



**HAL**  
open science

# Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie

Grégory Legrain, Nicolas Chevaugéon, Kristell Dréau

► **To cite this version:**

Grégory Legrain, Nicolas Chevaugéon, Kristell Dréau. Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592785

**HAL Id: hal-00592785**

**<https://hal.science/hal-00592785>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulations de géométries complexes avec X-FEM et Level-Sets : Séparation de l'approximation et de la géométrie

G. Legrain<sup>1</sup>, N. Chevaugeon<sup>1</sup>, K. Dréau<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *GeM, Institut de recherche en génie civil et mécanique.  
École Centrale Nantes - Université de Nantes - CNRS  
{gregory.legrain, nicolas.chevaugeon, kristell.dreau}@ec-nantes.fr*

---

**Résumé** — Une approche est proposée afin de séparer de manière efficace géométrie et approximation dans le cas des méthodes de type partition de l'unité. La stratégie retenue consiste à approcher la géométrie sur une grille différente de celle utilisée pour l'approximation. Les transferts d'information entre les deux grilles sont assurés à travers une base de donnée quadtree partagée par les deux maillages. La méthode permet alors de résoudre des problèmes définis sur une géométrie complexe grâce à un maillage d'approximation grossier et des fonctions de forme de haut ordre.

**Mots clés** — X-FEM, éléments p, quadtree, approche nitsche.

---

## 1 Introduction

Les méthodes d'éléments finis basées sur la partition de l'unité ont permis de simplifier la prise en compte des surfaces de discontinuité dans les calculs éléments-finis. En effet, l'enrichissement de l'approximation a permis la prise en compte de surfaces de géométrie complexe sur des maillages non-conformes. La description de la géométrie est assurée par LevelSets ce qui simplifie le traitement des problèmes d'évolution. Néanmoins, l'indépendance entre la géométrie du problème et l'approximation reste partielle : la description de la géométrie est insuffisante si le maillage support de la Level-Set est trop grossier. Dans certains cas (fissuration par exemple), c'est la géométrie qui impose la finesse du maillage et non pas l'approximation (grâce à l'enrichissement). Dans le cas où les interfaces sont représentées explicitement, des approches ont été proposées afin d'assurer cette séparation [?]. D'autres approches ont été proposées dans le cas d'interfaces définies implicitement : Prabel et al. [1] proposent d'interpoler la level-set sur une grille auxiliaire régulière, avant de la projeter sur le maillage de calcul. Si ce dernier est trop grossier, alors la géométrie est dégradée. L'objectif est ici de proposer une stratégie permettant de séparer autant que possible le support de la géométrie et celui de l'approximation, tout en préservant l'efficacité de l'approche. La méthodologie retenue est une variante des travaux proposés par Dréau et al. [2] utilisée initialement pour étendre l'approche X-FEM au haut ordre.

## 2 Principe

### 2.1 Représentation géométrique

Il a été montré que dans le cas de fonctions de formes de haut ordre, l'erreur géométrique devenait prépondérante devant l'erreur d'approximation [2, 3]. Différentes approches sont discutées dans la littérature afin d'améliorer la représentation de la géométrie. Dans [2], il a été proposé de représenter la levelset sur un maillage d'intégration raffiné, emboîté dans le maillage support de l'approximation (cf figure 1). La stratégie proposée ici consiste à représenter la géométrie de manière implicite sur un maillage de type octree et de définir l'approximation grâce un maillage régulier sur lequel sont définies des fonctions de forme de haut ordre (cf figure 2). La base de donnée octree sert à générer les deux maillages, si bien que les relations de filiation entre les éléments de ces derniers peuvent être obtenues de manière très efficace.

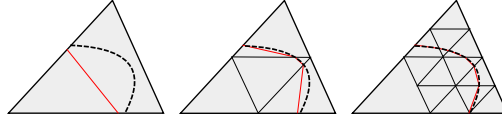


FIGURE 1 – Élément coupé par une levelset et ses cellules d’intégration (avant découpage) : mise en évidence de l’amélioration de la géométrie [2]

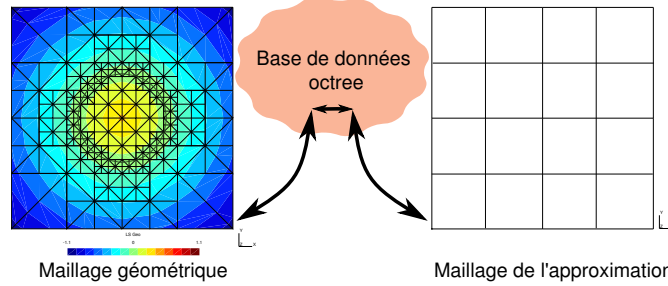


FIGURE 2 – Transferts d’information entre le maillage géométrique et le maillage de l’approximation. Note : les quadrangles sont transformés en deux triangles avant calcul.

## 2.2 Interfaces matériaux : convergence optimale

Dans le cas des interfaces matériaux, il a été montré dans [2] que la fonction d’enrichissement “ridge” [4] devait être modifiée dans le cadre de l’approche utilisée ici. La modification proposée ne permettait cependant pas d’obtenir une convergence optimale. Une approche alternative est considérée ici : le champ de déplacement est enrichi par une fonction Heaviside au niveau des interfaces afin de découpler les deux phases du matériau. La continuité du déplacement est ensuite imposée par l’utilisation de l’approche Nitsche. La formulation faible du problème s’écrit alors :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma} \{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\Gamma - \int_{\Gamma} \{\delta \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}\} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket d\Gamma + \beta \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \llbracket \mathbf{v} \rrbracket d\Gamma = l(\mathbf{v}) \quad (1)$$

où  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $l(\mathbf{v})$  sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire du problème.  $\{\bullet\}$  est l’opérateur moyenne et  $\llbracket \bullet \rrbracket$  l’opérateur saut. Le paramètre  $\beta$  permet d’assurer la coercivité de la forme bilinéaire totale :

$$\|\{\underline{\underline{\sigma}}(v) \cdot \mathbf{n}\}\|_{\Gamma} \leq C_I \|v\| \quad (2)$$

Il suffit alors de considérer  $\beta > C_I^2$ . La détermination de l’expression analytique de ce coefficient a été traitée dans [5] pour le cas des approximations linéaires. Dans les autres cas, la résolution d’un système aux valeurs propres proposé par Griebel et al. [6] permet d’estimer  $C_I^2$ . L’obtention d’un taux de convergence optimale nécessite néanmoins une représentation géométrique suffisamment précise [3, 2]. Dans cette étude, on se basera sur l’estimation proposée par Huerta et al. [7] :

$$h_g = \alpha h^{2p/3} \quad (3)$$

où  $h_g$  représente la taille du maillage géométrique,  $h$  la taille du maillage de l’approximation et  $p$  le degré de l’approximation.

## 3 Exemples

### 3.1 Domaine troué

L’approche est maintenant appliquée à l’exemple présenté sur la figure 3. Ce dernier est constitué d’une plaque de côté 2.0 percée de 450 trous de rayon compris entre 0.005 et 0.1 disposés aléatoirement. Le plaque est soumise à une sollicitation de traction uniaxiale et le maillage de calcul est de taille 0.125 (niveau 4), comme illustré sur la figure 3. Une solution de référence est obtenue grâce à un maillage de niveau 10 ( $h = 1.95 \cdot 10^{-3}$ ) et comprenant 435 297 dds. L’évolution de l’énergie de déformation est étudiée lorsque l’ordre de l’approximation augmente de  $p = 1$  à  $p = 12$ . L’évolution de l’erreur sur

cette énergie vis-à-vis de la solution de référence est tracée sur la figure 4. On voit qu'une convergence exponentielle est obtenue, et qu'une erreur de moins de 0.6% peut être obtenue par la résolution d'un problème ne comportant que 17% du nombre de ddl de la solution de référence.

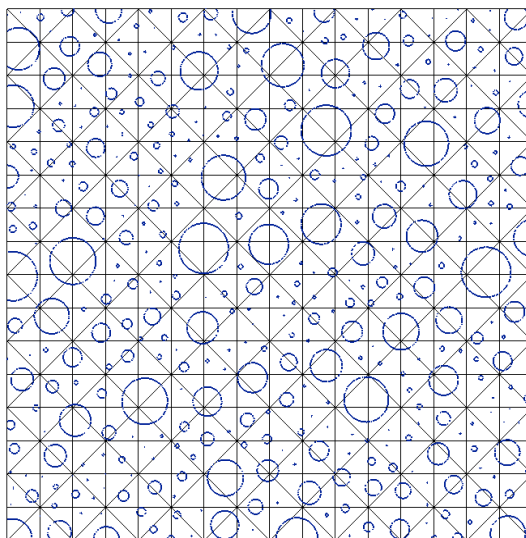


FIGURE 3 – Domaine troué : Géométrie et maillage de l'approximation.

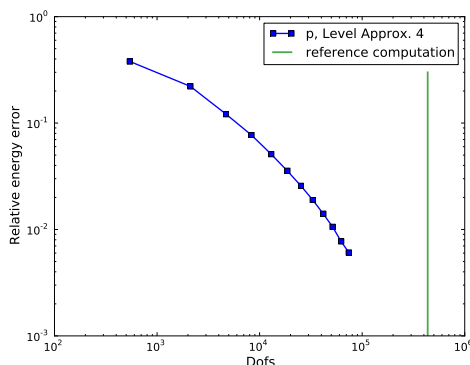


FIGURE 4 – Domaine troué : convergence  $p$ .

### 3.2 Interfaces matériaux

Considérons une plaque infinie soumise à une extension équi-biaxiale et contenant une inclusion circulaire de rayon  $a = 0.4$  en son centre. Le domaine de calcul consiste d'un carré de côté 2.0 centré sur le point  $(0,0)$ . Les deux matériaux sont supposés élastiques linéaires de modules d'Young  $E_m = 1.0$  et  $E_i = 10.0$  et de coefficients de Poisson  $\nu_m = 0.3$  et  $\nu_i = 0.25$  pour la matrice et l'inclusion respectivement. La solution analytique du problème est donnée dans [8] et est utilisée afin d'imposer le vecteur traction exact sur la frontière du domaine. Le coefficient  $h_g$  est fixé à  $1/10$  pour  $p < 4$  et  $1/50$  pour  $p = 4$ . La figure 5 présente la convergence de la norme énergétique de l'erreur vis-à-vis de la solution exacte. Les taux de convergences obtenus sont optimaux pour  $p = 1$  à  $p = 4$ , mettant en évidence les performances de l'approche.

### 3.3 Pièce mécanique

L'approche est maintenant appliquée au cas représenté sur la figure 6 qui correspond à une pièce mécanique soumise à un chargement ortho-radial. La figure 7 présente le maillage de calcul ainsi que

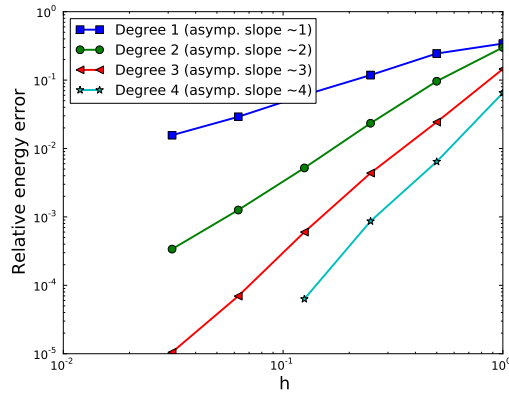


FIGURE 5 – Interface matériau : convergence, suivant [7] pour la description géométrique.

celui supportant la géométrie. Les résultats obtenus avec l’approche développée ici sont comparés avec des résultats de référence éléments-finis  $p4$  sur la figure 8. On observe qu’à degré d’approximation équivalent, les résultats X-FEM et FEM sont similaires malgré une nette diminution du nombre de ddls (3.59% de différence sur l’énergie de déformation pour 3.45% du nombre de ddls de la solution de référence). Dans le cas d’une approximation  $p7$ , la différence des énergies de déformation tombe à 0.44% et le nombre de ddls à 10.1% de ceux de la solution de référence.

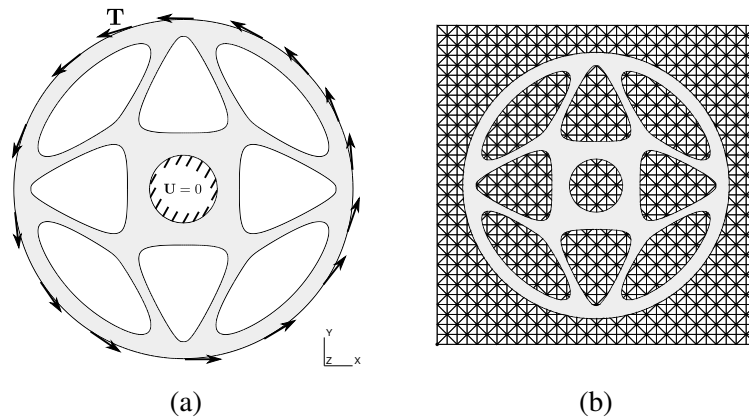


FIGURE 6 – Pièce mécanique soumise à un chargement ortho-radial : (a) Géométrie et conditions limites ; (b) Maillage de calcul.

## 4 Conclusion

Une stratégie a été proposée afin de dissocier approximation et géométrie dans le cas de la méthode X-FEM + LevelSets. Cette méthode a été validée dans le cas des interfaces matériaux où il a été montré que des taux de convergence optimaux pouvaient être obtenus. La méthode a ensuite été appliquée à des géométries complexes ainsi qu’à un exemple de géométrie industrielle avec succès. On s’intéressera par la suite au cas de géométries définies par imagerie. Dans ce cadre, cette approche apporte une flexibilité supplémentaire par rapport aux précédents travaux dans ce domaine [9].

## Références

- [1] B. Prabel, A. Combescure, A. Gravouil, and S. Marie. Level set X-FEM non-matching meshes : application to dynamic crack propagation in elastic–plastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(8) :1553–1569, 2007.

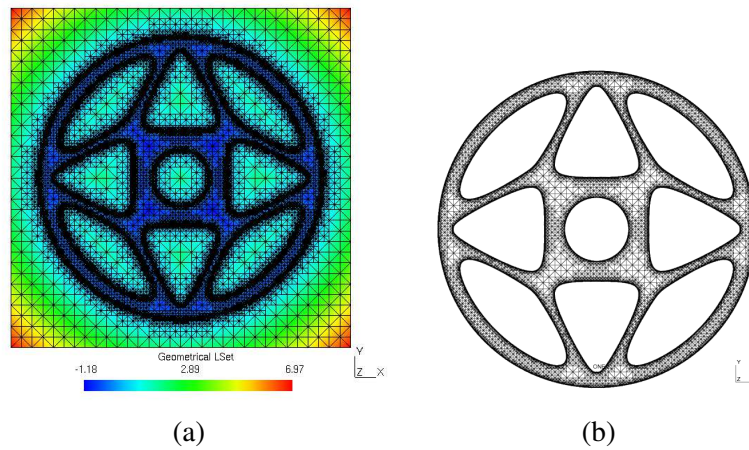


FIGURE 7 – Pièce mécanique : (a) Levelset sur le maillage géométrique ; (b) Cellules d'intégration dans le domaine.

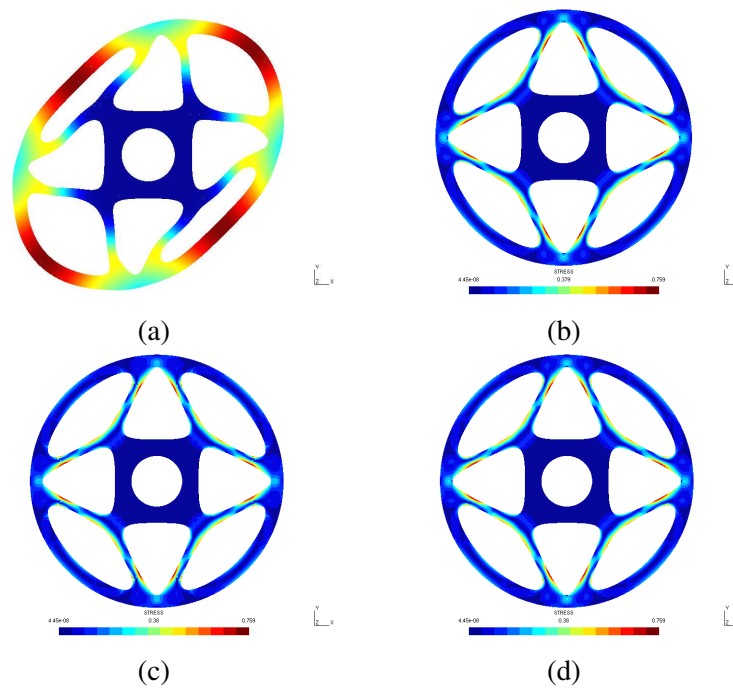


FIGURE 8 – Pièce mécanique : (a) Déplacement, éléments finis  $p = 4$  (64 352 ddls) ; (b) Norme de Von Mises de la contrainte, éléments finis  $p = 4$  ; (c) Norme de Von Mises de la contrainte, X-FEM  $p = 4$  (4434 ddls) et (d) Norme de Von Mises de la contrainte, X-FEM  $p = 7$  (12978 ddls)

- [2] Kristell Dréau, Nicolas Chevaugeon, and Nicolas Moës. Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32) :1922–1936, 2010.
- [3] Kwok Wah Cheng and Thomas-Peter Fries. Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82 :564–590, 2009.
- [4] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, and J.-F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 192 :3163–3177, 2003.
- [5] Anita Hansbo and Peter Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35) :3523–3540, August 2004.
- [6] M. Griebel and M.A. Schweitzer. *Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, chapter A particle-partition of unity method. Part V : Boundary conditions, pages 517 — 540. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [7] A. Huerta, E. Casoni, E. Sala-Lardies, S. Fernandez-Mendez, and J. Peraire. Modeling discontinuities with high-order elements. In *ECCM 2010 - Paris*, 2010.
- [8] N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method. *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, 190 :6183–6200, 2001.
- [9] G. Legrain, P. Cartraud, Perreard I., and N. Moës. An x-fem and level set computational approach for image-based modelling : Application to homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Available online :n/a, 2011.