

# Analyse d'une formulation énergétique variationnelle des couplages thermoviscoélastiques

C. Bouery, L. Stainier

*GeM (UMR 6183 CNRS), Ecole Centrale de Nantes, France, {charbel.bouery, laurent.stainier}@ec-nantes.fr*

**Résumé** — Une formulation variationnelle du problème thermomécanique couplé a été récemment proposée [1], permettant d'écrire les équations d'équilibre mécanique et thermique sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle scalaire. Cette formulation est analysée dans le cadre de son application à un problème thermoviscoélastique, en considérant d'abord les coefficients mécaniques constants, puis en tenant compte du phénomène d'adoucissement thermique. Dans les deux cas, la solution est un point de selle de la fonctionnelle, ce qui suggère l'utilisation d'algorithmes spécifiques.

**Mots clés** — formulation énergétique variationnelle, couplages thermomécaniques, thermoviscoélasticité.

## 1 Introduction

Les sources de couplage thermomécanique dans les matériaux viscoélastiques sont multiples : thermoélasticité, dissipation visqueuse, évolution des caractéristiques mécaniques avec la température. La simulation numérique de ces couplages en calcul des structures présente encore un certain nombre de défis, spécialement lorsque les effets de couplage sont très marqués (couplage fort). De nombreuses approches algorithmiques ont été proposées dans la littérature pour ce type de problème. Ces méthodes vont des approches monolithiques, traitant simultanément l'équilibre mécanique et l'équilibre thermique, aux approches étagées, traitant alternativement chacun des sous-problèmes mécanique et thermique. La difficulté est d'obtenir un bon compromis entre les aspects de précision, stabilité numérique et coût de calcul.

Récemment, une approche variationnelle des problèmes couplés a été proposée par Yang *et al.* [1], qui permet d'écrire les équations d'équilibre mécanique et thermique sous la forme d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle scalaire. Cette approche variationnelle présente notamment les avantages de conduire à une formulation numérique à structure symétrique, et de permettre l'utilisation d'algorithmes d'optimisation.

## 2 Cadre général du travail

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse à la validation d'une formulation énergétique variationnelle du problème thermomécanique couplé. On traite ici un problème simplifié consistant en un volume élémentaire de matière soumis à un chargement en contrainte, avec un comportement thermoviscoélastique de type Kelvin-Voigt (fluage). Les effets de capacité thermique, de dissipation intrinsèque et d'échange de chaleur avec l'environnement sont inclus dans le modèle. Le couplage thermomécanique est complété en incluant une dépendance forte des coefficients mécaniques par rapport à la température. Les variables d'état sont la température et la déformation.

### 2.1 Couplage faible

Dans un premier temps, on considère le cas où les coefficients mécaniques sont constants par rapport à la température. Dans ce cas on obtient une solution de référence analytique, le problème d'optimisation de la fonctionnelle scalaire est résolu par la méthode de Newton-Raphson, en considérant différentes valeurs des temps caractéristiques. Les propriétés du schéma (précision, convergence) sont analysées. Enfin on vérifie la convexité de la fonctionnelle par rapport au champ de déformation et la concavité de

cette dernière par rapport au champ de température : le couple solution  $(\epsilon_{solution}, T_{solution})$  est un point de selle, pour chaque instant  $t$ .

## 2.2 Couplage fort

Dans un deuxième temps, on prend en compte le phénomène d'adoucissement thermique. En effet le matériau étant thermosensible, son comportement dépend fortement de la température : on voit une chute brutale des coefficients mécaniques lorsque la température entre dans une zone (intervalle de température) dite zone de transition (voir zone hachurée, Fig. 1) [2]. Dans notre simulation on considère uniquement le module d'Young  $E$  et le coefficient de viscosité  $E^v$  dépendant de la température. La Figure 1 représente leur évolution, en fonction de la température, choisie pour nos simulations. La prise en compte de cette dépendance des coefficients en fonction de la température crée un couplage fort, dont on veut mesurer l'effet sur la simulation numérique du problème thermomécanique.

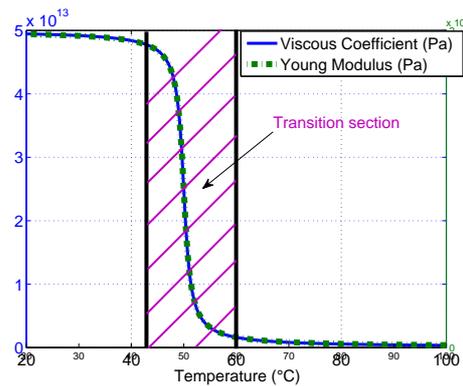


FIGURE 1 – Dépendance en température des modules de rigidité  $E$  et  $E^v$ .

## 3 Simulation numérique du problème couplé

La prise en compte du phénomène d'adoucissement thermique rend difficile la dérivation d'une solution analytique. Dans un premier temps, on applique l'algorithme Newton-Raphson pour la résolution du problème, et on établit une solution de référence via une discrétisation temporelle très fine. On vérifie également que la propriété de point de selle de la formulation énergétique variationnelle est conservée dans ce cas. On applique alors un algorithme d'optimisation alternée pour comparer et tester son efficacité, ainsi que le coût de calcul des deux algorithmes adoptés. La procédure de l'algorithme alterné consiste à effectuer successivement des minimisations (maximisations) par rapport à la déformation (température), tout en gardant la température (déformation) constante, jusqu'à convergence.

Les deux méthodes sont comparées à différents pas de temps, et les convergences respectives sont analysées. Dans ce cas, on trouve que l'algorithme d'optimisation alternée offre un coût de calcul plus intéressant que celui de Newton-Raphson (optimisation simultanée). De premiers essais numériques ont également été réalisés en limitant la maximisation sur la température à une seule itération, conduisant à un algorithme de type Uzawa. Cette dernière approche semble réduire encore un peu plus le temps global de calcul. Cependant, ces résultats ont été obtenus sur un cas très particulier, et il reste à les vérifier dans des conditions plus générales.

## Références

- [1] Q. Yang, L. Stainier, and M. Ortiz. A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids. *J. Mech. Phys. Solids* 54(2),401-424, 2006.
- [2] F. Meissonnier. Couplages Thermomécaniques et Homogénéisation. Thèse de doctorat en Mécanique des matériaux, Structures, et Génie des procédés, Université de Montpellier, 1996.