



**HAL**  
open science

# Modélisation des bandes de cisaillement adiabatique par une approche énergétique variationnelle

Shaopu Su, Laurent Stainier

► **To cite this version:**

Shaopu Su, Laurent Stainier. Modélisation des bandes de cisaillement adiabatique par une approche énergétique variationnelle. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592783

**HAL Id: hal-00592783**

**<https://hal.science/hal-00592783>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation des bandes de cisaillement adiabatique par une approche énergétique variationnelle

S. Su, L. Stainier

GeM (UMR 6183 CNRS), Ecole Centrale de Nantes, France, {shaopu.su, laurent.stainier}@ec-nantes.fr

**Résumé** — Un modèle de bande de cisaillement adiabatique (BCA) basé sur une approche énergétique variationnelle est proposé. Les profils de vitesse et de température dans un matériau thermo-visco-plastique soumis à une sollicitation de cisaillement simple sont calculés, d'une part au moyen d'une formulation semi-analytique conduisant directement aux profils stationnaires et transitoires, puis d'autre part, d'une approche éléments finis transitoire. Les résultats de ces calculs transitoires montrent que la largeur de bande converge vers une valeur stationnaire, en accord avec l'approche stationnaire et la littérature [1].

**Mots clés** — bande de cisaillement adiabatique, approche énergétique variationnelle, thermo-visco-plasticité, dynamique des matériaux.

## 1 Introduction

Les BCAs apparaissent facilement dans les métaux et alliages soumis à de grandes déformations, et leur formation suscite un grand intérêt en vue d'applications en dynamique des matériaux. Cependant, cela implique des difficultés de simulation numérique, notamment en raison de la faible largeur de ces bandes et de l'adoucissement mécanique associé à l'échauffement local.

Récemment, une formulation énergétique variationnelle du problème thermo-mécanique couplé a été proposée par Yang *et al.* [2]. La caractéristique principale de cette approche tient dans la formulation du problème aux conditions limites couplé comme un problème d'optimisation d'une fonctionnelle de nature énergétique. Cette formulation variationnelle peut être établie dans un cadre continu (en temps) comme dans un cadre incrémental. De par sa nature, elle se prête particulièrement bien aux méthodes de solution approchée de type élément finis (MEF), conduisant dans ce cas à un problème symétrique contrairement aux approches classiques du problème thermo-mécanique. Dans cette étude, une approche semi-analytique stationnaire et transitoire, tirée de la formulation variationnelle continue et une approche incrémentale variationnelle de type MEF sont appliquées pour modéliser une BCA en 1D.

## 2 Le modèle énergétique variationnel

### 2.1 Régime stationnaire

On considère le problème unidimensionnel utilisé par Leroy et Molinari [1]. L'épaisseur de la zone sur laquelle on applique la déformation de cisaillement simple est  $2H$ , la vitesse  $V_0$  est imposée aux bords (Fig. 1), et le matériau a un comportement thermo-visco-plastique. Sous l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement plastique, la fonctionnelle proposée en [2] se réduit à :

$$\Phi(V, T) = \int_{-H}^H \Psi^* \left( \frac{T}{\Theta} V_{,y} \right) - \chi \left( -\frac{T_{,y}}{T} \right) dy$$

où  $\Psi^*$  est un pseudo-potentiel de dissipation décrivant la visco-plasticité :

$$\Psi^* \left( \frac{T}{\Theta} V_{,y} \right) = \frac{1}{m+1} \frac{\tau_0}{(\dot{\gamma}_0)^m} \exp \left[ -\beta \left( \left( \frac{\Theta}{T_0} \right) - 1 \right) \right] \left( V_{,y} \frac{T}{\Theta} \right)^{m+1} \quad m \in [0, 1] \quad (1)$$

tandis que  $\Theta(y)$  est un profil de température de référence, déterminé itérativement ;  $m$  est un exposant de sensibilité à la vitesse de déformation,  $\beta$  est un coefficient d'adoucissement thermique ;  $\tau_0$  et  $\dot{\gamma}_0$  sont la

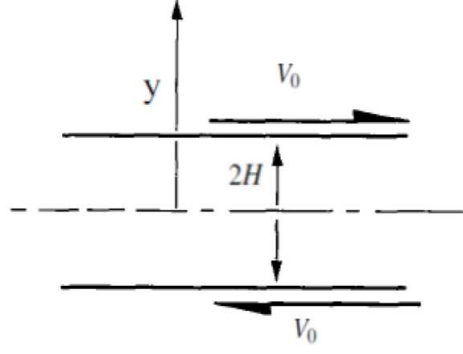


FIG. 1 – Le problème unidimensionnel [1]

contrainte et la vitesse de déformation de référence,  $T_0$  est la température initiale. La fonction  $\chi$  est un pseudo-potentiel décrivant la conduction (potentiel de Biot) :

$$\chi\left(-\frac{T_y}{T}\right) = \frac{1}{2}\lambda\Theta\left(\frac{T_y}{T}\right)^2 \quad (2)$$

où  $\lambda$  est la conduction thermique. En vue de vérifier la modélisation énergétique variationnelle, les paramètres géométriques et les propriétés matérielles sont choisis identiques à ceux de [1]. Supposant que les bords sont isothermes, on impose les conditions limites suivantes :

$$V|_{\pm H} = V_0; \quad T|_{\pm H} = T_0$$

En pratique, on résout le problème d'optimisation par une approche de type Galerkin utilisant comme fonctions de base les profils canoniques de vitesse et température obtenus par Leroy et Molinari [1] :

$$V(y) = V_0 \frac{\tanh(y/h_v)}{\tanh(H/h_v)}, \quad T(y) = T_{max} - (T_{max} - T_0) \frac{\ln(\cosh(y/h_T))}{\ln(\cosh(H/h_T))} \quad (3)$$

On introduit les largeurs de bande cinématique  $h_v$ , thermique  $h_T$  et la température au coeur de la bande  $T_{max}$  comme des inconnues indépendantes. En considérant que le matériau présente une seule largeur de BCA, on impose  $h_v \simeq h_T$ . Sous cette condition, les équations de bilan du problème de BCA(1D) sont alors obtenues par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\inf_V \max_T \left[ \Phi + \frac{1}{2}\mu(h_v - h_T)^2 \right] \quad (4)$$

où  $\mu$  est un paramètre de pénalité. Cette approche n'utilise pas de maillage, ce qui évite les difficultés associées de simulation numérique. Après substitution des expressions (3) dans (4), l'optimisation a lieu sur les variables  $h_v$ ,  $h_T$  et  $T_{max}$ . Contrairement à [1] qui considère explicitement une seule largeur de BCA, nous imposons ici cette contrainte via un terme de pénalité pour faciliter la résolution numérique. Les résultats numériques (Tab. 1) sont en accord avec les solutions analytiques de [1]. La Fig 2 montre les profils de vitesse et de température ( $H = 1.25mm, V_0 = 0.01108m/s$ ) en régime stationnaire dans l'épaisseur de la zone. La déformation est localisée dans le domaine  $[-0.247 \text{ mm}, 0.247 \text{ mm}]$ , et la température au coeur est 395 K.

TAB. 1 – La largeur de BCA(sans unité) et la température maximale(K) ( $\beta = 0.38; V_0 = 0.1108 \text{ m/s}$ )

	variationnelle [ $h_v$ $h_T$ $T_{max}$ ]	analytique (Molinari) [ $h$ $T_{max}$ ]
$m = 0.12; \kappa = 1/0.242373$	$\begin{bmatrix} 0.312643 & 0.312643 & 775.026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.312643 & 775.020 \end{bmatrix}$
$m = 0.012; \kappa = 1/0.403788$	$\begin{bmatrix} 0.031073 & 0.031073 & 896.626 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.031072 & 896.656 \end{bmatrix}$
$m = 0.06; \kappa = 1/0.3218$	$\begin{bmatrix} 0.153552 & 0.153552 & 851.299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.153552 & 851.303 \end{bmatrix}$

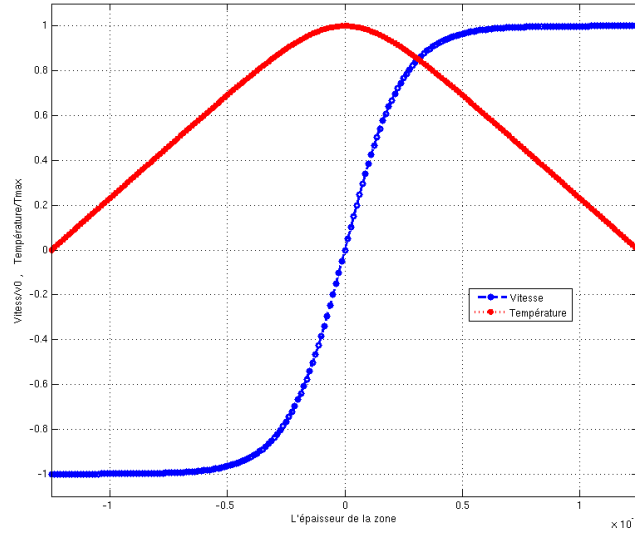


FIG. 2 – Les profils de vitesse et de température dans le régime stationnaire

## 2.2 Régime transitoire

La modélisation de l'évolution de BCAs dans les matériaux thermo-viscoplastiques implique également des difficultés de simulation numérique. On va donc chercher à étendre la formulation variationnelle stationnaire du paragraphe précédent au cas transitoire. Pour valider cette formulation incrémentale semi-analytique, on va considérer également une approche MEF variationnelle.

### 2.2.1 Formulation incrémentale

On peut décrire le problème transitoire comme une suite de problèmes incrémentaux d'optimisations. En général, le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  est décomposé suivant :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^P$$

En considérant l'incrément  $[t_n, t_{n+1}]$ , et supposant l'état initial  $[\mathbf{F}_n, T_n, \mathbf{F}_n^P]$  connu, on va estimer les valeurs  $[\mathbf{F}_{n+1}, T_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^P]$  en utilisant le modèle énergétique variationnel. Si le matériau satisfait le modèle plastique de Von Mises, la loi d'écoulement plastique incrémentale s'écrit :

$$\mathbf{F}_{n+1}^P = \exp[(\bar{\epsilon}_{n+1}^P - \bar{\epsilon}_n^P) \mathbf{M}] \mathbf{F}_n^P$$

$$tr(\mathbf{M}) = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \frac{3}{2}$$

où  $\bar{\epsilon}^P$  est la déformation plastique cumulée. Yang et al. [2] ont proposé une formulation incrémentale variationnelle dans le cadre thermo-mécanique :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(\mathbf{F}_{n+1}, T_{n+1}; \mathbf{F}_n, T_n, \mathbf{F}_n^P, \bar{\epsilon}_n^P) &= \inf_{\bar{\epsilon}_{n+1}^P, \mathbf{M}} [W(\mathbf{F}_{n+1}, T_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^P, \bar{\epsilon}_{n+1}^P) \\ &\quad - W(\mathbf{F}_n, T_n, \mathbf{F}_n^P, \bar{\epsilon}_n^P) + \eta_n(T_{n+1} - T_n) \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi^* \left( \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{\Delta \bar{\epsilon}^P}{\Delta t}; T(t) \right) dt] \end{aligned} \quad (5)$$

où  $W(\mathbf{F}_{n+1}, T_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^P, \bar{\epsilon}_{n+1}^P)$  est l'énergie libre :

$$W = W^e(\mathbf{F} \mathbf{F}^{P-1}, T) + W^P(\bar{\epsilon}^P, T) + W^{th}(T)$$

$W^e$ ,  $W^P$  et  $W^{th}$  sont l'énergie élastique, plastique stockée et l'énergie thermique décrivant la capacité de stockage de chaleur [3]. Dans le potentiel local (5),  $\eta_n$  est l'entropie donnée par la définition :

$$\eta_n = -W(\mathbf{F}_n, T_n, \bar{\epsilon}_n^P)_{,T_n}$$

et  $\Delta \bar{\epsilon}^P = \bar{\epsilon}_{n+1}^P - \bar{\epsilon}_n^P$ . Comme précédemment, la fonction  $\Psi^*$  est le pseudo-potentiel dissipatif. La contrainte de Piola-Kirchhoff dérive du potentiel incrémental pseudo-thermoélastique :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_n}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \mathbf{P}_{n+1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}_n}{\partial T_{n+1}} = -\Delta \eta + \frac{\Delta t}{T_{n+1}} D_{int}$$

où  $D_{int}$  et la dissipation intrinsèque. Le potentiel total s'écrit alors suivant :

$$\Phi_n = \int_{-H}^H \left[ \mathcal{W}_n - \Delta t \chi \left( \frac{1}{T_{n+1}} \frac{\partial T_{n+1}}{\partial y} \right) \right] dy$$

où  $\chi$  est le potentiel Fourier. En général, le gradient de déformation est la forme :

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \frac{\partial \overrightarrow{u_{n+1}}}{\partial \overrightarrow{x}}$$

En considérant que le problème est 1D soumis une sollicitation de cisaillement simple, on considère en pratique le tensor  $\mathbf{F}_{n+1}$  suivant :

$$\mathbf{F}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, le principe variationnel incrémental s'écrit suivant :

$$\inf_{u_{n+1}} \max_{T_{n+1}} \Phi_n(u_{n+1}, T_{n+1}; u_n, T_n, \mathbf{F}_n^P, \bar{\epsilon}_n^P) \quad (6)$$

Les équations d'Euler-Lagrange de (6) correspondent aux principes d'équilibre mécanique et thermique quand l'incrément  $\Delta t$  tend vers zéro [2].

### 2.2.2 L'approche MEF

L'approche MEF est basée sur le principe variationnel incrémental, où l'on calcule les profils optimaux de déplacement et de température à chaque pas de temps. L'élasticité et la capacité thermique sont prises en comptes, les expressions des potentiels étant celles détaillées en [3]. Dans la simulation numérique, on néglige l'effet de l'écrouissage de matériau pour comparer les résultats avec les solutions analytiques [1]. On utilise l'approximation suivante pour assurer la consistance avec l'équation de la chaleur [4] :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi^* \left( \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{\Delta \epsilon^P}{\Delta t}; T(t) \right) dt \approx \frac{T_n}{T_{n+1}} \Psi^* \left( \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{\Delta \epsilon^P}{\Delta t}; T_n \right) + \frac{\Delta T}{T_{n+1}} \Psi^* \left( \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{\Delta \epsilon^P}{\Delta t}; T_{n+\alpha} \right)$$

où  $\alpha$  est un paramètre algorithmique, choisi égal à 0.5 ici.

On observe que les distributions de vitesse et de température atteignent un régime stationnaire, conformément à l'analyse semi-analytique précédente (Fig. 3 pour  $H = 1.25mm, V_0 = 0.01108m/s, T_0 = 300K$ ). Une moitié de la zone est calculée par MEF en vue de la symétrie. Avec l'augmentation du temps, les profils de vitesse changent de la forme linéaire au début à une forme nonlinéaire. De plus, l'augmentation localisée de la vitesse de la déformation plastique conduit à une augmentation de la température. Dans l'évolution de la BCA, les largeurs de bande cinématique et thermique diminuent pas à pas jusqu'à converger vers une valeur commune, en accord avec les solutions analytiques (Fig. 4). Les largeurs de bande présentent une variation importante à chaque pas de temps avant  $t = 0.05s$ , et puis le changement diminue lentement et les valeurs atteignent un état stable quand  $t = 0.1s$ . On obtient que la largeur de bande est 0.248 mm, conformément à l'analyse stationnaire. A partir des profils de vitesse et de température obtenus par l'approche MEF, les largeurs de bande cinématique et thermique sont calculées par :

$$\begin{cases} h_{v_{n+1}} = y & \text{si } V_{n+1}(y) \simeq V_0 \tanh(1) \\ h_{T_{n+1}} = y & \text{si } \frac{2m}{\beta} \log(\cosh(\frac{H}{y})) = \frac{T_{max}}{T_0} - 1 \end{cases}$$

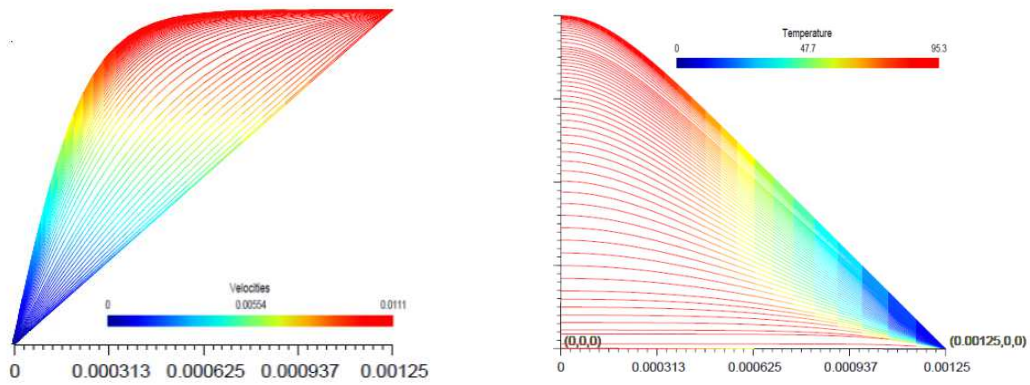


FIG. 3 – Evolution temporelle des profils de vitesse et de température ( $V_0 = 0.01108m/s$ )

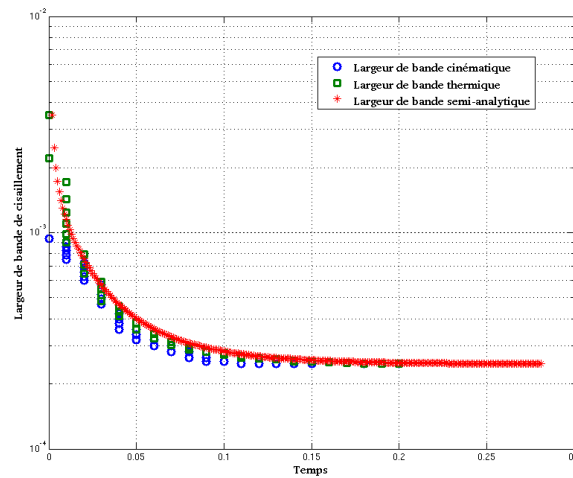


FIG. 4 – Largeurs de bande cinématique, thermique (MEF) et semi-analytique dans le régime transitoire ( $V_0 = 0.01108m/s$ )

Avant d'atteindre un régime stationnaire, on peut observer une zone affectée thermiquement (ZAT) dans laquelle la température présente un gradient plus faible, en accord avec l'expérience [5]. La Fig. 5 montre les profils de température quand  $V_0 = 1m/s$  : on observe ce phénomène plus clairement que dans la Fig. 3 quand  $V_0 = 0.01108m/s$ . Ainsi on déduit que le domaine de la ZAT dépend de la charge aux bords, la largeur de ZAT étant en rapport direct à  $V_0$ . Dans l'état stationnaire de BCA obtenu par l'approche MEF, la largeur de bande cinématique ( $V_0 = 1m/s$ ) est  $0.014583$  mm, en accord avec la solution analytique ( $0.015471$  mm). Par conséquent, la largeur de BCA stationnaire est en rapport inverse de  $V_0$ .

### 2.2.3 L'approche semi-analytique

Vu la localisation de la déformation dans les BCAs, les descriptions de vitesse et de température calculée par MEF dépendent fortement de la qualité du maillage dans cette zone. Si les maillages sont peu raffinés par rapport à la largeur de bande, il y a de grandes erreurs. Si les maillages sont très fins, d'une part, en raison de la localisation de la zone de déformation intense, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage fin dans toute la structure, et d'autre part, le coût de calcul est très élevé. Yang et al. [6] ont introduit des éléments d'interface permettant de représenter la discontinuité de déplacement associée à la BCA. Ces éléments doivent être placés aux interfaces entre éléments volumiques, et ils requièrent également la définition d'une largeur de BCA. Il est donc important de pouvoir estimer la largeur caractéristique des BCA et d'éviter la dépendance au maillage dans les simulations numériques. L'approche

semi-analytique basée sur la formulation variationnelle présente de ce point de vue les intérêts de la robustesse et de l'efficacité dans le régime transitoire.

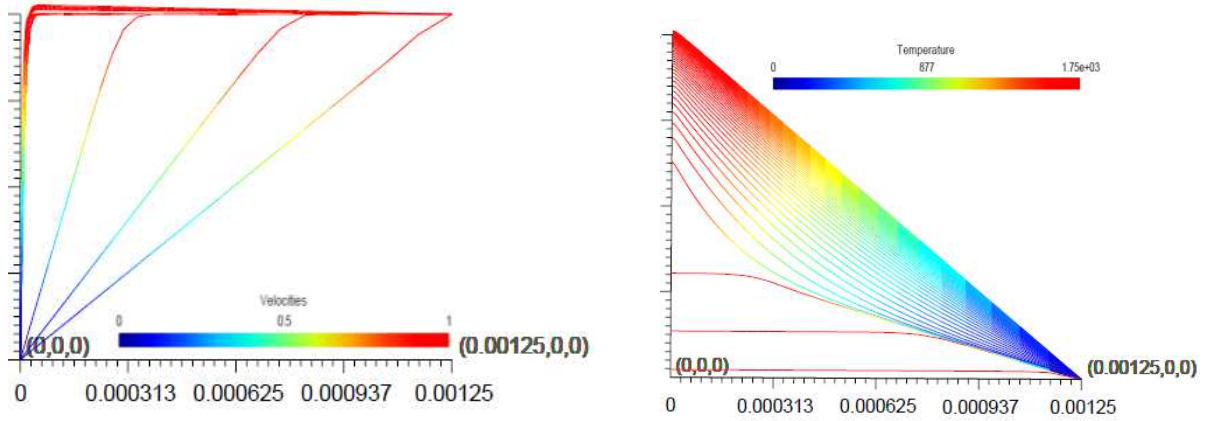


FIG. 5 – Evolution temporelle des profils de vitesse et de température ( $V_0 = 1m/s$ )

En considérant l'incrément  $[t_n, t_{n+1}]$ , on néglige les énergies élastique  $W^e$  et plastique  $W^P$ , et choisit l'énergie thermique décrivant la capacité de stockage de chaleur suivante :

$$W^{th}(T_{n+1}) = \rho_0 C_0 T_{n+1} \left( 1 - \log \frac{T_{n+1}}{T_0} \right)$$

où  $\rho$  est la densité matérielle,  $C_0$  est la chaleur spécifique. L'entropie est alors donnée par  $\eta_n = -\rho_0 C_0 \log \frac{T_n}{T_0}$ . Les fonctions  $\Psi^*$  et  $\chi$  en temps  $t_{n+1}$  sont choisies similaires à celles utilisées pour le régime stationnaire (1) et (2).

Faisant l'approximation que les profils canoniques [1] satisfont les distribution des profils de vitesse et de température en chaque pas de temps, on peut utiliser une approche de type de Ritz-Galerkin. Au temps  $t_{n+1}$ , les profils de vitesse et de température sont choisis suivants :

$$V(y) = V_0 \frac{\tanh(y/h_{v_{n+1}})}{\tanh(H/h_{v_{n+1}})}, \quad T(y) = T_0 - \frac{2m}{\beta} T_0 \ln \frac{\cosh(y/h_{T_{n+1}})}{\cosh(H/h_{T_{n+1}})} \quad (7)$$

avec  $m$ ,  $\beta$  sont les paramètres matériau. Pour la simplicité de la simulation, on considère les largeurs de la bande cinématique  $h_{v_{n+1}}$  et thermique  $h_{T_{n+1}}$  comme des inconnues indépendantes. Ainsi, l'optimisation incrémentale du problème de BCA (Fig. 1) se transforme en

$$\inf_{h_{v_{n+1}}} \max_{h_{T_{n+1}}} \left[ \Phi_n(h_{v_{n+1}}, h_{T_{n+1}}; h_{v_n}, h_{T_n}) + \frac{1}{2} \mu (h_{v_{n+1}} - h_{T_{n+1}})^2 \right] \quad (8)$$

Dans nos calculs, en considérant la non-linéarité des équations d'Euler-Lagrange de (8), on choisit une amélioration de l'algorithme de Newton-Raphson, l'algorithme des régions de confiance, pour résoudre les largeurs de bande  $h_{v_{n+1}}$  et  $h_{T_{n+1}}$ . Cet algorithme assure la convergence et la stabilité des solutions plus fortement en comparaison avec les autres algorithmes de type Newton. Au temps initial, il n'y a pas de BCA dans la zone, on donne alors

$$h_{v_0} = H, h_{T_0} = H$$

Le pas de temps choisi est  $\Delta t = 10^{-3}s$ .

A l'aide de cette approche semi-analytique, les largeur de bande cinématique  $h_{v_{n+1}}$  et thermique  $h_{T_{n+1}}$  sont calculées en chaque pas de temps. Ensuite les profils de vitesse et de température sont représentés par les fonctions analytiques (Fig. 6). Dans la figure de la distribution de vitesse, on trouve que les profils évoluent d'une forme linéaire vers une forme non-linéaire et tendent vers un état stable. La largeur de bande cinématique stationnaire est 0.2469 mm. L'évolution de vitesse est plus marquée avant  $t = 0.8s$ , et tend à la stabilité graduellement, comme dans l'analyse par MEF. Dans la figure de la distribution

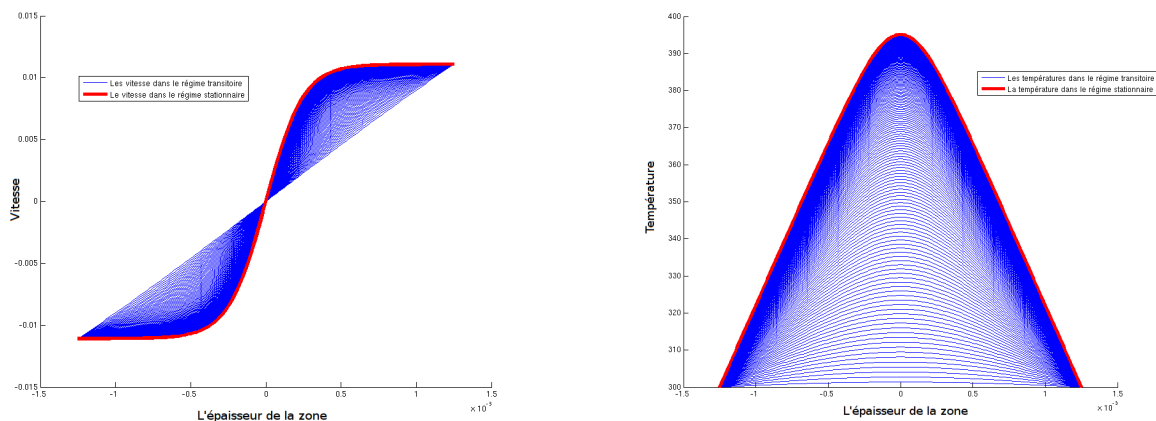


FIG. 6 – Evolution temporelle des profils de vitesse et de température par l’approche semi-analytique

de température, les profils de température tendent vers le profil stable, en accord avec les solutions analytiques (les lignes rouge dans Fig. 6). La température maximale et la largeur de bande thermique stationnaires sont 395.39 K et 0.2468 mm. Ainsi les largeurs de bande cinématique et thermique convergent vers la même valeur comme dans l’analyse [1]. La Fig. 4 donne aussi les évolutions des largeurs cinématiques de BCA calculées par l’approche semi-analytique, conformément aux résultats obtenus par l’approche MEF. L’approche semi-analytique présente aussi l’avantage d’un temps de calcul réduit : la simulations quand  $V_0 = 0.01108m/s$ , il demande 23 minutes pour obtenir la solution stationnaire, tandis que l’approche MEF demande environ 45 minutes pour atteindre la stabilité. La performance de l’approche semi-analytique devrait encore pouvoir être améliorée. Cependant, en raison de l’utilisation de la fonction de température analytique dans tout le processus dynamique, on ne peut pas représenter la zone affectée thermiquement.

On a aussi étudié l’influence du pas de temps dans l’approche semi-analytique (Fig. 7). Le pas de temps est un paramètre important de la simulation numérique de BCA. La Fig. 7 présente les convergences des largeurs de bande cinématique et thermique avec le temps pour des pas de temps  $10^{-4}s$ ,  $10^{-3}s$ ,  $10^{-2}s$ . Le plus grand pas de temps, comme  $10^{-2}s$ , conduit à une faible convergence et montre des solutions peu fiables (sauts) dans le régime transitoire, malgré que, en fin de compte, la solution tend vers une valeur commune, approximativement aussi bien que la solution analytique. Au contraire, la convergence de la largeur avec le pas de temps  $10^{-3}s$  est similaire à celle obtenue avec le pas de temps  $10^{-4}$ . Ainsi, la simulation numérique atteint un état stable quand on choisit le pas de temps inférieur à  $10^{-3}s$ .

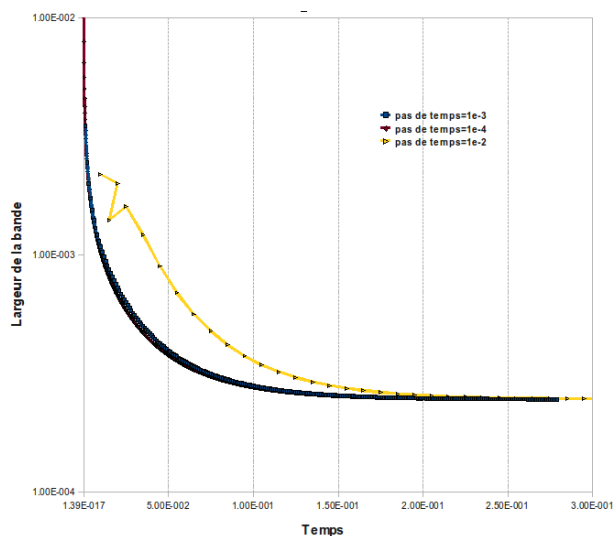


FIG. 7 – Largeurs de BCA transitoires par différent pas de temps



### 3 Conclusion

Dans ce travail, pour une zone soumise à une sollicitation de cisaillement simple, l'approche énergétique variationnelle [2] a été appliquée à la modélisation des bandes de cisaillement adiabatique en suivant deux voies. L'approche semi-analytique permet de déterminer les caractéristiques stationnaires d'une BCA en régime établi et transitoire, tout en impliquant un nombre réduit de variables. La seconde approche numérique et incrémentale (MEF) tend à valider la première approche. La cohérence avec les solutions analytiques [1] exprime l'intérêt, l'efficacité et la faisabilité de la modélisation des bandes de cisaillement adiabatique par l'approche énergétique variationnelle.

### Références

- [1] Y.M. Leroy, A. Molinari. *Stability of steady states in shear zones*, J. Mech. Phys. Solids 40(1), 181-212, 1992.
- [2] Q. Yang, L. Stainier, M. Ortiz. *A variational formulation of the coupled thermomechanical boundary-value problem for general dissipative solids*, J. Mech. Phys. Solids 54(2), 401-424, 2006.
- [3] L. Stainier, M. Ortiz. *Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity*, Int. J. Solids Struct. 47(5), 705-715, 2010.
- [4] L. Stainier. *Consistent incremental approximation of dissipation pseudo-potentials in the variational formulation of thermo-mechanical constitutive updates*, soumis à Mechanics Research Communications.
- [5] F. Dinzart, A. Molinari. *Structure of adiabatic shear bands in thermo-viscoplastic materials*, Eur. J. Mech. A/Solids 17), 923-938, 1998.
- [6] Q. Yang, A. Mota, M. Ortiz. *A class of variational strain-localization finite elements*, J. Int. J. Numer. Meth. Engng 62(8), 1013-1037, 2005.