



**HAL**  
open science

# Méthode Asymptotique Numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire

Sébastien Baguet, Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Sébastien Baguet, Bruno Cochelin. Méthode Asymptotique Numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592804

**HAL Id: hal-00592804**

**<https://hal.science/hal-00592804>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode Asymptotique Numérique adaptative pour la dynamique transitoire non-linéaire

S. Baguet<sup>1</sup>, B. Cochelin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, France, sebastien.baguet@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> LMA, Ecole Centrale de Marseille, France, bruno.cochelin@ec-marseille.fr

**Résumé** — Cet article décrit le couplage de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) avec un schéma d'intégration temporelle permettant la dissipation numérique des hautes fréquences tout en conservant les moments linéaires et angulaires. Différentes stratégies sont présentées afin d'optimiser l'efficacité de la méthode proposée, dont l'adaptation de l'ordre des séries de la MAN à chaque pas de temps. L'algorithme obtenu est appliqué à des structures minces fortement non linéaires discrétisées par éléments finis.

**Mots clés** — Méthode Asymptotique Numérique, élastodynamique non linéaire, intégration temporelle, algorithme adaptatif, éléments finis.

## 1 Introduction

De nombreux schémas d'intégration temporelle pour la dynamique non linéaire ont été développés depuis les travaux de Newmark [1, 2, 3]. Les plus récents permettent d'introduire de la dissipation numérique pour contrôler les hautes fréquences, susceptibles de provoquer des oscillations non physiques, tout en conservant les moments linéaires et angulaires [4, 5, 6]. Tous ces schémas sont classiquement associés à des méthodes de prédiction-correction de type Newton-Raphson. L'objectif est ici de les coupler à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [7]. L'adaptation de la MAN à la dynamique a été exposée pour la première fois dans [8] et repose sur l'ajout d'une procédure d'homotopie à l'algorithme initial. Plusieurs variantes ont ensuite été présentées [9, 10]. Toutefois, ces travaux se limitent pour la plupart à des problèmes 2D ou à quelques degrés de liberté et faiblement non linéaires, et n'exploitent pas de manière optimale les spécificités de la MAN.

On se propose ici d'adapter la MAN à la GEMM (*Generalized Energy-Momentum Method*) [4] tout en présentant un cadre général valable pour n'importe quel schéma d'intégration, et de développer un algorithme adaptatif permettant de résoudre de manière efficace et robuste les problèmes d'élastodynamique non linéaire.

## 2 Méthode Asymptotique Numérique pour l'élastodynamique non linéaire

### 2.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle décrivant l'équilibre élastodynamique non linéaire d'un solide  $\Omega$  homogène de densité  $\rho$  soumis à des forces volumiques  $\mathbf{b}$  et surfaciques  $\mathbf{t}$  en plus des efforts inertiels s'écrit

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \ddot{\mathbf{u}} \rho d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{S}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \mathbf{t} dA \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}$ , et  $\ddot{\mathbf{u}}$  sont respectivement le déplacement et l'accélération,  $\mathbf{E}$  est le tenseur de déformation de Green-Lagrange et  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff défini par

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} : \mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} : [\mathbf{E}^l(\mathbf{u}) + \mathbf{E}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u})] \quad (2)$$

avec  $\mathbf{D}$  le tenseur des constantes d'élasticité et  $\mathbf{E}^l$  et  $\mathbf{E}^{nl}$  les parties linéaire et non linéaire de  $\mathbf{E}$  définies respectivement par  $\mathbf{E}^l(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u})$  et  $\mathbf{E}^{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}{}^t\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}$ .

## 2.2 Discrétisation en temps (Generalized Energy-Momentum Method)

L'intervalle de temps étudié  $[0, T]$  est subdivisé en intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$ , définissant ainsi le pas de temps  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Les déplacements, vitesses et accélérations en début de pas  $\mathbf{u}_n$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_n$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_n$  sont supposées connus et il s'agit de calculer  $\mathbf{u}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  à chaque fin de pas. Pour cela, on écrit l'équilibre dynamique (1) de la structure en un instant  $t \in ]t_n, t_{n+1}]$ . Le choix de cet instant dépend du schéma d'intégration temporelle choisi. Dans le cas de la *Generalized Energy-Momentum Method* (GEMM) [4], l'équilibre est écrit au point milieu généralisé  $t_{n+1-\alpha_f}$ . De plus, l'accélération est quant à elle évaluée en  $t_{n+1-\alpha_m}$  et le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f})$  est remplacé par  $\mathbf{S}_{n+1-\alpha_f+\xi}$  afin d'assurer la conservation de l'énergie totale à chaque pas de temps

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} \rho d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) : \mathbf{S}_{n+1-\alpha_f+\xi} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{b}_{n+1-\alpha_f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{t}_{n+1-\alpha_f} dA \quad (3)$$

$$\mathbf{S}_{n+1-\alpha_f+\xi} = (1 - \alpha_f + \xi) \mathbf{S}(\mathbf{u}_{n+1}) + (\alpha_f - \xi) \mathbf{S}(\mathbf{u}_n) \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_m \dot{\mathbf{u}}_n \quad \mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{u}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{u}_n \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{b}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{b}_n \quad \mathbf{t}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{t}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{t}_n$$

La formulation variationnelle (3) combine les avantages de la *Generalized- $\alpha$  Method* [2] pour la dissipation numérique optimisée, de la *Energy-Momentum Method* [3] pour la conservation de l'énergie, et bénéficie de la dissipation numérique additionnelle introduite dans les contraintes (4) à l'aide du paramètre  $\xi$  [5]. Elle permet par ailleurs la conservation des moments linéaires et angulaires. Les inconnues  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  sont éliminées à l'aide des approximations classiques de Newmark [1]

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{u}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (6)$$

ce qui conduit à un système non linéaire dont les inconnues sont les déplacements  $\mathbf{u}_{n+1}$ .

Les paramètres  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$  issus de la *Generalized- $\alpha$  Method* et le paramètre  $\xi$  permettent de régler le taux de dissipation numérique de l'algorithme. On peut ramener le choix de  $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  au choix d'un seul paramètre  $\rho_\infty$  de façon à imposer une dissipation numérique maximale des hautes fréquences indésirables et minimale des basses fréquences ainsi qu'une précision d'ordre 2 en temps [2]

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (7)$$

La dissipation numérique est active lorsque  $\xi = 0$  et  $0 \leq \rho_\infty < 1$  ou lorsque  $\xi > 0$  et  $\rho_\infty = 0$ . Le cas particulier  $\rho_\infty = \xi = 0$  (dissipation nulle) correspond à la *Energy-Momentum Method* qui conserve l'énergie totale de manière exacte. On retrouve Newmark en prenant  $\alpha_m = \alpha_f = 0$ .

## 2.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , sa contrepartie virtuelle  $\delta \mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{E}$  sont approximés classiquement par

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{N} \mathbf{u}^e, \quad \delta \mathbf{u} \simeq \mathbf{N} \delta \mathbf{u}^e, \quad \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}^e) = \mathbf{B}(\mathbf{u}^e) \delta \mathbf{u}^e = [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}^e)] \delta \mathbf{u}^e, \quad \mathbf{E}(\mathbf{u}^e) = [\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}^e)] \mathbf{u}^e$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme qui servent à interpoler les déplacements nodaux  $\mathbf{u}^e$  et  $\delta \mathbf{u}^e$  dans l'élément,  $\mathbf{B}_l$  est la matrice de déformation en petites perturbations et  $\mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}^e)$  est linéaire en  $\mathbf{u}^e$  [11]. L'équation d'équilibre discrétisée en temps (3) après ajout d'un terme d'amortissement visqueux et le champ de contraintes  $\mathbf{S}$  s'écrivent alors sur l'élément fini  $e$

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m}^e + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}^e) \mathbf{S}_{n+1-\alpha_f+\xi} d\Omega_e = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f}^e \quad (8)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_{n+1}^e) = \mathbf{D}[\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{nl}(\mathbf{u}_{n+1}^e)] \mathbf{u}_{n+1}^e \quad (9)$$

## 2.4 Problème incrémental

On introduit deux nouvelles variables  $\Delta \mathbf{u}^e$  et  $\Delta \mathbf{S}$  correspondant aux incréments de déplacement et de contrainte sur le pas de temps  $\Delta t$  considéré. On a donc

$$\mathbf{u}_{n+1}^e = \mathbf{u}_n^e + \Delta \mathbf{u}^e \quad \mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{S} \quad (10)$$

On en déduit

$$\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}^e = \mathbf{u}_n^e + (1 - \alpha_f)\Delta \mathbf{u}^e \quad \mathbf{S}_{n+1-\alpha_f+\xi} = \mathbf{S}_n + (1 - \alpha_f + \xi)\Delta \mathbf{S} \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{DB}(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}^e + \frac{1}{2}\mathbf{DB}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e)\Delta \mathbf{u}^e \quad (12)$$

L'introduction des équations (6), (11) et (12) dans le problème discrétisé (8) conduit au problème incrémental non linéaire d'inconnue  $\Delta \mathbf{u}^e$

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}^e + \mathbf{F}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n) - \mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e) \quad (13)$$

où la matrice tangente  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)$ , les forces intérieures  $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n)$  et les forces dynamiques  $\mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e)$  en début de pas sont définies par

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e) = \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}^e + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}^e + (1 - \alpha_f + \xi)\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_n^e) + (1 - \alpha_f)\mathbf{K}_g(\mathbf{u}_n^e)$$

$$\mathbf{K}_e(\mathbf{u}_n^e) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t(\mathbf{u}_n^e)\mathbf{DB}(\mathbf{u}_n^e) d\Omega_e \quad \mathbf{K}_g(\mathbf{u}_n^e) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{,u}^t \mathbf{S}_n d\Omega_e$$

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^t(\mathbf{u}_n^e)\mathbf{S}_n d\Omega_e$$

$$\mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e) = -\left[\left(\frac{1-\alpha_f}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_n^e + (1 - \alpha_f)\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n^e\right]\mathbf{C}^e - \left[\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_n^e + \left(\frac{1-\alpha_m}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_n^e\right]\mathbf{M}^e$$

Il est intéressant de noter que la matrice tangente  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)$  obtenue ici est symétrique, contrairement à celle obtenue avec une procédure itérative de Newton-Raphson [4]. Les forces non linéaires  $\mathbf{F}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e)$  s'écrivent

$$\mathbf{F}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e) = (1-\alpha_f+\xi) \int_{\Omega^e} \frac{1}{2}\mathbf{B}^t(\mathbf{u}_n^e)\mathbf{DB}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e)\Delta \mathbf{u}^e d\Omega_e + (1-\alpha_f)(1-\alpha_f+\xi) \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_{nl}^t(\Delta \mathbf{u}^e)\Delta \mathbf{S} d\Omega_e \quad (14)$$

## 2.5 Homotopie

On utilise ensuite une technique d'homotopie [8, 9, 10] en introduisant un paramètre  $\varepsilon \in [0, 1]$  devant les termes non linéaires de (12) et (13). On passe ainsi de manière continue d'un problème linéaire pour  $\varepsilon = 0$  au problème non linéaire considéré pour  $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}^e + \varepsilon \mathbf{F}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e) &= \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n) - \mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e) \\ \Delta \mathbf{S} &= \mathbf{DB}(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}^e + \varepsilon \frac{1}{2}\mathbf{DB}_{nl}(\Delta \mathbf{u}^e)\Delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (15)$$

## 2.6 Développements en séries

L'étape suivante consiste à chercher les incréments de déplacement et de contrainte sous la forme d'une série entière d'ordre  $N$  fonction du paramètre  $\varepsilon$

$$\Delta \mathbf{u}^e = \Delta \mathbf{u}_1^e + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_2^e + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{u}_3^e + \dots + \varepsilon^{N-1} \Delta \mathbf{u}_N^e \quad \Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}_1 + \varepsilon \Delta \mathbf{S}_2 + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{S}_3 + \dots + \varepsilon^{N-1} \Delta \mathbf{S}_N \quad (16)$$

En injectant ces développements en série dans les équations obtenues par homotopie (15), on transforme le problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires possédant tous la même matrice tangente, dépendant les uns des autres de manière récursive, et dont la résolution fournit les coefficients des séries pour le pas de temps considéré [7].

A l'ordre 1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}_1^e &= \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n) - \mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e) \\ \Delta \mathbf{S}_1 &= \mathbf{DB}(\mathbf{u}_n^e)\Delta \mathbf{u}_1^e \end{aligned} \quad (17)$$

A l'ordre  $p \geq 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)\Delta\mathbf{u}_p^e &= \Delta\mathbf{F}_p^{nl} \\ \Delta\mathbf{S}_p &= \mathbf{D}\mathbf{B}(\mathbf{u}_n^e)\Delta\mathbf{u}_p^e + \Delta\mathbf{S}_p^{nl} \end{aligned} \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F}_p^{nl} &= (1 - \alpha_f + \xi) \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \mathbf{B}^t(\mathbf{u}_n^e) \Delta\mathbf{S}_p^{nl} d\Omega_e + (1 - \alpha_f)(1 - \alpha_f + \xi) \Delta\mathbf{R}_p^{nl} \\ \Delta\mathbf{S}_p^{nl} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{B}_{nl}(\Delta\mathbf{u}_r^e) \Delta\mathbf{u}_{p-r}^e \quad \Delta\mathbf{R}_p^{nl} = \int_{\Omega^e} \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{B}_{nl}^t(\Delta\mathbf{u}_r^e) \Delta\mathbf{S}_{p-r} d\Omega_e \end{aligned} \quad (19)$$

Il convient de noter que la forme du système (18) ainsi que les termes  $\Delta\mathbf{S}_p^{nl}$  et  $\Delta\mathbf{R}_p^{nl}$  sont exactement les mêmes que dans le cas quasi-statique [12]. Seuls le second-membre de (17) et la matrice tangente  $\mathbf{K}_t$  sont modifiés par l'ajout de termes dynamiques. Après assemblage des vecteurs et matrices élémentaires, on obtient les systèmes linéaires transposés de (17) et (18) au niveau de la structure complète. La résolution de ces systèmes permet d'obtenir les termes des séries (16). L'évaluation de ces séries pour  $\varepsilon = 1$  fournit  $\mathbf{u}$  et  $\Delta\mathbf{S}$ , puis les déplacements et contraintes en fin de pas à l'aide de (10).

### 3 Stratégies de calcul

#### 3.1 Stratégie basique (A)

A la fin de chaque pas de temps, on évalue la qualité de la solution à l'aide d'un critère basé sur le résidu d'équilibre (8). Il s'agit alors de bien choisir l'ordre  $N$  des séries, i.e. prendre suffisamment de termes pour atteindre la précision souhaitée, mais pas trop pour limiter le temps de calcul. La valeur optimale de  $N$  étant difficile à estimer a priori, cette stratégie n'est pas très efficace.

#### 3.2 Matrice tangente constante (B)

Pour des problèmes faiblement non linéaires, il est possible d'adapter l'algorithme pour conserver la même matrice tangente pendant plusieurs pas de temps afin de réduire le coût de calcul [9, 10]. On introduit pour cela la matrice tangente  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)$  calculée en  $t = t_0$  dans le problème incrémental (15)

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)\Delta\mathbf{u}^e + \varepsilon [\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e) - \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)]\Delta\mathbf{u}^e + \varepsilon \mathbf{F}_{nl}(\Delta\mathbf{u}^e) = \mathbf{F}_{n+1-\alpha_f} - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_n^e, \mathbf{S}_n) - \mathbf{F}_{dyn}(\mathbf{u}_n^e) \quad (20)$$

et le nouveau problème à l'ordre  $p$  devient

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)\Delta\mathbf{u}_p^e = \Delta\mathbf{F}_p^{nl} - [\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e) - \mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)]\Delta\mathbf{u}_{p-1}^e \quad (21)$$

Il est ainsi possible de conserver cette matrice tangente  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)$ , une fois triangularisée, pour les pas de temps  $t_n > t_0$  suivants, en actualisant simplement la matrice  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_n^e)$  du second-membre. En fonction de la précision atteinte à chaque fin de pas, on continue avec la même matrice  $\mathbf{K}_t(\mathbf{u}_0^e)$  ou alors on l'actualise et on démarre une nouvelle séquence de calcul à partir d'un nouveau temps  $t_0$ . Pour une précision donnée, C'est donc l'ordre  $N$  des séries qui détermine directement le nombre de pas effectués avec la même matrice tangente. Toutefois, là encore, il faut trouver le bon compromis car si un ordre élevé permet de conserver longtemps la même matrice tangente, il peut également entraîner un surcoût de calcul important à cause des second membres supplémentaires à calculer.

#### 3.3 Ordre adaptatif (C)

Pour les problèmes fortement non linéaires, il est plus judicieux d'actualiser la matrice tangente à chaque pas de temps et d'adapter l'ordre  $N$  des séries (16) au cours du temps. Ainsi, on calcule plus ou moins de termes selon la difficulté du problème à chaque instant. Après chaque calcul d'un nouveau terme  $\Delta\mathbf{u}_p^e$  de (16) grâce à (18), on évalue la série pour  $\varepsilon = 1$  et on calcule le résidu. Si la précision souhaitée  $\delta$  est atteinte alors le pas de temps est validé, sinon on calcule un terme supplémentaire de

(16), i.e. on augmente l'ordre des séries. On peut alléger les calculs en remplaçant le critère sur le résidu d'équilibre (8) par un critère sur le déplacement

$$\delta_u^N = \|\Delta \mathbf{u}_N^e\| / \|\mathbf{u}_{n+1}^e - \mathbf{u}_n^e\| = \|\Delta \mathbf{u}_N^e\| / \|\Delta \mathbf{u}^e\| \leq \delta \quad (22)$$

Ainsi, l'ordre des séries est optimal à chaque pas de calcul et l'utilisateur n'a qu'un seul paramètre à choisir : la précision souhaitée  $\delta$ .

## 4 Application aux coques minces

Les deux exemples d'application qui suivent sont issus de [4] où ils sont traités à l'aide de la GEMM combinée à une méthode de Newton-Raphson. Ils ont été choisis en raison de leur difficulté car toutes les méthodes d'intégration temporelle classiques [1, 2, 3] échouent. L'élément de coque quadratique à 8 nœuds utilisé est également le même que dans [4]. Il est basé sur une formulation de coque tridimensionnelle qui autorise les grands déplacements, les grandes rotations et la dilatation de l'élément suivant l'épaisseur et permet d'utiliser des lois de comportement 3D [13]. Cette formulation est particulièrement bien adaptée à la MAN car il s'agit d'une formulation purement en déplacements et non pas d'une formulation co-rotationnelle [14].

### 4.1 Flambage dynamique d'un panneau cylindrique

Le premier exemple concerne le flambage dynamique d'un panneau cylindrique soumis à une charge ponctuelle verticale. La géométrie, les conditions aux limites, le matériau ainsi que le chargement sont détaillés dans la figure 1. En raison des symétries du problème, seul un quart du panneau est discrétisé avec 16 éléments de coque.

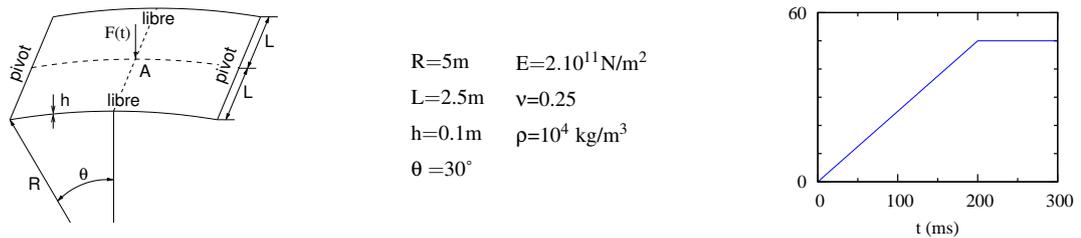


FIG. 1 – Panneau cylindrique - géométrie, chargement et matériau.

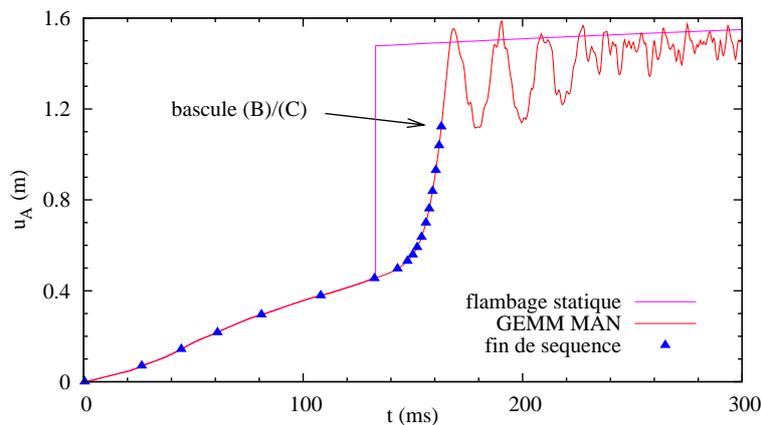


FIG. 2 – Déplacement vertical au point A - Stratégie (B) ordre  $N = 20$  + bascule vers (C)

La figure 2 présente le déplacement vertical au point A obtenu avec une légère dissipation numérique  $\rho_\infty = 0.8$  et un pas de temps  $\Delta t=0.5\text{ms}$ . Pour cet exemple, la stratégie (A) avec un ordre des séries  $N = 20$  ne permet pas de d'obtenir la totalité de la courbe car la précision souhaitée  $\delta = 10^{-8}$  n'est plus atteinte à partir de  $t = 181\text{ms}$ . La stratégie (B), aussi bien à l'ordre 20 que 30, ne permet pas non plus d'obtenir la totalité de la courbe. Il est toutefois possible de modifier la stratégie (B) en effectuant une

bascule vers la stratégie (C) au moment où (B) échoue. Les différentes séquences pendant lesquelles la matrice tangente est conservée sur plusieurs pas de temps sont repérées sur la figure 2. On constate qu'on peut garder la même matrice assez longtemps pendant la phase de pré-flambage (17 séquences jusqu'à  $t = 137\text{ms}$ ) puis que cela devient de plus en plus difficile pendant la phase de flambage. La stratégie (B) échoue à  $t = 163\text{ms}$ . On bascule alors vers la stratégie (C) qui permet de finir le calcul. Cette bascule (B)/(C) est visible sur la figure 3 de gauche. La stratégie (C) quant à elle permet de calculer la courbe dans sa totalité. L'adaptation de l'ordre des séries au cours du temps est représenté sur la figure 3 de droite. L'ordre reste faible pendant la phase de pré-flambage, puis augmente nettement pendant la phase difficile de flambage puis oscille pendant la phase de post-flambage en raison des hautes fréquences présentes dans la réponse. Enfin, le coût de calcul en fonction de la stratégie utilisée est présenté dans le tableau 1. La stratégie (B) avec bascule vers (C) permet d'inverser moins de matrices tangentes, mais conduit à de nombreux second-membres supplémentaires, ce qui rend la stratégie (C) à pas adaptatif la plus performante.

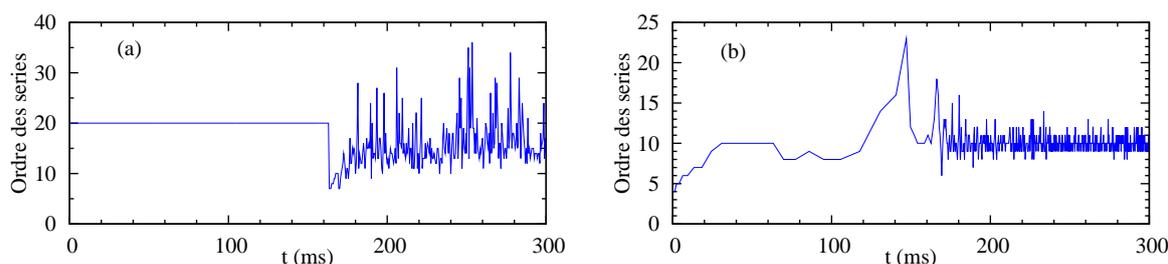


FIG. 3 – Toit - Evolution de l'ordre des séries : a) avec bascule (B)/(C) - b) stratégie (C)

$\Delta t=0.5\text{ms}$	(A)	(B)+(C)			(C)
Ordre	20	10	20	30	adaptatif
Nb $\mathbf{K}_t$	×	315 (29 séq.)	292 (17 séq.)	287 (15 séq.)	600
Nb $\Delta \mathbf{F}_p^{nl}$	×	7 761	11 123	14 572	5 637
Temps CPU	×	1.26	1.72	2.25	1

TAB. 1 – Coût de calcul en fonction de la stratégie utilisée

## 4.2 Réglette mince

On s'intéresse au mouvement dans l'espace d'une réglette mince. Sous l'effet de l'impulsion présentée dans la Figure 4, la réglette subit des déformations complexes combinées à un mouvement de translation et de rotation [4]. La réglette est discrétisée à l'aide de 30 éléments de coque. Les calculs sont menés avec  $\rho_\infty = 0.95$  de façon à introduire une très légère dissipation numérique. Les résultats

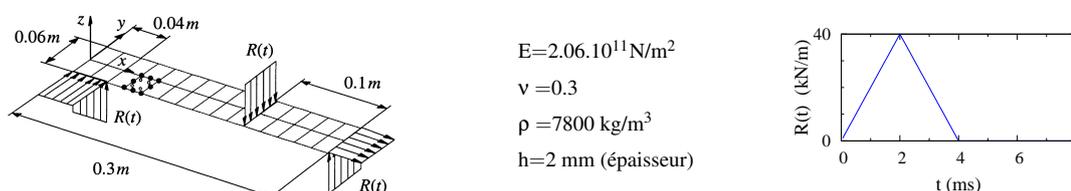


FIG. 4 – Réglette - géométrie, chargement, matériau, d'après [4].

présentés dans la Figure 5 mettent en évidence cette dissipation de l'énergie totale. La stratégie (A) avec  $N=10$  ou  $15$  ne permet pas d'obtenir la solution complète jusqu'à  $T = 100\text{ms}$ . Pour  $N=20$  la solution est obtenue en totalité et le résidu d'équilibre reste très nettement inférieur à la précision demandée  $\delta = 10^{-8}$  (Fig. 5). Toutefois, avec un ordre constant  $N = 20$ , beaucoup de calculs superflus sont effectués. En effet, l'évolution de l'ordre des séries dans le cas de la stratégie (C) avec ordre adaptatif (Fig. 6) montre une réelle économie par rapport à la stratégie (A). Le calcul est véritablement optimisé, comme le prouve la courbe de résidu qui varie très peu et reste à la limite de la précision demandée  $\delta = 10^{-8}$ . Cela est

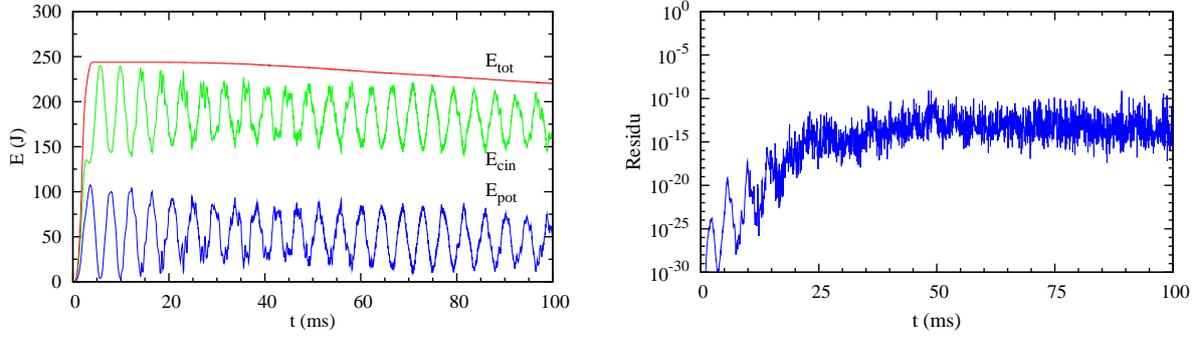


FIG. 5 – Évolution de l'énergie et du résidu de la MAN - Stratégie (A)  $N = 20$ ,  $\rho_\infty = 0.95$ .

confirmé par les résultats du tableau 2. La stratégie (C) à ordre adaptatif est deux fois plus rapide en raison du nombre de second-membres économisés par rapport à la stratégie (A) à ordre fixe. La stratégie (B) avec  $N = 30$  n'est pas efficace pour cet exemple car la bascule vers (C) s'effectue après à peine 3 séquences très courtes. Enfin, l'utilisation d'une dissipation plus importante  $\rho_\infty = 0.85$  rend, comme on pouvait s'y attendre, le calcul plus facile et l'ordre des séries s'adapte en conséquence (Fig. 7).

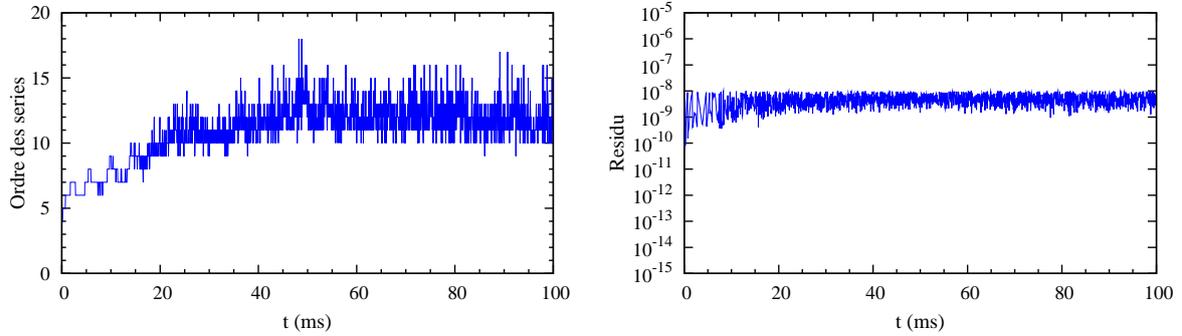


FIG. 6 – Adaptation de l'ordre de la MAN et évolution du résidu - Stratégie (C) -  $\rho_\infty = 0.95$

$\Delta t=50\mu s$	(A)			(B)+(C)	(C)
Application aux coques minces Ordre	10	15	20	30	adaptatif
Nb $K_t$	×	×	2 000	1 996	2 000
Nb $\Delta F_p^{nl}$	×	×	40 000	22 229	21 920
Temps CPU	×	×	1.96	1.02	1

TAB. 2 – Coût de calcul en fonction de la stratégie utilisée

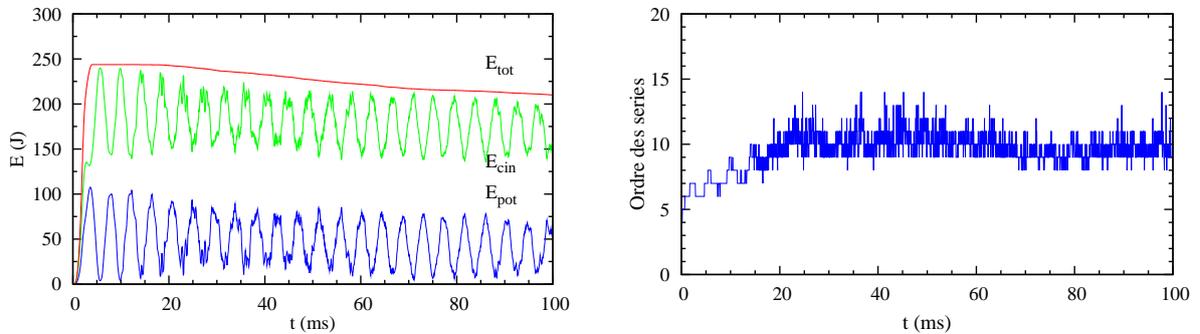


FIG. 7 – Évolution de l'énergie et de l'ordre de la MAN - Stratégie (C) -  $\rho_\infty = 0.85$ .

## 5 Conclusion

L'algorithme présenté dans cet article permet de coupler la Méthode Asymptotique Numérique avec un schéma d'intégration temporelle pour la dynamique non linéaire des structures, qui combine les avantages des schémas classiques : stabilité inconditionnelle, conservation de l'énergie ou dissipation contrôlée des hautes fréquences. Ces propriétés s'avèrent essentielles pour les problèmes de vibrations non linéaires de structures minces avec hautes fréquences. La formulation obtenue est simple à mettre en œuvre car elle fait apparaître des opérateurs élémentaires identiques à ceux développés par le passé en quasi-statique. Par ailleurs, la matrice tangente associée au problème discrétisé en temps est ici symétrique, contrairement aux procédures itératives de type Newton-Raphson, ce qui contribue à l'efficacité de cette méthode. Enfin, une stratégie de calcul originale basée sur l'adaptation de l'ordre des séries au cours du temps rend l'algorithme très performant et optimal d'un point de vue coût de calcul.

## Références

- [1] N.N. Newmark, *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division 85, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 67-94, 1959.
- [2] J. Chung, G.B. Hulbert, *A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : The Generalized- $\alpha$  Method*, Journal of Applied Mechanics, 371-375, 1993.
- [3] J.C. Simo, N. Tarnow, *The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics*, Journal of Applied Mathematics and Physics 43, 757-792, 1992.
- [4] D. Kuhl, E. Ramm. *Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178, 343-366, 1999.
- [5] F. Armero, E. Petöcz, *Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 158, 269-300, 2002.
- [6] S. Krenk, *Extended state-space time integration with high-frequency energy dissipation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 73 (12), 1767-1787, 2008.
- [7] B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Méthode Asymptotique Numérique*, Collection méthodes numériques, Hermes Sciences, 2007.
- [8] B. Cochelin, C. Compain. *An asymptotic numerical method for nonlinear transient dynamics*, Revue Européenne des Eléments Finis 3, 113-128, 2000.
- [9] M. Jamal, B. Braikat, S. Boutmir, N. Damil, M. Potier-Ferry. *A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems*, Computational Mechanics 28, 375-380, 2002.
- [10] S. Boutmir, B. Braikat, M. Jamal, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry, *Des solveurs implicites d'ordre supérieur pour les problèmes de dynamique non linéaire des structures*, Revue Européenne des Eléments Finis 13 (5-6), 449-460, 2004.
- [11] M. A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures : Voll. - Essentials*, John Wiley & Sons, 1991.
- [12] S. Baguet, *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la Méthode Asymptotique Numérique*, Mémoire de Thèse de Doctorat, École Supérieure de Mécanique de Marseille, Université d'Aix-Marseille II, 2001.
- [13] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl, *Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 2551-2568, 1994.
- [14] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, *Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 175 (1-2), 71-85, 1999.