

Préconditionnement d'algorithmes d'interaction fluide-structure

M.A. Fernández¹, Y. Maday², J. Mullaert¹

¹ INRIA, CRI Paris-Rocquencourt, France, {miguel.fernandez,jimmy.mullaert}@inria.fr

² LJLL, Université Pierre et Marie Curie, France, maday@ann.jussieu.fr

Résumé — La simulation numérique de l'interaction entre un fluide newtonien incompressible circulant dans un solide pose des difficultés. Le phénomène de *masse ajoutée* vient perturber d'une part la stabilité des schémas de couplage Dirichlet-Neumann explicites, mais aussi la convergence des algorithmes Dirichlet-Neumann itératives dans la résolution des schémas de couplage implicites (ou semi-implicites). Nous proposons, dans ce dernier cas, d'utiliser des preconditionneurs permettant de rendre les itérations moins sensibles à cet effet de masse ajoutée. En fait, ce preconditionnement aura pour effet de relaxer d'une part la condition de continuité des vitesses à l'interface et d'autre part la condition d'incompressibilité du fluide. Les propriétés de ces preconditionneurs sont illustrées par des expériences numériques.

Mots clés — interaction fluide-structure, approche partitionnée, preconditionnement.

1 Description du problème

On se propose de résoudre numériquement un problème d'interaction fluide-structure qui intervient dans les écoulements sanguins. On considère un fluide newtonien incompressible qui circule dans une conduite dont les parois sont élastiques. Le fluide est régi par les équations de Navier-Stokes en formulation ALE et le solide par les équations de l'élastodynamique. On cherche donc à trouver la vitesse/pression du fluide (\mathbf{u}, p) et le déplacement \mathbf{d} du solide qui vérifient ces équations d'évolution, mais aussi les conditions aux limites de continuité des efforts et des vitesses sur l'interface Σ . Après discrétisation en temps par un schéma de couplage implicite, on obtient (à chaque pas de temps) un problème couplé non-linéaire. Ce système est souvent résolu de façon partitionnée par des algorithmes comportant des itérations Dirichlet-Neumann relaxées entre le fluide et le solide ([1, 2]) :

$$\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{d}_k - \mathbf{d}^n}{\tau}, \quad \boldsymbol{\sigma}^s(\tilde{\mathbf{d}}_{k+1})\mathbf{n}^s = -\boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{u}_{k+1}, p_{k+1})\mathbf{n}^f, \quad \mathbf{d}_{k+1} = \omega_k \mathbf{d}_k + (1 - \omega_k)\tilde{\mathbf{d}}_{k+1} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (1)$$

Dans cette écriture, τ désigne le pas de temps, \mathbf{d}^n le déplacement du solide lors du pas de temps précédent et ω_k le paramètre de relaxation. Malgré leur simplicité (permettant une approche partitionnée), la convergence de ces itérations est très sensible au niveau de masse-ajoutée (rapport de masses fluide/solide, longueur du domaine), ce qui les rend très coûteuses en pratique ([3, 4]).

2 Préconditionnement

Dans ce travail, nous proposons de résoudre le couplage implicite par des itérations non-linéaires preconditionnées, ou de type *défauts corrigés* ([5]) : $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}_{k+1}, p_{k+1}) = \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}_k, p_k) - \mathbf{R}(\mathbf{u}_k, p_k)$, où \mathbf{R} et $\tilde{\mathbf{R}}$ désignent, respectivement, les résidus du problème original et du preconditionneur. Ces itérations sont appliquées à la formulation Dirichlet-Neumann où l'on a préalablement éliminé le sous problème solide. Ceci permet, en particulier, un traitement *boîte-noire* du code solide¹. Dans les différents preconditionneurs considérés, l'opérateur d'interface Neumann-Dirichlet solide est approché par une relation algébrique effort-déplacement de la forme $\mathbf{d} = -\alpha \boldsymbol{\sigma}^f(\mathbf{u}, p)\mathbf{n}^f$, avec $\alpha > 0$ un paramètre à fixer. La résolution du preconditionneur est ainsi aisée, car cette relation peut être directement incorporée dans le problème fluide sous la forme d'une condition aux limites de type Robin ([7]). Ce preconditionnement donne lieu

¹Cette approche diffère de celle proposé dans [6, Section 3.3] et [4], qui consiste à preconditionner le problème fluide-structure monolithique linéarisé.

à l'itération Neumann-Robin suivante :

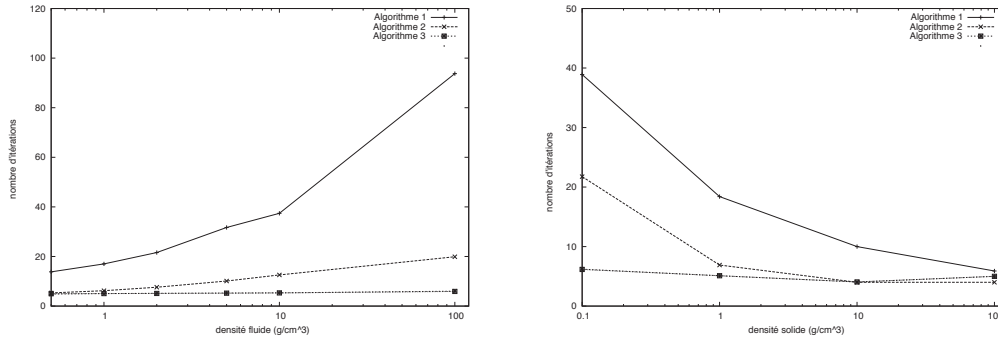
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^s(\mathbf{d}_{k+1})\mathbf{n}^s = -\sigma^f(\mathbf{u}_k, p_k)\mathbf{n}^f \quad \text{sur } \Sigma, \\ \sigma^f(\mathbf{u}_{k+1}, p_{k+1})\mathbf{n}^f + \frac{\tau}{\alpha}\mathbf{u}_{k+1} = \frac{\tau}{\alpha} \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}^n}{\tau} + \sigma^f(\mathbf{u}_k, p_k)\mathbf{n}^f \quad \text{sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (2)$$

ce qui revient à relaxer la condition cinématique dans le fluide. Cette itération à été proposé dans [4] sous une autre formulation, comme itération Gauss-Seidel préconditionnée du système fluide-structure monolithique linéarisé.

Nous proposons un deuxième préconditionnement basé sur une résolution fluide par un méthode de type projection. Cela nous mène à une itération dans laquelle la vitesse du fluide est découplée de la pression et la condition d'incompressibilité est relaxée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^s(\mathbf{d}_{k+1})\mathbf{n}^s = -\sigma^f(\mathbf{u}_k, p_k)\mathbf{n}^f \quad \text{sur } \Sigma, \\ \mathbf{u}_{k+1} = \frac{\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}^n}{\tau} \quad \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\tau}{\rho^f}\Delta p_{k+1} = \frac{\tau}{\rho^f}\Delta p_k + \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1} \quad \text{dans } \Omega^f \\ \frac{\tau}{\rho^f} \frac{\partial p_{k+1}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\alpha}{\tau} p_{k+1} = \frac{\tau}{\rho^f} \frac{\partial p_k}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\alpha}{\tau} p_k \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right. \quad (3)$$

La condition de Robin agit ici sur la pression et pas sur la vitesse. Autres préconditionnements alternatifs seront aussi discutés. Les figures suivantes illustrent la sensibilité de ces algorithmes aux densités du fluide et du solide.



Malgré la robustesse du couplage Robin-Neumann (Algorithme 2) par rapport à l'algorithme classique Dirichlet-Neumann (Algorithme 1) ([4]), les résultats numériques montrent que l'efficacité de cet algorithme peut être compromise pour des faibles valeurs de la densité du solide. En revanche, les préconditionneurs comportant une relaxation de l'incompressibilité (Algorithme 3) se montrent plus robustes.

Références

- [1] P. Le Tallec and J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190 :3039–3067, 2001.
- [2] U. Küttler and W.A. Wall. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Comput. Mech.*, 43(1) :61–72, 2008.
- [3] P. Causin, J.-F. Gerbeau, and F. Nobile. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(42–44) :4506–4527, 2005.
- [4] S. Badia, F. Nobile, and C. Vergara. Fluid-structure partitioned procedures based on Robin transmission conditions. *J. Comp. Phys.*, 227 :7027–7051, 2008.
- [5] H.J. Stetter. The defect correction principle and discretization methods. *Numer. Math.*, 29 :425–443, 1978.
- [6] S. Badia, A. Quaini, and A. Quarteroni. Splitting methods based on algebraic factorization for fluid-structure interaction. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(4) :1778–1805, 2008.
- [7] F. Nobile and C. Vergara. An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalized Robin conditions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(2) :731–763, 2008.