

## Algorithme rapide et adaptatif pour le problème inverse de milieu en élastodynamique 3-D, avec fréquences et sources multiples

S. Chaillat<sup>1</sup>, G. Biros<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CSE, Georgia Institute of Technology, USA, {stephanie.chaillat,gbiros}@cc.gatech.edu

**Résumé** — On considère l'inversion des équations de l'élastodynamique 3-D. Le problème direct est formulé sous la forme d'une équation intégrale où seules les petites perturbations du milieu de référence sont considérées (approximation de Born). La résolution de ce problème en calculant la décomposition en valeurs singulières de la matrice du système aurait un coût prohibitif. Un algorithme rapide et adaptatif en espace est proposé pour diminuer drastiquement le nombre d'opérations et le coût mémoire.

**Mots clés** — problème inverse, algorithme adaptatif, élastodynamique 3-D.

### 1 Contexte

On considère l'inversion des équations de l'élastodynamique 3-D dans un milieu amortissant lorsque plusieurs sources et fréquences sont utilisées pour générer les données (Fig. 1). Ce type de problème trouve des applications dans de nombreux domaines comme par exemple en géophysique. Le problème direct est formulé sous la forme d'une équation intégrale où seules les petites perturbations du milieu de référence sont considérées (approximation de Born). Sous ces conditions, le problème inverse est un problème de moindres carrés mal-posé. Une approche possible pour sa résolution consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières tronquée (SVD pour Singular Value Decomposition en anglais). Si  $N_\omega$  est le nombre de fréquences d'excitation,  $N_s$  le nombre d'ondes incidentes,  $N_d$  le nombre de détecteurs, et  $N$  le nombre de points de la discrétisation du support, une SVD directe aurait un coût de l'ordre de  $[\min(N_s N_\omega N_d, N)]^2 \times \max(N_s N_\omega N_d, N)$ . Un algorithme rapide est proposé pour diminuer ce coût à  $O(NN_\omega N_s + NN_\omega N_d)$ . Ceci correspond en pratique à un gain de plusieurs ordres de grandeur. Une méthode adaptative en espace est également développée pour optimiser le ratio entre la précision et le nombre de points de la discrétisation spatiale.

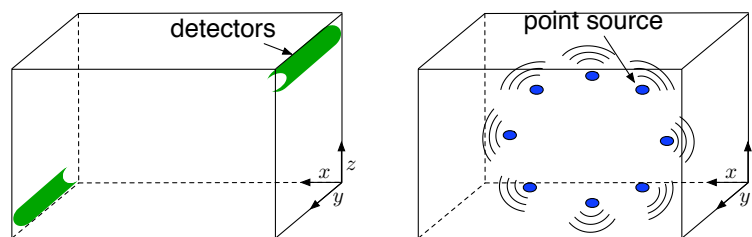


FIGURE 1 – Les données proviennent des mesures des champs diffractés dus à plusieurs sources ponctuelles illuminant la région d'intérêt à différentes fréquences. Les détecteurs sont fixes et peuvent être positionnés de manière arbitraire dans tout le domaine.

### 2 FaIMS

**Algorithme proposé pour l'inversion.** Dans [1] un algorithme rapide a été développé pour résoudre le problème inverse de milieu pour l'équation des ondes scalaire en 3-D. La méthode est ici étendue à l'élastodynamique 3-D. La contribution majeure est la construction d'une approximation de la SVD de l'opérateur  $\mathbf{M}$ . Cette méthode conjugué :

- un algorithme aléatoire pour factoriser et déterminer le rang d’une matrice [3] ;
- un pré-traitement du champs incident  $u$ , basé sur la SVD, transformant le champs incident et les données afin de réduire la dimension de  $N_s$  ;
- une SVD permettant de calculer la SVD de  $\mathbf{M} = [\mathbf{M}_1 \ \mathbf{M}_2]^t$  à partir des SVDs de  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$ .

Le premier avantage de cette approximation de la factorisation en SVD de  $\mathbf{M}$  est qu’elle a une complexité totale de l’ordre de  $O(N_\omega NN_d + N_\omega NN_s)$ . De plus, cet algorithme est totalement générique. Il permet donc de traiter des distributions de sources et de détecteurs arbitraires.

L’idée principale repose sur la décomposition de la matrice  $\mathbf{M}$  en  $N_\omega$  sous-matrices  $\mathbf{M}^\omega$  de taille  $N_s N_d \times N$  ( $1 \leq \omega \leq N_\omega$ ). La SVD de chaque sous-matrice est calculée à l’aide de la SVD aléatoire proposée dans [3]. Une approximation faible rang est effectuée afin de compresser la matrice et ainsi réduire le nombre d’opérations. Les SVDs des  $\mathbf{M}^\omega$  sont combinées pour approcher la SVD de  $\mathbf{M}$  en utilisant la SVD récursive. Le pseudo-inverse de  $\mathbf{M}$  peut alors facilement être calculé. Cet algorithme est mis en oeuvre numériquement dans le code FaIMS.

**Algorithme adaptatif en espace.** L’utilisation d’une discrétisation spatiale uniforme de l’espace est sous-optimale pour résoudre le problème inverse. De plus, la complexité de l’algorithme FaIMS est linéaire selon  $N$ . Une version adaptative en espace est ici proposée. Cet algorithme est basé sur l’utilisation d’une octree. Dans chaque cellule, un critère de convergence est utilisé pour déterminer les cellules à raffiner. Il est ainsi possible de déterminer itérativement, en partant d’une grille grossière, les régions de l’espace où plus de points sont nécessaires (Fig. 2). Le critère de convergence est défini en étendant la méthode proposée dans [2] pour détecter des sauts de discontinuité dans des fonctions régulières par morceaux.

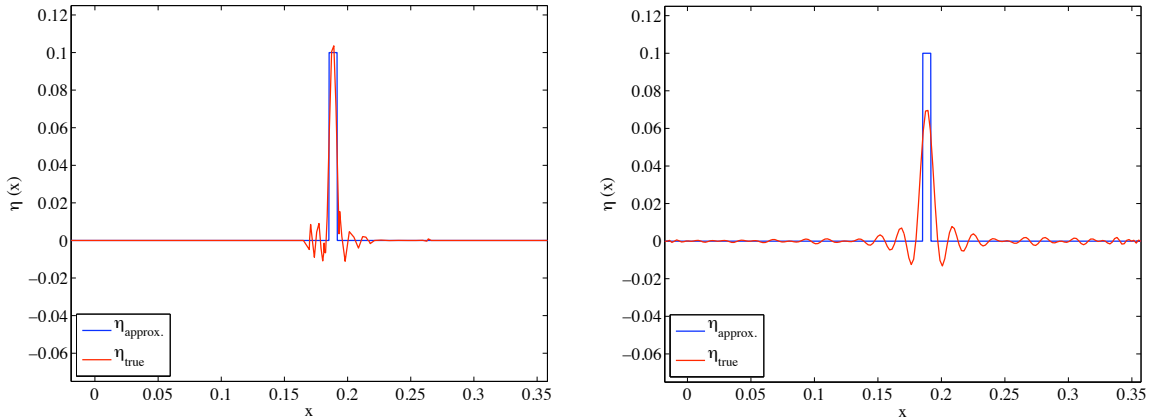


FIGURE 2 – Détection d’une inhomogénéité de taille  $0.2\lambda$  dans une boîte de taille  $12\lambda$  avec une grille adaptée de 60 points à gauche, avec une grille uniforme de 200 points à droite.

## Références

- [1] S. Chaillat, G. Biros. *FaIMS : A fast algorithm for the inverse medium problem with multiple frequencies and multiple sources for the scalar Helmholtz equation*. Journal of Computational Physics, soumis.
- [2] A. Gelb, E. Tadmor. *Detection of edges in spectral data II. Non linear enhancement*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 38 :1389–1408, 2001.
- [3] P.G. Martinsson, V. Rokhlin, and M. Tygert. *A randomized algorithm for the approximation of matrices*. Technical Report YALEU/DCS/RR-1361, Yale CS, 2006.
- [4] J.C. Schotland and V.A. Markel. *Inverse scattering with diffusing waves*. J. Opt. Soc. Am. A., 18 :2767–2777, 2001.