



HAL
open science

Méthode PGD pour l'homogénéisation numérique à partir d'images de haute résolution.

Loïc Girdali, Grégory Legrain, Anthony Nouy, Patrice Cartraud

► **To cite this version:**

Loïc Girdali, Grégory Legrain, Anthony Nouy, Patrice Cartraud. Méthode PGD pour l'homogénéisation numérique à partir d'images de haute résolution.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592788

HAL Id: hal-00592788

<https://hal.science/hal-00592788>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode PGD pour l'homogénéisation numérique à partir d'images de haute résolution.

L. Giraldi, G. Legrain, P. Cartraud, A. Nouy

LUNAM Université, GeM, UMR CNRS 6183, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, France
{Loic.Giraldi,Gregory.Legrain,Patrice.Cartraud,Anthony.Nouy}@ec-nantes.fr

Résumé — On propose une méthode rapide pour l'homogénéisation de matériaux hétérogènes à partir d'images de haute résolution. Cette méthode est basée sur une méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) pour la construction d'une représentation séparée en variables d'espace de la solution. A partir d'une image segmentée, une décomposition en valeurs singulière (SVD) permet d'obtenir sa représentation sous une forme tensorisée compatible avec des méthodes de résolution PGD. Nous présentons ici l'approche utilisée pour condenser la représentation de la géométrie ainsi que la prise en compte des conditions aux limites dans un cadre séparé.

Mots clés — Image, Homogénéisation, SVD, PGD, Réduction de modèle

1 Introduction

Les propriétés effectives d'un matériau hétérogène sont classiquement obtenues par une procédure d'homogénéisation. Celle-ci passe par la résolution de problèmes posés sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), résolu généralement par une méthode des éléments finis.

Pour résoudre les problèmes d'homogénéisation, des modèles géométriques de microstructures de matériaux sont généralement utilisés. Par exemple, un composite à fibres unidirectionnelles est souvent représenté par une répartition périodique de fibres, ce qui est très rarement le cas dans la réalité. Des géométries plus précises peuvent être employées en tirant profit des techniques récentes d'imagerie comme la microtomographie. Une fois la géométrie acquise après segmentation, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour générer le modèle.

La première consiste à générer un maillage "voxel-based" (*i.e.* un élément fini par voxel ou groupe de voxels) [9, 10], ce qui présente l'inconvénient de conduire à un grand nombre de degrés de liberté, typiquement 10^9 pour un problème de simulation thermique sur une image de $1000 \times 1000 \times 1000$ voxels. Les méthodes conventionnelles de résolution sont alors limitées par la taille du problème à traiter. Dans le cas où les voxels sont regroupés, l'image devient sous-échantillonnée, les frontières sont encore plus pixelisées et le modèle géométrique fortement dégradé. Une autre manière d'aborder le problème consiste à extraire les informations géométriques de l'image, puis à créer un maillage à partir de ces données [14]. Cette méthode a l'avantage de lisser la géométrie et de diminuer le nombre de degrés de liberté du problème mais elle peut être difficile à mettre en place en 3D. Une autre approche consiste à utiliser la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [12]. Les interfaces matériaux sont représentées par des level-sets, et le maillage est régulier (mais non "voxel-based") avec un déraffinement automatique octree loin des frontières [11]. Cette méthode, en plus de fournir un maillage simple, s'interface particulièrement bien avec des outils de segmentation d'image s'appuyant sur les level-sets [7]. De plus, les interfaces conservent des propriétés de régularité. Cependant, la taille des problèmes reste importante.

La méthode proposée ici consiste à rechercher une approximation de la solution du problème d'homogénéisation sous la forme d'une représentation séparée en variables d'espace. Cette représentation est ici construite par une méthode Proper Generalized Decomposition [1, 5]. Pour une image de taille $1000 \times 1000 \times 1000$ voxels, on passe ainsi de la résolution d'un problème de taille 10^9 à une la résolution d'une séquence de problèmes unidimensionnels de taille 1000, ce qui conduit à des gains considérables en temps de résolution et stockage mémoire. La mise en oeuvre de cette méthode requiert une première étape où la géométrie est représentée sous forme séparée grâce à une méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD).

Dans cet article, on présente la méthode dans le cas de l'homogénéisation des propriétés thermiques d'un matériau composite bidimensionnel. Dans la première section, on présente brièvement la technique d'homogénéisation périodique basée sur les développements asymptotiques [2]. On présente ensuite la méthode PGD et les différents ingrédients nécessaires à sa mise oeuvre dans le cas présent : SVD de l'image (accélération de convergence par régularisation de l'image) et prise en compte de divers types de conditions aux limites. Finalement, des applications seront présentées.

2 Homogénéisation périodique par développement asymptotique

Nous présentons ici le principe de l'homogénéisation sur le cas particulier de l'homogénéisation périodique par développement asymptotique. Considérons un milieu périodique composé de la répétition d'une structure microscopique Ω appelée cellule de base. L'équation de conduction de la chaleur en état stationnaire sans source interne s'écrit

$$\nabla \cdot (C(z)\nabla T(z)) = 0 \quad (1)$$

où z est la position du point considéré, C la conductivité thermique et T la température. Soit x la variable macroscopique, y la variable microscopique, et ε le rapport d'échelle tel que $y = x/\varepsilon$. Un changement de variables et un développement asymptotique en ε permet d'écrire

$$T(z) = T(x, y) = T^0(x, y) + \varepsilon T^1(x, y) + \varepsilon^2 T^2(x, y) + o(\varepsilon^2) \quad (2)$$

où les fonctions T^0 , T^1 et T^2 sont Ω -périodiques. En introduisant le développement dans (1) et en identifiant les puissances de ε , le tenseur de conductivité thermique homogénéisé est obtenu par l'expression suivante :

$$C_{im}^{hom} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(C_{im} - C_{ij} \frac{\partial \chi^m}{\partial y_j} \right) dy \quad (3)$$

où $\chi^m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ microscopique Ω -périodique, solution du problème suivant défini sur la cellule Ω :

$$\nabla_y \cdot (C(y)\nabla_y(\chi^m(y) - P^m(y))) = 0 \quad (4)$$

avec $P^m(y) = y_m$. La formulation faible du problème (4) s'écrit

$$\chi^m \in H_{per}^1(\Omega), \quad a(\chi^m, v) = l^m(v) \quad \forall v \in H_{per}^1(\Omega) \quad (5)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla_y u \cdot C \cdot \nabla_y v dy \quad \text{et} \quad l^m(v) = a(P^m, v) \quad (6)$$

Seule l'homogénéisation périodique a été présentée. Néanmoins pour des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, la formulation variationnelle du problème possède la même forme [8].

3 Représentations en variables séparées

3.1 Approximation en variables séparées

Le sujet d'étude étant une image 2D, considérons un domaine $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ où Ω_x et Ω_y sont des domaines 1D correspondant à la largeur et à la hauteur de l'image. Soit u une fonction de Ω dans \mathbb{R} correspondant à un champ d'intérêt, par exemple C pour la conductivité, ou χ pour le champ de température microscopique dans le cas du paragraphe 2. Une approximation séparée de rang m de u s'écrit sous la forme :

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^m \omega_i^x(x) \omega_i^y(y) \quad (7)$$

où les termes $\omega_i^x \otimes \omega_i^y$ sont appelés modes de la représentation. Une définition possible de cette représentation consiste à définir progressivement les modes par des problèmes de meilleure approximation :

$$(\omega_1^x, \omega_1^y) = \underset{\omega^x, \omega^y}{\operatorname{argmin}} \|u - \omega^x \otimes \omega^y\| \quad (8)$$

... = ...

$$(\omega_m^x, \omega_m^y) = \underset{\omega^x, \omega^y}{\operatorname{argmin}} \|u - \sum_{i=1}^{m-1} \omega_i^x \otimes \omega_i^y - \omega^x \otimes \omega^y\| \quad (9)$$

où $\|\cdot\|$ est une certaine norme sur \mathbb{R}^Ω . La décomposition (7) qui en résulte dépend du choix de la norme. Pour une fonction $u \in L^2(\Omega_x) \otimes L^2(\Omega_y)$, et si on choisit la norme naturelle de L^2 , u_m correspond à la décomposition aux valeurs singulières de u de rang m . Un choix plus général de norme conduit à une décomposition qui peut encore s'interpréter comme une décomposition aux valeurs singulières généralisée [5].

3.2 Méthode PGD

La méthode PGD consiste à choisir une définition de la décomposition (7) qui soit calculable sans connaître directement la solution u mais uniquement l'équation qu'elle résout. Cela conduit à une représentation qui peut s'interpréter comme une décomposition en valeurs singulières généralisée mais dont la définition permet sa construction *a priori*. Plusieurs définition de PGD ont été proposées (Galerkin, Minimal Residual, Minimax,...) (voir par exemple [13]).

Considérons un problème du type (5) qui définit une solution u dans un espace produit $V_x \otimes V_y$ satisfaisant $a(u, v) = l(v)$ pour tout $v \in V_x \otimes V_y$, avec a une forme bilinéaire continue coercive et symétrique. Pour la résolution de ce problème, un choix possible consiste à définir progressivement la décomposition (7) à partir de la séquence de problèmes (8)-(9), en choisissant la norme induite par a , i.e. $\|v\|^2 = a(v, v)$. Cela correspond à la méthode PGD progressive de type Galerkin.

Le problème (9) définissant le meilleur mode m peut être résolu par un algorithme de minimisation alterné, consistant à minimiser successivement sur ω^x puis ω^y . La minimisation sur ω^y à ω^x fixé correspond à la résolution du problème suivant :

$$a(\omega^x \otimes \omega^y, \omega^x \otimes \omega^{y*}) = l(\omega^x \otimes \omega^{y*}) - \sum_{i=1}^{m-1} a(\omega_i^x \otimes \omega_i^y, \omega^x \otimes \omega^{y*}) \quad \forall \omega^{y*} \in V_y \quad (10)$$

En introduisant une approximation éléments finis, nous obtenons un système d'équation sur le vecteur des inconnus $\{\omega^y\}$ associé à $\omega^y \in V_y$:

$$[A_{\omega^x}]\{\omega^y\} = \{B_{\omega^x}\} \quad (11)$$

De même, la minimisation sur ω^x à ω^y fixé, après approximation éléments finis, conduit à un système

$$[A_{\omega^y}]\{\omega^x\} = \{B_{\omega^y}\} \quad (12)$$

On obtient ainsi l'algorithme suivant pour le calcul d'un nouvel élément $\omega_m^x \otimes \omega_m^y \simeq \{\omega^x\}\{\omega^y\}^T$. Dans

Algorithm 1 Algorithme de minimisation alternée

Initialiser $\{\omega^x\}$ (aléatoirement)

while Méthode non convergée **or** Nombre d'itérations maximum non atteint **do**

 Calculer $\{\omega^y\} = [A_{\omega^x}]^{-1}\{B_{\omega^x}\}$

 Calculer $\{\omega^x\} = [A_{\omega^y}]^{-1}\{B_{\omega^y}\}$

 Vérifier la convergence de $\{\omega^x\}\{\omega^y\}^T$

end while

la présente application, l'avantage de cette approche est que si Ω est une image de 1000×1000 pixels et que l'approximation éléments finis est de même résolution que l'image, l'algorithme ci-dessus nécessite la résolution d'une succession de problèmes de taille 1000. Une approche classique nécessiterait

une résolution d'un problème de taille 10^6 . Il est à noter que la convergence de l'algorithme est généralement atteinte rapidement (quelques itérations) et que le nombre de modes nécessaires à une bonne approximation de la solution reste faible dans les présentes applications. Ceci implique que la méthode est très compétitive par rapport à une méthode FEM classique. De plus, la complexité de l'algorithme croît linéairement avec la dimensionnalité du problème ce qui rend la méthode très avantageuse dans le cas de problèmes de plus grande dimension (e.g. problèmes sur image 3D) ¹.

3.3 SVD pour la représentation séparée des propriétés matériaux

Afin de rendre la méthode PGD efficace, les formes variationnelles doivent être sous forme séparée. Dans le cas présent, la conductivité thermique du composite doit donc être également représentée sous forme séparée :

$$C(x, y) \approx \sum_k \sigma_k u_k(x) v_k(y) \quad (13)$$

On considère ici que le champ de conductivité est donné par une image représentée par une matrice $C = (C_{ij})$ de taille $M \times N$. Le champ de conductivité s'écrit sous la forme $C(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \varphi_i(x) \phi_j(y) C_{ij}$, où $\{\varphi_i\}$ et $\{\phi_j\}$ sont des bases d'interpolations. Afin d'obtenir (13), on introduit ici une version algébrique de la SVD décrite dans la section 3.1, qui consiste à décomposer la matrice C sous la forme $C = U \Sigma V^T$, où U est une matrice orthogonale de taille $M \times M$, V est une matrice orthogonale de taille $N \times N$ et Σ est une matrice diagonale de taille $M \times N$ à valeurs réelles positives dont les termes diagonaux sont les valeurs singulières de C . Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_R$ les R valeurs singulières non nulles, classées par ordre décroissant, et notons U_1, \dots, U_R et V_1, \dots, V_R les vecteurs singuliers correspondant (colonnes de U et V). La matrice C peut alors s'écrire

$$C = \sum_{k=1}^R \sigma_k U_k V_k^T \quad (14)$$

ce qui conduit à l'expression (13) avec $u_k(x) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) U_{ik}$ et $v_k(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) V_{jk}$. La vitesse globale de la résolution du problème par la méthode PGD dépend du nombre de modes nécessaires à la bonne représentation de l'image, c'est-à-dire le nombre de modes dans la décomposition (14). Un moyen de le diminuer consiste tout d'abord à tronquer la sommation en ne retenant que r modes. D'après le théorème d'Eckart-Young, $\sum_{k=1}^r \sigma_k U_k V_k^T$ est la meilleure approximation de rang r de la matrice C , au sens de la norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$. Cette approximation est très utile si $r \ll R$ et que l'estimation de C reste bonne. La qualité de l'approximation peut être contrôlée en calculant l'erreur $\|C - \sum_{i=1}^r \sigma_i U_i V_i^T\|_F$.

La valeur de r est aussi fortement influencée par les sauts de propriétés matériaux aux interfaces (gradients de l'image). Pour remédier à ce problème, l'image est légèrement lissée au préalable. En pratique, l'image permet d'obtenir une level-set d dont l'iso-0 représente les interfaces. L'image lissée est alors définie par

$$C_{lisse} = C_{min} + \frac{1}{2} (C_{max} - C_{min}) \left(1 + \tanh\left(\frac{2d}{\delta}\right)\right) \quad (15)$$

où C_{min} (resp. C_{max}) représente la conductivité minimale (resp. maximale) des composants du bimatériau, et δ une longueur caractéristique. Ce lissage est illustré sur la figure 3. L'efficacité de la troncature et du lissage sur le nombre de modes nécessaire à une bonne représentation est illustrée par la figure 2, où la SVD a été appliquée à une géométrie complexe. La séparation a été contrôlée en erreur sur la norme de Frobenius. Comme le montre la figure 2, pour une erreur donnée de 10^{-3} en norme de Frobenius, le nombre de termes nécessaire à la bonne représentation d'un champ diminue fortement avec le lissage. Dans le cas présenté ci-dessus, r diminue de 33.5% pour une image quasiment non altérée.

Cette SVD tronquée de l'image lissée est la représentation que nous utilisons dans l'approche présentée ici. Notons que des extensions multidimensionnelles de la SVD existent [3, 4, 6] et qu'elles peuvent être utilisées pour la représentation des images 3D.

1. La méthode, présentée ici dans le cas 2D, s'étend naturellement à la construction de représentations de champs scalaires définis sur des domaines de dimension supérieure [5] et de champs vectoriels.

FIGURE 1 – Lissage de la conductivité aux interfaces

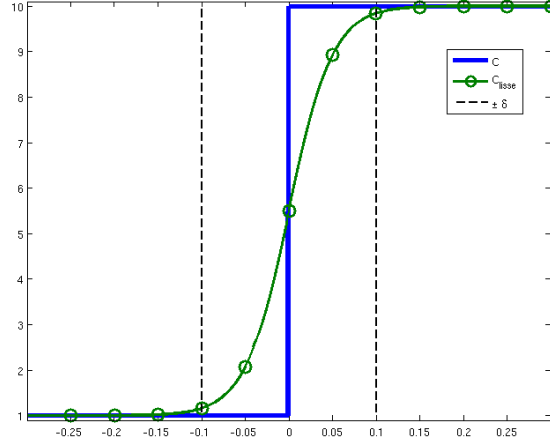
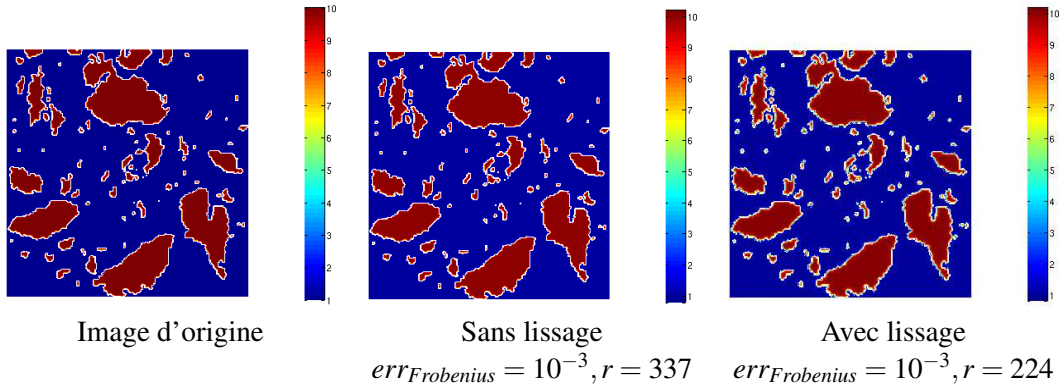


FIGURE 2 – Influence de la troncature et du lissage sur la séparation de la géométrie



3.4 Prise en compte des conditions aux limites

La dernière étape avant la résolution du problème concerne la prise en compte des conditions aux limites dans le contexte des problèmes d'homogénéisation. On présente ici les cas des conditions de Dirichlet (équivalent à KUBC en homogénéisation mécanique), de Neumann (équivalent SUBC en homogénéisation mécanique) et périodiques.

3.4.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Dans le cas de Dirichlet, la température sur la frontière du domaine doit être de gradient uniforme, choisi unitaire ici. Pour le domaine 2D, le choix a été fait d'imposer $T_{CL}(x, y) = x$ ou $T_{CL}(x, y) = y$ sur le bord de la cellule $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$. Ces formules sont directement sous forme séparée. Comme le champ de température est recherché sous la forme $T = \sum_{i=1}^m \omega_i^x \otimes \omega_i^y$, en imposant les conditions suivantes

$$(\omega_1^x \otimes \omega_1^y)(x, y) = T_{CL}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial(\Omega_x \times \Omega_y), \quad (16)$$

$$(\omega_i^x \otimes \omega_i^y)(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial(\Omega_x \times \Omega_y), \quad \forall i \geq 2, \quad (17)$$

le champ T satisfait les conditions souhaitées sur le bord. Pour réaliser ces conditions, il suffit de prolonger T_{CL} du bord à l'ensemble du domaine et de fixer le premier mode $(\omega_1^x \otimes \omega_1^y) = T_{CL}$. On impose ensuite pour les modes suivants des conditions homogènes de Dirichlet : pour $i \geq 2$, $\omega_i^x = 0$ sur $\partial\Omega_x$ et $\omega_i^y = 0$ sur $\partial\Omega_y$.

3.4.2 Conditions aux limites périodiques

Ceci correspond au cas du paragraphe 2. Pour imposer que le champ $\chi = \sum_{i=1}^m \omega_i^x \otimes \omega_i^y$ soit périodique sur $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, remarquons que les conditions suivantes sont suffisantes : pour tout $i \geq 1$,

$$\omega_i^x \text{ est } \Omega_x\text{-périodique, } \omega_i^y \text{ est } \Omega_y\text{-périodique} \quad (18)$$

Les termes P^m du paragraphe 2 correspondent aux différents cas T_{CL} de la section 3.4.1, et sont donc naturellement sous forme séparée. Finalement, afin de trouver une solution particulière à moyenne nulle du problème, la formulation (5) est modifiée de la manière suivante, avec $\varepsilon > 0$:

$$a(\chi^m, v^*) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} v^* \int_{\Omega} \chi^m = l^m(v^*) \quad \forall v^* \in H_{per}^1(\Omega_x \times \Omega_y) \quad (19)$$

3.4.3 Conditions aux limites de Neumann

Ce cas ne pose pas de difficulté particulière. Les flux homogènes aux frontières sont explicitement sous forme séparée. Une solution particulière est de nouveau obtenue en introduisant une formulation faible du type (19).

4 Applications

Dans cette partie, la méthode est illustrée par deux exemples : une fibre incluse dans une matrice et l'utilisation d'une géométrie complexe.

4.1 Homogénéisation d'une fibre dans une matrice

Le matériau de référence utilisé ici est un composite à microstructure périodique dont on considère un volume représentatif constitué d'une fibre incluse dans une matrice. Le domaine du calcul est de taille $1 \times 1 m^2$. La fraction volumique d'inclusions est de $V_f = 35\%$, ce qui fait un rayon de fibre de $0.3338 m$. La conductivité thermique de la fibre est de $C_f = 10 W/m/K$ et celle de la matrice de $C_m = 1 W/m/K$. La valeur de la conductivité de référence est calculée par la méthode FEM pour une image de taille 100×100 . Les éléments sont "pixel-based" et les propriétés matériaux aux interfaces sont interpolées linéairement sur un maillage éléments finis. La méthode proposée est appliquée sur cette même image.

En ce qui concerne la séparation de la géométrie, le lissage s'effectue sur une longueur de $\delta = 1$ pixel, c'est-à-dire sur une distance de $10^{-2} m$. Son effet reste ainsi négligeable devant la taille de l'inclusion. En imposant ensuite une erreur de 10^{-5} pour la SVD, la géométrie est représentée avec une formulation séparée contenant 22 modes, ce qui est très faible. Une comparaison est faite avec une image non séparée ($\delta = 0$). Les 3 types de conditions aux limites sont testés.

Un des modes de sollicitation du cas périodique est présenté dans la figure 3, pour les cas FEM et approximation PGD avec géométrie lissée. Les champs de températures sont très similaires entre les deux types de résolution. En ce qui concerne les valeurs des propriétés homogénéisées, les valeurs obtenues sont présentées et comparées aux valeurs de référence dans la table 1. Dans tous les cas, les approches FEM et PGD donnent quasiment la même valeur homogénéisée, avec une erreur relative en norme L^2 inférieure à 3%. La légère différence entre les deux méthodes provient essentiellement du lissage de la géométrie. Le matériau est en effet légèrement dégradé par ce lissage. Cette hypothèse est confirmée par des calculs sans lissage de la géométrie, où l'erreur relative sur la conductivité thermique ne dépasse pas 0.2% pour les trois types de conditions aux limites et une décomposition de rang $m = 200$. Il est à noter que 50 modes suffisent pour une bonne représentation de la solution. Néanmoins, plus de modes sont nécessaires pour l'homogénéisation avec les conditions aux limites de Neumann. Les résultats provenant de l'approche proposée dans cet article sont très satisfaisants et constituent de ce fait une validation de celle-ci.

4.2 Application à une géométrie complexe de microstructure

Dans cette partie, la géométrie d'intérêt est celle illustrée dans la figure 2. L'image est ici de taille 512×512 . Le calcul de référence a été réalisé avec la méthode X-FEM sur le même maillage où la géo-

FIGURE 3 – Comparaison des solutions périodiques

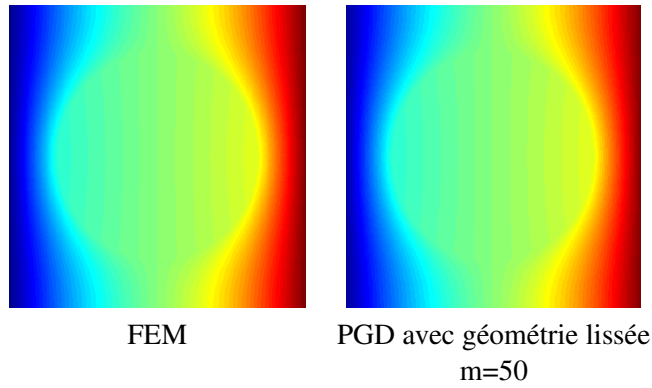
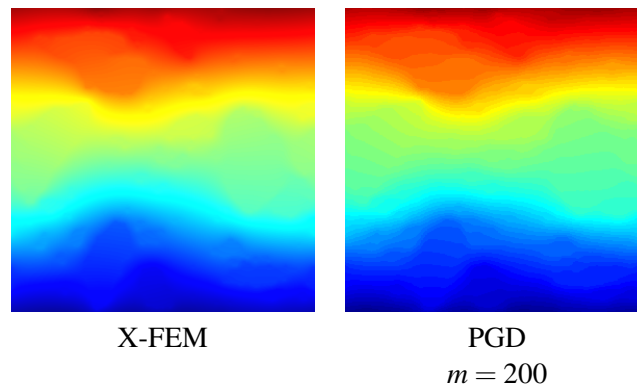


TABLE 1 – Comparaison des conductivités thermiques homogénéisées (C_{11})

Type de conditions aux limites	PGD						FEM	Erreur relative
	m	10	50	100	150	200		
Neumann	$\delta = 1\text{pixel}$	2.003	1.856	1.852	1.851	1.851	1.807	2.43%
	$\delta = 0$	1.978	1.852	1.814	1.807	1.806	1.807	0.06%
Périodique	$\delta = 1\text{pixel}$	1.896	1.891	1.891	1.891	1.891	1.843	2.60%
	$\delta = 0$	1.858	1.841	1.840	1.840	1.840	1.843	0.16%
Dirichlet	$\delta = 1\text{pixel}$	1.931	1.925	1.925	1.925	1.925	1.871	2.89%
	$\delta = 0$	1.892	1.872	1.871	1.871	1.871	1.871	0

métrie est représentée par une levelset. Le problème traité est celui de l'homogénéisation périodique. La conductivité de l'inclusion est fixée à $C_{inclusion} = 10 \text{ W/m/K}$ et celle de la matrice à $C_{matrice} = 1 \text{ W/m/K}$. Les champs de températures pour un gradient macroscopique imposé sont donnés dans la figure 4. Le

FIGURE 4 – Comparaison des solutions périodiques



nombre de modes utilisé pour la SVD est de 499 et de 200 pour la PGD. Les valeurs des conductivités thermiques homogénéisées(en W/m/K) C_{X-FEM} et C_{PGD} , et l'erreur relative entre les deux méthodes termes à termes e_r sont :

$$C_{X-FEM} = \begin{pmatrix} 1.5661 & 0.0220 \\ 0.0220 & 1.6198 \end{pmatrix} \quad C_{PGD} = \begin{pmatrix} 1.6524 & 0.0227 \\ 0.0227 & 1.7132 \end{pmatrix} \quad e_r = \begin{pmatrix} 5.51\% & 3.31\% \\ 3.31\% & 5.77\% \end{pmatrix}$$

Nous observons une bonne adéquation entre la résolution X-FEM complète et l'utilisation de la SVD de l'image régularisée avec la PGD. La différence entre les méthodes provient une nouvelle fois de

l'approximation faite sur la géométrie. L'approche level-set dans X-FEM permet d'en avoir une meilleure représentation que celle pixellisée et lissée utilisée pour la PGD. Une autre raison pour expliquer la différence provient de l'enrichissement de type Ridge utilisée dans la méthode X-FEM, par conséquent les solutions sont représentées sur des espaces d'approximation différents (plus riche pour X-FEM). Une comparaison avec une méthode FEM donne des résultats similaires, comme dans la section précédente.

5 Conclusion

Une méthode pour l'homogénéisation numérique sur des images de haute résolution a été présentée. Elle se décompose en 2 grandes étapes : (1) la représentation séparée de la géométrie grâce à la SVD, dont la convergence a été accélérée par une régularisation de l'image, et (2) la construction d'une représentation séparée de la solution avec la méthode PGD. L'approche a ensuite été comparée à des méthodes de résolution classiques sur un cas académique et un autre cas plus complexe. L'approche est actuellement en cours d'extension au cas de l'homogénéisation mécanique et au cas 3D. Des travaux en cours concernent également le développement de nouveaux types de représentations afin d'accélérer la convergence des représentations séparées dans le cadre des méthodes PGD.

Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Volume 139, Issue 3, Pages 153-176, 2005
- [2] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*, Elsevier Science Ltd, 1978.
- [3] J.D. Carroll, J. Chang. *"Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition"*, Psychometrika 35 : 283–319, 1970.
- [4] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle. *A multilinear singular value decomposition*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 21, no. 4, Apr. 2000, pp. 1253–1278, 2000.
- [5] A. Falco and A. Nouy. *A Proper Generalized Decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart-Young approach*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469-480, 2011
- [6] R. A. Harshman. *"Foundations of the PARAFAC procedure : Models and conditions for an "explanatory" multi-modal factor analysis"*, UCLA Working Papers in Phonetics, 16, 84 pp, 1970.
- [7] L. Ibanez, W. Schroeder, L. Ng, J. Cates. *"The ITK Software Guide" Second Edition* Kitware Inc., 2005.
- [8] M. Jiang, I. Jasiuk, M. Ostojca-Starzewski. *Apparent thermal conductivity of periodic two-dimensional composites*, Computational Materials Science 25, 329–338, 2002.
- [9] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, D. Jeulin. *Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach*, International Journal of Solids and Structures Volume 40, Issues 13-14, June-July 2003, Pages 3647-3679, 2003.
- [10] G. Laschet, J. Sauerhering, O. Reutter, T. Fend, J. Scheele. *Effective permeability and thermal conductivity of open-cell metallic foams via homogenization on a microstructure model*, Computational Materials Science Volume 45, Issue 3, Pages 597-603, 2009.
- [11] G. Legrain, P. Cartraud, I. Perreard, N. Moës. *An X-FEM and level set computational approach for image-based modelling : Application to homogenization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, in press, 2010.
- [12] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J.-F. Remacle. *A computational approach to handle complex microstructure geometries*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Volume 192, Issues 28-30, Pages 3163-3177, 2003.
- [13] A. Nouy. *A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, Volume 199, Issues 23-24, Pages 1603-1626, 2010.
- [14] P.G. Young, T.B.H. Beresford-West, S.R.L. Coward, B. Notarberardino, B. Walker, A. Abdul-Aziz. *An efficient approach to converting 3D image data into highly accurate computational models*, Philosophical Transactions of the Royal Society A, 366, Pages 3155-3173, 2008.