



**HAL**  
open science

## Dimensionnement optimal des structures membranaires préssurisées - Application à une antenne gonflable parabolique.

Rabah Bouzidi, Yann Lecieux

► **To cite this version:**

Rabah Bouzidi, Yann Lecieux. Dimensionnement optimal des structures membranaires préssurisées - Application à une antenne gonflable parabolique.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592786

**HAL Id: hal-00592786**

**<https://hal.science/hal-00592786>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Dimensionnement optimal des structures membranaires préssurisées. Application à une antenne parabolique gonflable.

R. Bouzidi<sup>1</sup>, Y. Lecieux<sup>1</sup>, C. Dupuy<sup>2</sup>

<sup>1</sup> GeM, Université de Nantes, France, {rabah.bouzidi,yann.lecieux}@univ-nantes.fr

<sup>2</sup> CNES, toulouse, France, Christian.Dupuy@cnes.fr

**Résumé** — Cette étude s'intéresse au dimensionnement optimal des structures membranaires pressurisées. Il s'agit d'optimiser la forme initiale ainsi que la pression de gonflage d'une antenne lenticulaire afin que la structure déformée, suite à sa pressurisation, épouse au mieux une forme parabolique parfaite. La forme initiale est représentée par une suite polynomiale fonction de la distance radiale. L'optimisation est conduite à l'aide de l'algorithme du simplexe basé sur la méthode de Nelder-Mead.

**Mots clés** — Optimisation, Dimensionnement optimal, membrane, antenne, spatial.

### 1 Introduction

L'idée d'utiliser des dispositifs gonflables pour des applications spatiales est ancienne puisqu'elle remonte à la fin des années 1950. Les premières applications qui ont vu le jour sont les satellites de communication ballons de la série ECHO faisant 30 m de diamètre. En 1996, le premier démonstrateur d'antenne gonflable a été mis en orbite (Figure 1). Cette antenne, appelée " Inflatable Antenna Experiment " (IAE), est constituée d'un réflecteur parabolique de 14 m de diamètre. La lentille est surmontée d'une structure support elle-même constituée d'un tore et de bras la reliant à sa navette parente située au point focal. Ce type de structure trouve son utilité comme concentrateur solaire ou comme antenne de communication en Fréquence Radio.



FIGURE 1 – Antenne parabolique gonflable.

L'avantage d'employer des structures membranaires gonflables, pour un certain type d'applications spatiales, n'est plus à démontrer. Aucun lanceur actuel ne pourrait mettre en orbite un instrument aussi grand que l'antenne IAE s'il n'était pas déployé une fois dans l'espace. Néanmoins, les difficultés inhérentes à l'utilisation de ce type de structures sont nombreuses tant au niveau de leur conception que de leur mise en œuvre.

Une très faible pressurisation de la structure membranaire permet de la déployer et de la placer dans une configuration très proche de sa configuration neutre c'est-à-dire à l'état déployé mais non chargé. La rigidité des dispositifs gonflables augmente avec la pression interne. Il est souvent nécessaire de maintenir cette pression au-dessus d'un certain seuil pour garantir une raideur minimale de la structure. Pour ce genre de structure, le passage de la configuration neutre à la configuration pressurisée est susceptible de donner lieu à de grandes transformations. On peut également avoir des zones de grandes déformations induisant des non-linéarités matérielles liées à des déformations finies. De plus, la pression interne est

une force suiveuse puisque elle reste orthogonale à la membrane lors de son évolution. Ce type de chargement dépend du déplacement de la structure et conduit à l'ajout d'une non-linéarité supplémentaire. Enfin, lors de son évolution la structure est susceptible de flamber et fait perdre l'unicité de la solution cinématique. Le flambement se traduit par la formation d'ondulations sur la surface de la membrane.

La conception des structures nécessitant une géométrie déployée précise, est une tâche laborieuse qui demande de considérer toutes les non-linéarités qu'un tel problème peut générer. C'est dans ce contexte, que nous proposons une optimisation de la forme neutre d'un réflecteur lenticulaire parabolique semblable à celui de l'IAE. Nous optimiserons également les pressions de gonflage et cela en prenant en compte toutes les non-linéarités, y compris l'instabilité due au flambement.

La prise en compte du phénomène de plissement de la surface est rendu possible grâce à une méthode de résolution originale basée sur la minimisation directe, par le gradient conjugué, de l'énergie potentielle totale. En effet, l'imbrication de méthode de résolution du problème direct dans une boucle d'optimisation nécessite de disposer d'une méthode de traitement automatique de la bifurcation.

## 2 Cadre et objectifs de l'étude

On s'intéresse ici au dimensionnement du réflecteur parabolique décrit ci-dessus. Il est constitué de deux chambres pressurisées à des niveaux différents : la lentille et le tore qui l'entoure. Les données du comportement matériel et de la géométrie sont résumées dans le tableau

TABLE 1 – Données du modèle.

	Lentille	Tore
Module d'Young	6.0 <i>GPa</i>	15.0 <i>GPa</i>
Coefficient de Poisson	0,30	0,30
Epaisseur du matériau	6,3 $\mu m$	300 $\mu m$
Distance focale	12 <i>m</i>	-
Rayon	7 <i>m</i>	0,5 <i>m</i>

La recherche de solutions au problème de gonflage de membranes axisymétriques remonte au début du 20 siècle avec l'étude de Hencky [1]. Des solutions analytiques, intéressantes dans les problèmes d'optimisation, ont été obtenues mais elles se limitent aux membranes circulaires initialement planes et bloquées aux bords. Dans le cas de l'antenne envisagée dans la présente étude, les bords de la lentille sont couplés au tore périphérique et la forme initiale de la lentille n'est pas nécessairement plane. L'utilisation de modèle analytique n'est donc pas envisageable.

Le problème que l'on souhaite traiter est formulé de la façon suivante : Quels sont les paramètres de géométrie initiale et de chargement en pression qui conduiraient à une forme déployée la plus proche possible d'une parabole parfaite ? L'étude consiste principalement à minimiser l'écart entre le profil pressurisé et le profil idéal, pour déterminer un jeu de paramètres optimaux.

Les résultats de l'optimisation montrent qu'il existe un jeu de paramètres de forme initiale et de chargement pour lequel la géométrie de la structure déployée est très proche d'une parabole parfaite. Ce jeu optimal permet d'atteindre une précision de forme de quelques millimètres.

## 3 Description du modèle numérique

Pour mener à bien l'optimisation de la forme de la lentille, il faut d'abord déterminer le plus fidèlement possible la déformée d'une structure initialement décrite par un jeu de paramètres de forme fixé et soumise à une pression constante. La résolution de ce problème direct est réalisée en utilisant le modèle et l'algorithme présentés à la sous-section 3.1.

Lors de la phase d'optimisation, ces paramètres géométriques et de chargements deviennent les variables d'ajustement que nous cherchons à identifier. Dans cette optique on construit une fonctionnelle à minimiser qui est la moyenne de l'écart entre la surface obtenue et la parabole parfaite que l'on souhaite

atteindre. Cette fonctionnelle est ensuite minimisée à l'aide d'une méthode d'optimisation sans gradient. La description de cette procédure est effectuée à la sous-section 3.2.

### 3.1 Le Modèle direct

#### 3.1.1 Discrétisation

Le réflecteur est discrétisé en éléments finis triangulaires de "membrane pure". Les degrés de liberté sont les déplacements nodaux sans les rotations. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 2. Il comporte 3889 noeuds et 7584 éléments finis triangulaires.

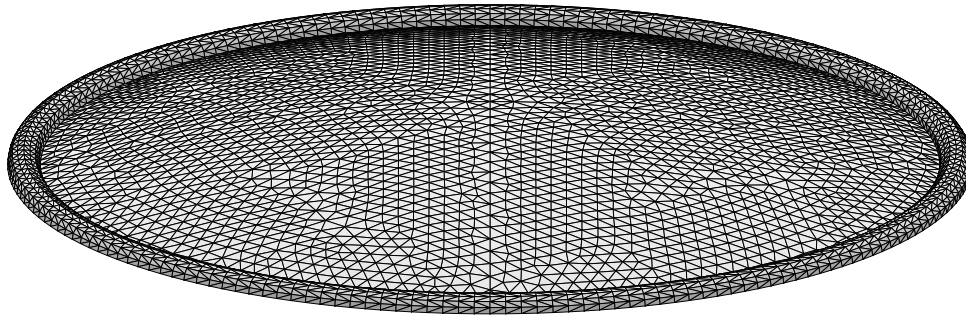


FIGURE 2 – Maillage du réflecteur

L'énergie interne de déformation de l'élément fini "membrane pure" est évaluée en considérant le potentiel de Saint Venant Kirchhoff  $\Psi_{int}$  :

$$\Psi_{int} = \frac{\lambda}{2} (E_k^k)^2 + \mu E_l^m E_m^l. \quad (1)$$

Où  $E_i^j$  désignent les composantes mixtes du tenseur des déformations de Green-Lagrange.

L'énergie associée au pression suiveuse  $\Psi_{ext}$  est quant à elle calculée à partir du produit de la pression de gonflage  $P$  et du volume pressurisé  $V$  :

$$\Psi_{ext} = -P V \quad (2)$$

$V$  étant ici le volume actuel du tore ou de la lentille évalué avec les coordonnées nodales de la surface déformée.

L'énergie potentielle totale de la structure  $\Pi$  est ensuite obtenue en sommant  $\Psi_{int}$  et  $\Psi_{ext}$  i.e.

$$\Pi = \Psi_{int} + \Psi_{ext} \quad (3)$$

Ainsi, cette formulation cinématique du modèle éléments finis tient compte des non-linéarités puisqu'elle intègre les grands déplacements, les grandes rotations, les déformations finies, et les charges suiveuses. Dans le cas présent, ces dernières sont des pressions de gonflage qui restent orthogonales à leurs surfaces d'application.

Le solveur utilisé permet également le traitement automatique de la bifurcation. Cet algorithme est basé sur la résolution du champ de déplacements par minimisation directe de l'énergie potentielle [2]. Ainsi le solveur permet de prendre en compte automatiquement les branches bifurquées et de choisir celles qui présentent l'énergie la plus basse. La prise en compte des solutions bifurquées est essentielle dans le problème d'optimisation que l'on s'est posé. En effet, la membrane utilisée ayant une épaisseur très faible, la moindre contrainte de compression conduit au flambement de la membrane par flexion hors de son plan. Ce phénomène conduit à la formation d'ondulations préjudiciables à la qualité de la surface que l'on souhaite parfaite. La figure 3 montre une des solution bifurquée que l'on peut obtenir par le modèle éléments finis.

#### 3.1.2 La résolution par une méthode de descente de premier ordre

Généralement le système d'équations issu de la discrétisation par éléments finis du modèle continu, est résolu par l'algorithme de Newton que l'on associe à différents types de stratégie de contrôle (en

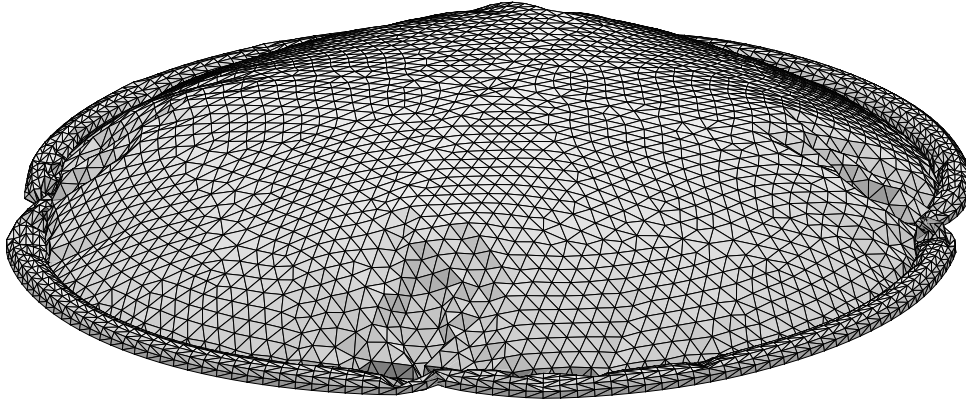


FIGURE 3 – Exemple de solution bifurquée.

force, en déplacement ou en longueur d'arc). Cet algorithme est bien adaptés au calcul des structures massives pour lesquelles la matrice de rigidité est bien conditionnée. Lorsque la valeur des raideurs dans toutes les directions est quasiment équivalente, le traitement d'un problème élastique géométriquement non linéaire est généralement rapide. Toutefois, ces méthodes, dites du second ordre, perdent de leur efficacité lorsque les raideurs dans certaines directions deviennent faibles. C'est le cas pour l'antenne parabolique constituée de films minces : La raideur en tension est importante alors que la raideur en flexion est quasi-nulle.

Pour résoudre le problème direct, nous avons opté pour la minimisation de l'énergie potentielle en utilisant une méthode de descente du premier ordre. Nous avons utilisé l'algorithme du gradient conjugué pour traiter numériquement le problème du flambement. Cette méthode est adaptée à la résolution des problèmes mal conditionnés puisqu'elle repose sur l'évaluation du gradient de l'énergie potentielle totale de la structure, et non sur le calcul de la matrice de rigidité. Au voisinage d'une position hors équilibre d'une structure, le gradient permettra de déterminer une direction de recherche du point d'équilibre stable de plus faible énergie, pourvu que ce dernier existe.

L'algorithme du gradient conjugué a notamment été employé par Maurin and Motro [3] pour déterminer la forme de structures constituées de membranes et de câbles en tension. Dans cette étude, nous avons programmé nos éléments finis dans l'environnement de calcul Surface Evolver [4].

## 3.2 Optimisation de la géométrie du réflecteur

L'objectif de cette partie est de déterminer le jeu de paramètres de forme et de pression permettant d'obtenir un profil le plus proche possible de celui d'une parabole parfaite. A cette fin, nous allons construire une fonction coût traduisant l'écart entre la forme idéale de la lentille et celle obtenue par simulation, puis chercher à la minimiser.

### 3.2.1 Construction de la fonction coût

La surface déformée après préssurisation doit se rapprocher au mieux d'une parabole définie par la formule théorique 4.

$$Z_{th} = \frac{R^2}{4f} (1 - \rho^2) \quad (4)$$

Cette expression fait intervenir le rayon de la lentille  $R$ , la distance focale  $f$  et le rayon adimensionnel  $\rho = r/R$ .

L'objectif de l'optimisation est traduit au moyen d'une fonction caractérisant l'écart entre le profil obtenu et le profil idéal.

Il s'agit de l'erreur quadratique moyenne *RMSE* (Root Mean Square Error) entre le profil déformé et le profil idéal, calculée par la relation 5 sur l'ensemble des  $n$  noeuds de la lentille.

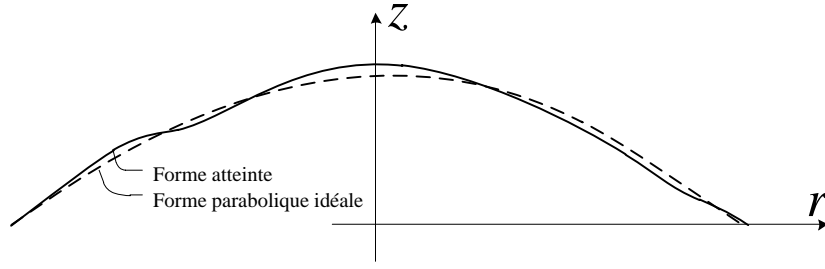


FIGURE 4 – Comparaison forme atteinte et de la forme parabolique idéale.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z^i - z_{th}^i)^2} \quad (5)$$

Le choix des paramètres d'optimisation passe par l'identification de ceux qui influent sur l'écart défini par la fonction  $RMSE$ . Pour un rayon  $R$  et une distance focale  $f$  donnés, la fonction  $RMSE$  dépend des pressions de gonflage,  $p_t$  du tore,  $p_l$  de la lentille, de la forme initiale définissant la configuration de référence et des propriétés matérielles.

La géométrie neutre initiale, i.e. non chargée, est définie par la flèche au plan médian  $z$ , fonction du rayon adimensionnel de la parabole  $\rho = r/R$ . Nous avons choisi une forme polynomiale en puissances paires pour respecter la symétrie axiale de la forme.

$$Z = \frac{R}{4f} \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - \rho^{2i}) \quad (6)$$

où  $R$  est le rayon de la lentille et  $f$  la distance focale. De cette façon, la forme initiale n'est définie que par un nombre  $n$  restreint de paramètre représentés ici par la suite  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

### 3.2.2 Choix des paramètres d'optimisation

Nous avons sélectionné cinq paramètres d'optimisation résumés dans le vecteur suivant :

$$\mathbf{p} = \{p_t, p_l, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad (7)$$

$p_t$  est la pression dans le tore,  $p_l$ , la pression dans la lentille,  $\alpha_i$  sont les coefficients de forme initiale utilisés dans l'équation 6. L'optimisation libre de la fonction  $RMSE$  sur le vecteur des paramètres  $\mathbf{p}$  conduit à la solution triviale évidente suivante :

$$\mathbf{p} = \{0., 0., 1., 0., 0.\}$$

Cette solution correspond à une forme initiale coïncidant avec la parabole parfaite et des pressions de chargement nulles. Or d'un point de vue pratique, il est nécessaire d'imposer des pressions minimales soit dans le tore ou dans la lentille suffisantes pour déployer la structure et lui donner une rigidité acceptable. Après un certain nombre d'essais, nous avons fixé arbitrairement la pression dans la lentille à la valeur de 10 Pa.  $p_l$ , le vecteur des paramètres choisis est alors :

$$\mathbf{p} = \{p_t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad (8)$$

### 3.2.3 Méthode d'optimisation sans gradient

Le problème d'optimisation formulé dans cette étude porte sur la fonction coût présentée à la relation 5. Le profil  $z$  atteint par la lentille est une fonction complexe des paramètres d'optimisation dont l'expression ne peut être explicitée d'un point de vue littérale. En effet, les valeurs  $z$  sont obtenues à l'aide d'un modèle éléments finis prenant en compte différentes non-linéarités : géométrique, de chargement, de grandes transformations et des déformations finies. Dans ce cadre, la seule grandeur accessible est la valeur de la fonction coût, sans information sur son gradient. Les méthodes d'optimisation adaptée à ce

type de problème sont les méthode d'ordre zero ne nécessitant que la valeur de la fonction pour un jeux de paramètres donné.

Le problème d'optimisation est résolu par la méthode du simplexe de Nelder et Mead. Cette méthode est basée sur le concept de simplexe qui est un polytope de  $n + 1$  sommets dans un espace de paramètres d'optimisation à  $n$  dimensions. Le principe de l'algorithme du simplexe est de modifier le simplexe, à chaque itération, à partir du simplexe précédent et en fonction des valeurs de la fonction coût à chaque sommet, en utilisant l'une des quatre opérations décrites ci-dessous. On notera  $\mathbf{p}_i^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , les  $n + 1$  sommets du simplexe à l'itération  $k$ . Les quatre opérations de modification du simplexe sont : la réflexion, l'expansion, la contraction et la similitude.

À chaque itération on identifie  $\mathbf{p}_j^k$  tel que  $RMSE(\mathbf{p}_j^k) = \max \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\}$ , c'est-à-dire le vertex qui donne la fonction coût maximale. On détermine le centroïde des sommets restants  $\mathbf{p}_g$  (pour  $i \neq j$ ). On peut alors déterminer le sommet réfléchi  $\bar{\mathbf{p}}_r$  :

$$\bar{\mathbf{p}}_r = (1 + \beta)\mathbf{p}_g - \beta\bar{\mathbf{p}}_j^k \quad (9)$$

où  $\beta > 0$  est appelé coefficient de réflexion et souvent fixé à 1. On peut noter que, pour  $\beta = 1$ , (9) est équivalent à une symétrie de  $\bar{\mathbf{p}}_j^k$  par rapport au centroïde des sommets restants  $\mathbf{p}_g$ .

Si  $\min \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\} < RMSE(\mathbf{p}_r) < RMSE(\mathbf{p}_j^k)$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_j^k$  est remplacé par  $\bar{\mathbf{p}}_r$  et une nouvelle itération commence avec le nouveau simplexe. De plus, si  $RMSE(\mathbf{p}_r) < \min \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\}$ , on vérifie si  $\bar{\mathbf{p}}_j^k$  ne peut pas être déplacé plus loin. Cette opération étend le simplexe dans la même direction que la réflexion et se calcule de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{p}}_e = \gamma\mathbf{p}_r + (1 - \gamma)\mathbf{p}_g \quad (10)$$

où  $\gamma > 1$  est le coefficient d'expansion, pris habituellement égal à 2. Si  $RMSE(\mathbf{p}_e) < \min \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\}$ , on remplace  $\mathbf{p}_j^k$  par  $\mathbf{p}_e$ , sinon l'expansion a échoué et on remplace ce vertex par  $\mathbf{p}_r$ . Cette opération permet d'accélérer le processus si le simplexe est "loin" de la solution.

Si par réflexion on obtient un nouveau vertex  $\mathbf{p}_r$  pour lequel  $RMSE(\mathbf{p}_r) > RMSE(\mathbf{p}_i)$ ,  $\forall i \neq j$ , on contracte alors le simplexe suivant une droite reliant  $\mathbf{p}_g$  et  $\mathbf{p}_j^k$  :

$$\bar{\mathbf{p}}_c = \delta\bar{\mathbf{p}}_j^k + (1 - \delta)\bar{\mathbf{p}} \quad (11)$$

où  $0 < \delta < 1$  est le coefficient de contraction, généralement pris égal à 0,5.  $\mathbf{p}_c$  est accepté à moins que  $RMSE(\mathbf{p}_c) > RMSE(\mathbf{p}_r)$ , auquel cas le simplexe est réduit de moitié par similitude centrée sur  $\min \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\}$  :

$$\bar{\mathbf{p}}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_i^k}{2} \quad (12)$$

où  $RMSE(\bar{\mathbf{p}}_i^k) = \min \{RMSE(\mathbf{p}_i^k)\}$ .

La totalité de la procédure est répétée jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit atteint. Le critère de convergence choisi pour notre étude porte sur la taille du simplexe inclus dans une hypersphère de rayon donné.

## 4 Résultats et discussion

### 4.1 Initialisation du simplexe

Le choix du simplexe de départ n'est pas simple puisqu'il doit être suffisamment proche de la solution optimale recherchée pour éviter une convergence sur des minimums locaux, si ces derniers existent. Le simplexe d'initialisation que nous avons utilisé est donné sur le tableau 2 :

Les coefficients de forme  $\alpha_i$ , choisis pour le simplexe d'initialisation, donnent des formes pour la lentille proches de celle de la parabole parfaite. Le point optimal dans l'espace des paramètres ne se trouve pas nécessairement à l'intérieur du simplexe d'initialisation. Le choix de ce simplexe a se base sur quelques simulations qui nous ont permis d'obtenir des valeurs de la fonction  $RMSE$  acceptables.

TABLE 2 – Simplexe d’initialisation de la procedure d’optimisation.

	$p_t(Pa)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
sommet 1	150	1.1	-0.015	0.005
sommet 2	200	1.1	-0.015	0.005
sommet 3	150	0.9	-0.015	0.005
sommet 4	150	1.1	-0.020	0.005
sommet 5	150	1.1	-0.015	0.006

Les résultats obtenus sont résumés sous forme de différence du profil obtenu et le profil idéal. Nous avons représenté sur le graphe 5 l’évolution de l’écart entre le profile atteint par la membrane et la parabole idéale.

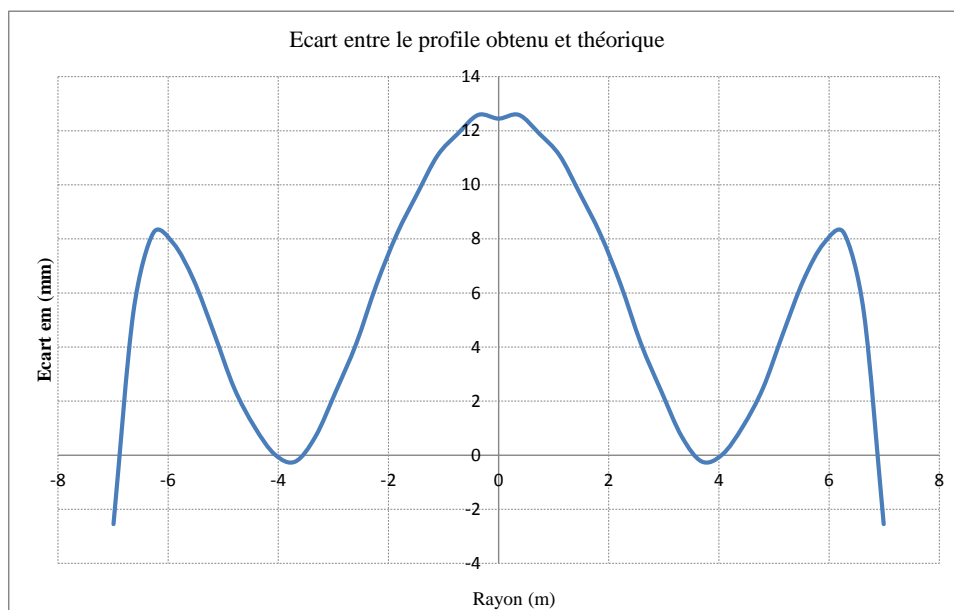


FIGURE 5 – Comparaison forme atteinte et de la forme parabolique idéale.

Ce résultat a été obtenu un jeu de paramètres optimaux résumé dans le vecteur suivant :

$$\mathbf{p} = \{p_t = 580.095Pa, \alpha_1 = +1.1934, \alpha_2 = -0.2798, \alpha_3 = +0.0041\} \quad (13)$$

Il convient de signaler que des essais d’optimisation ont été réalisés pour des pressions dans lentille inférieures à  $10Pa$ . Pour ces faibles valeurs de pression, nous avons constaté des verrouillages numériques dans la résolution du problème direct par le modèle élément finis. Nous avons donc ajuster cette pression à  $10Pa$  pour éviter ce phénomène.

## 5 Conclusions

Cette étude nous a permis de formuler un problème d’optimisation de la forme initiale d’une lentille à usage de réflecteur parabolique supportée par un tore pressurisé. Le problème a été formulé sous la forme suivante : pour une pression de service dans la lentille fixée à  $10 Pa$  quelle est la forme initiale permettant de s’approcher au mieux d’une forme parabolique parfaite ?



Le profil initial a été décrit à l'aide d'une série polynomiale à puissances paires et l'optimisation a consisté à trouver la valeur des trois premiers termes de cette série ainsi que la pression dans le tore permettant d'épouser aux mieux la forme souhaitée. Dans cette optique, pour chaque jeu de paramètres, nous avons effectué un calcul par éléments finis non linéaire permettant de trouver la géométrie déformée de la lentille. L'erreur moyenne entre les résultats de cette simulation et la surface idéale constituant la valeur de la fonction coût que nous avons cherché à minimiser à l'aide d'un algorithme de simplexe.

La difficulté de cette optimisation résulte de la complexité des problèmes directs à résoudre, lesquels sont fortement non-linéaires. Les films minces de faibles épaisseurs sont notamment sujets au plissement, et il convient donc d'utiliser un algorithme de résolution du problème direct robuste permettant le traitement automatique de la bifurcation. A cette fin, nous avons mis en œuvre la méthode de descente par gradient conjugué.

Les résultats de cette optimisation sont très encourageants et devraient permettre aux acteurs de l'industrie spatiale de concevoir et de déterminer la géométrie de structures "Gossamer" en maîtrisant leurs défauts de formes.

## 5.1 Références bibliographiques

### Références

- [1] H. Hencky, *On the Stress State in Circular Plates With Vanishing Bending Stiffness*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 63, 311-317, 1915.
- [2] Y. Lecieux, R. Bouzidi, *Numerical wrinkling prediction in thin hyperelastic structures by direct energy minimization*, CST2010 The Tenth International Conference on Computational Structures Technology, Valencia-Spain 14-17, September 2010.
- [3] B. Maurin, R. Motro, *Investigation of minimal forms with conjugate gradient method*, International Journal of Solids and Structures, 38(14) 2387-2399, 2001
- [4] K A. Brakke. *The surface evolver*, Experimental Mathematics, 1 :141-165, 1992.