclusions et perspectives

On a étudié les phénomènes de fissuration transverse et délamination d'un film soumis à une charge en déformation, dans le cadre de l'approche variationnelle à la mécanique de la fracture. On a trouvé analytiquement pour le cas  $1D$  (Figure 1.b) les lois d'évolution des fissures  $\Gamma$  et des domaines de délamination  $\Delta$  ainsi que le champ déplacement  $u$  qui réalisent l'optimum pour un niveau de charge  $\bar{e}, \bar{u}$  donnée. En particulier on a montré que :

- la distribution optimale des fissures est périodique
- la délamination est symétrique et commence aux bords de la couche

La solution numérique du problème d'endommagement est en accord avec les résultats analytiques, notamment elle reproduit les caractéristiques de périodicité des fissures, de symétrie de la délamination, du nombre des fissures et de la dimension du domaine délaminé, pour une charge donnée. Les résultats analytiques et ceux numériques fournissent des indications sur la compétition entre ces deux phénomènes qui sont en accord avec les expériences et une comparaison avec des données expérimentales est envisagée dans les travaux à venir. De plus, résultats précis et rigoureux pour la justification de la forme de l'énergie limite  $1D$  (1) sont en train d'être établis.

### Références

- [1] Blaise Bourdin, Gilles A. Francfort, and Jean-Jacques Marigo. The Variational Approach to Fracture. *Journal of Elasticity*, 2007.
- [2] Gilles A. Francfort and Jean-Jacques Marigo. Revisiting Brittle Fracture as an Energy Minimization Problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :1319–1342, 1998.
- [3] Z Cedric Xia and John W Hutchinson. Crack patterns in thin films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1107–1131, 2000.
- [4] Luigi Ambrosio and Vincenzo Maria Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via  $\Gamma$ -convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8) :999–1036, December 1990.
- [5] Blaise Bourdin. Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture. *Interfaces and Free Boundaries*, pages 411–430, 2007.