

# Méthode PGD pour l'homogénéisation numérique à partir d'images de haute résolution.

L. Giraldi, G. Legrain, A. Nouy, P. Cartraud

*GeM, Ecole Centrale Nantes, France, {Loic.Giraldi, Gregory.Legrain, Anthony.Nouy, Patrice.Cartraud}@ec-nantes.fr*

**Résumé** — Une méthode d'homogénéisation rapide d'images de haute résolution est proposée ici. Pour cela, la Décomposition aux Valeurs Singulières (SVD) et la Décomposition Généralisée aux Valeurs Propres (PGD) sont combinées pour obtenir une représentation séparée en espace du problème. A partir d'une image segmentée, la SVD permet de la représenter sous une forme tensorisée compatible avec des méthodes de résolution PGD. Nous présentons l'approche utilisée pour condenser la représentation de la géométrie et la prise en compte des conditions aux limites.

**Mots clés** — Image, Homogénéisation, SVD, PGD, Réduction de modèle

## 1 Introduction

L'homogénéisation [1] est la caractérisation des propriétés effectives d'un matériau par la résolution de problèmes posés sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER) généralement résolu par éléments-finis. Afin d'améliorer le processus d'homogénéisation, des géométries plus précises peuvent être employées en tirant profit des techniques d'imagerie récentes comme la microtomographie. Avec un maillage "voxel-based" (ie un élément fini par voxel), le nombre de degrés de liberté devient prohibitif, typiquement  $10^6$  pour un problème en thermique sur une image  $1000 \times 1000$ . Les méthodes conventionnelles de résolution sont alors limitées.

Si par contre la solution est approchée par une formulation séparée en espace grâce à la SVD et la PGD [2], Le système à résoudre passe de  $10^6$  degrés de liberté à 2 problèmes de 1000 inconnues, solubles sur un PC. Cette approximation se déroule en deux étapes : la séparation de la géométrie et de la solution. La SVD permet de réaliser la première tâche et de réduire l'information contenue dans l'image. Ensuite la PGD est utilisée dans les problèmes d'homogénéisation où la prise en compte des conditions limites de Dirichlet, périodiques et de Neumann sont traitées.

## 2 Séparation de géométries complexes

La SVD permet de séparer une image connue  $I$  comme une somme de produits tensoriels de vecteurs

$$I = \sum_{i=1}^N \sigma_i U_i \otimes V_i \quad (1)$$

où  $\sigma_i$  est un scalaire,  $U_i$  représente une dimension de l'image et  $V_i$  l'autre dimension. En considérant  $I$  comme étant une image binaire représentant les propriétés des matériaux, il est nécessaire de condenser l'écriture (1) afin d'accélérer les calculs de la méthode PGD. Pour ce faire, nous proposons de tronquer la SVD d'une image  $I_r$  qui est l'image  $I$  régularisée au niveau des interfaces matériaux. Le lissage permet de diminuer le nombre de modes nécessaires à une bonne représentation de la géométrie en supprimant les sauts de propriétés.

Il est cependant à l'origine d'une approximation de la géométrie qu'il convient de contrôler par un choix approprié des paramètres de régularisation.

### 3 Séparations des équations d'homogénéisation et conditions limites

La PGD est une technique de réduction de modèle a priori basée sur la séparation de variables. En considérant le champ  $u$  comme le champ solution du problème d'homogénéisation, nous introduisons une approximation de rang  $m$   $u_m$  sous forme séparée telle que

$$u_m(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \omega_1^i(x_1) \otimes \omega_2^i(x_2) \quad (2)$$

Avec une image de taille  $1000 \times 1000$ , en construisant progressivement l'approximation mode par mode à l'aide d'un algorithme du point fixe, nous devons alors effectivement résoudre 2 problèmes de taille 1000 plutôt qu'un seul problème de  $10^6$  degrés de liberté. Les conditions aux limites de Dirichlet sont prises en compte via l'introduction de modes artificiels dans l'approximation. Ceux-ci satisfont les conditions aux bords, la résolution se fait alors sur un problème homogène. Pour les cas périodiques et de Neumann, les mouvements de solides rigides sont bloqués par une méthode de pénalisation.

### 4 Résultats et discussion

Nous avons proposé une méthode permettant de résoudre des problèmes d'homogénéisation sur des images de haute résolution. Celle-ci a été testée sur différents cas issus de la littérature comme pour un matériau à deux couches, ou une fibre incluse dans une matrice. Une image plus complexe de taille  $513 \times$

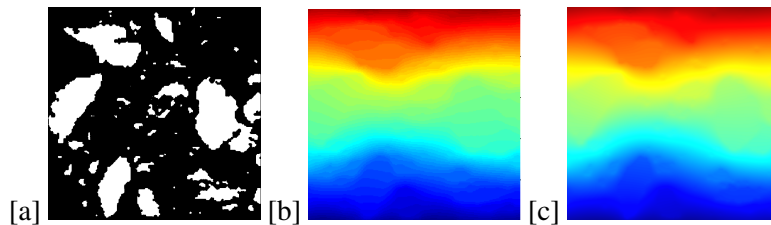


FIGURE 1 – Allure du champ de température en homogénéisation périodique sur une image de taille  $513 \times 513$  : [a] – Géométrie [b] – Solution PGD [c] – Solution X-FEM

513 a été utilisée pour aller plus loin. La géométrie est décrite sur la figure 1a. Le calcul de référence a été réalisé avec la méthode X-FEM où la géométrie est représentée par une levelset. Le problème traité est celui de l'homogénéisation périodique de la conductivité thermique. Celle de l'inclusion est fixée à  $10\text{W/m/K}$  et celle de la matrice à  $1\text{W/m/K}$ . Les champs de températures pour un gradient macroscopique imposé sont donnés dans les figures 1 b et c. Le nombre de modes utilisé pour la SVD est de 499 et de 200 pour la PGD. Avec les valeurs des conductivités thermiques (en  $\text{W/m/K}$ )  $C_{PGD}$  et  $C_{X-FEM}$  et l'erreur relative entre les deux méthodes  $e_r$  termes à termes.

$$C_{PGD} = \begin{pmatrix} 1.6524 & 0.0227 \\ 0.0227 & 1.7132 \end{pmatrix} \quad C_{X-FEM} = \begin{pmatrix} 1.5661 & 0.0220 \\ 0.0220 & 1.6198 \end{pmatrix} \quad e_r = \begin{pmatrix} 5.51\% & 3.31\% \\ 3.31\% & 5.77\% \end{pmatrix}$$

nous pouvons observer une bonne adéquation entre la résolution X-FEM complète et le couplage SVD/PGD. Les différents exemples traités montrent que la principale source d'erreur de cette méthode SVD PGD provient de l'approximation de la géométrie.

### Références

- [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, Elsevier Science Ltd, 1978
- [2] A. Nouy. *A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, Volume 199, Issues 23-24, 2010, Pages 1603-1626