



HAL
open science

Reconstruction robuste à partir de mesures de champs par approximation diffuse et régularisation

Alain Cimetiere, Pierre Feissel, Pierre Villon

► **To cite this version:**

Alain Cimetiere, Pierre Feissel, Pierre Villon. Reconstruction robuste à partir de mesures de champs par approximation diffuse et régularisation. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592781

HAL Id: hal-00592781

<https://hal.science/hal-00592781>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Reconstruction robuste à partir de mesures de champs par régularisation

P. Feissel¹, A. Cimetière², P. Villon¹

¹ Laboratoire Roberval de Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France {pierre.feissel,pierre.villon}@utc.fr

² Univ Poitiers, LMP, F-86962 Futuroscope, France, alain.cimetiere@univ-poitiers.fr

Résumé — Ce travail propose un outil de reconstruction des déformations à partir de champs de déplacements mesurés. Une approche basée sur une formulation aux moindres carrés est proposée, où les conditions de compatibilité cinématique sont prises en compte sous forme de contrainte ou de pénalisation. Ces équations sont introduites afin de proposer une régularisation des champs de déformation reconstruits. La méthode est étudiée sur des exemples numériques.

Mots clés — Déformation, régularisation, mesures de champs.

1 Introduction

L'identification de paramètres matériaux à partir de mesures de champs de déplacements fait partie des enjeux actuels pour le développement d'approches inverses [1]. Pour certaines approches ainsi que pour l'exploitation qualitative des essais, il est nécessaire de disposer du champ de déformations, ce qui nécessite, dans la démarche, une étape de dérivation de mesures bruitées faisant appel au filtrage des perturbations expérimentales. Dans ce cadre, une première étude utilisant l'Approximation Diffuse a déjà été menée [2]. La pertinence de cette approche a clairement été montrée et la méthode a été comparée à d'autres techniques [2]. Dans la mesure où le filtrage proposé ne repose sur aucune considération mécanique, on peut toutefois s'interroger sur le biais que celui-ci pourra engendrer sur les résultats d'identification.

Dans [3], il semble qu'un filtrage, sans considérations mécaniques, améliore les résultats d'identification par moindres carrés de propriétés élastiques hétérogènes. Toutefois, nous souhaitons proposer dans ce papier une approche de dérivation tenant compte d'une régularisation permettant d'obtenir des champs cinématiques plus proches de champs mécaniques. En effet, certaines méthodes de régularisation développées dans le cadre général des problèmes inverses se sont révélées particulièrement efficaces pour résoudre des problèmes mal posés, comme par exemple les problèmes inverses de Cauchy [4].

La prise en compte d'une information mécanique dès l'étape de mesure des déplacements [5] ou lors de la reconstruction des déformations suppose de faire des hypothèses sur la modélisation de l'essai en tant que problème de mécanique des milieux continus. Ces derniers sont régis par les trois équations suivantes :

- l'équation d'équilibre ;
- la relation de comportement ;
- la compatibilité cinématique.

Tenir compte de l'une ou des deux premières équations demande de faire des hypothèses, même minimales, sur la relation de comportement, comme dans [5]. Toutefois, pour certaines applications, ces hypothèses ne sont pas disponibles simplement. L'idée ici est donc de s'appuyer sur la troisième équation, celle de compatibilité cinématique, qui assure un minimum de cohérence aux champs reconstruits. Il se trouve que cette dernière équation (exprimée sur les dérivées d'ordre 2 des déformations) n'est en général pas vérifiée par les champs éléments finis (souvent C^0 ou C^1) et devra être définie à partir d'opérateurs approchés.

Le travail que nous proposons ici consiste à conjuguer les outils de dérivation des déplacements développés dans [2] aux approches de régularisation proposées avec succès dans [4] pour le problème de Cauchy. L'objectif est donc la reconstruction des champs de déplacements et de déformations obtenus à partir de mesures initiales, qui soient régularisés. La régularisation s'appuie sur les conditions de com-

patibilité cinématique et ainsi garantit de reconstruire des champs mieux régularisés d'un point de vue mécanique [4].

Nous présentons dans un premier temps la méthode proposée, les choix qu'elle suppose et sa mise en œuvre numérique, puis nous présentons quelques résultats sur des exemples numériques où il est possible d'étudier explicitement les erreurs commises.

2 Cadre pour la reconstruction des déformations

On suppose que le domaine Ω est de dimensions 2 et l'on se place dans le cadre des hypothèses de petites perturbations. Par ailleurs, on dispose de mesures de déplacements $\{U^m(x_k), k = 1, \dots, M\}$ situées sur une grille régulière $\{x_1, \dots, x_M\}$ dans Ω . On veut reconstruire $U(x)$ ainsi que le tenseur des déformations $\varepsilon(x)$ en tout point x à l'intérieur de Ω . Ceci doit être fait de sorte que $\varepsilon(x)$ et U soient associés au sens d'un dérivateur approché que nous allons préciser. De plus, afin d'améliorer la consistance de ce schéma, nous allons utiliser les équations de compatibilité.

3 Mise en équations

On suppose le domaine Ω maillé en n_{el} éléments triangulaires et n nœuds correspondants. On utilise une approximation éléments finis de type linéaire (c'est-à-dire P1). Les points de mesures x_k ne coïncident pas, *a priori*, avec les nœuds ni les points d'intégration. Le champ de déplacements reconstruit $U(x) = (u(x), v(x))$ est recherché sous la forme de son approximation éléments finis $U^{EF}(x) = (N(x)U, N(x)V)$ où U et V sont les vecteurs des valeurs nodales et les inconnues de notre problème ainsi discrétisé. $N(x) = (N_1(x), \dots, N_n(x))$ est le vecteur ligne des fonctions de forme attachées à chaque nœud.

Le critère d'erreur que nous considérons représente l'écart quadratique aux mesures,

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \left\{ (U^{EF}(x_k) - U^m(x_k))^2 + (V^{EF}(x_k) - V^m(x_k))^2 \right\} \quad (1)$$

Afin d'introduire les conditions de compatibilité comme contrainte, il nous faut introduire un second dérivateur, différent de celui des éléments finis. Notre choix s'est porté sur un outil déjà introduit dans [2] et que, par commodité, nous avons baptisé «dérivateur nodal». Afin de définir sans ambiguïté ce dérivateur nodal, il faut préciser quelques notations.

La dérivée éléments finis d'une fonction scalaire $U^{EF}(x) = N(x)U$ se calcule naturellement par

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{U^{EF}\}(x) = \frac{\partial N}{\partial x_1} \cdot U \quad (2)$$

La dérivée nodale de cette même fonction $U^{EF}(x)$ s'écrit $D_{x_1}[U^{EF}](x) = N(x)\{D_{x_1}U\}$ où le vecteur $\{D_{x_1}U\}$ est calculé par minimisation,

$$\{D_{x_1}U\} = \text{Argmin} \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \{U^{EF}\} - N(\cdot) \cdot W \right\|_{\mathbb{R}^n}^2, W \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (3)$$

Le calcul donne immédiatement

$$[M]\{D_{x_1}U\} = [K_{x_1}]U \quad (4)$$

où M est la matrice de masse telle que $M_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x)N_j(x) dx$ et K_{x_1} est donnée par :

$$[K_{x_1}]_{ij} = \int_{\Omega} N_i(x) \frac{\partial N_j}{\partial x_1}(x) dx \quad (5)$$

Remarque 1 : Il est important de noter que D_{x_1} ne commute pas avec D_{x_2} et cela joue un rôle essentiel pour la suite.

Remarque 2 : On peut dériver autant de fois que l'on veut, puisque l'on reste toujours dans le même espace éléments finis.

Remarque 3 : la dérivée nodale est consistante, c'est à dire :

- si $U^{EF}(x) = 1$ alors $D_{x_1}[U^{EF}](x) = 0$ et $D_{x_2}[U^{EF}](x) = 0$,
- si $U^{EF}(x) = x_1$ alors $D_{x_1}[U^{EF}](x) = 1$ et $D_{x_2}[U^{EF}](x) = 0$,
- si $U^{EF}(x) = x_2$ alors $D_{x_1}[U^{EF}](x) = 0$ et $D_{x_2}[U^{EF}](x) = 1$,

On est maintenant en mesure de traduire la condition de compatibilité. Celle-ci s'énonce en continu comme suit : un tenseur symétrique $\varepsilon(x)$, de classe C^2 sur W est la déformation d'au moins un champ de déplacements $U(x)$ si et seulement si :

$$[\varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1}]_{,2} + [\varepsilon_{22,1} - \varepsilon_{12,2}]_{,1} = 0 \quad (6)$$

Dans le contexte des éléments finis, en utilisant le dérivateur nodal, le tenseur de déformations associé à $U^{EF}(x)$ est donné par :

$$\varepsilon_{11}(x) = D_{x_1}[U^{EF}](x), \quad \varepsilon_{22}(x) = D_{x_2}[V^{EF}](x), \quad \varepsilon_{12}(x) = \varepsilon_{21}(x) = \frac{1}{2} (D_{x_2}[U^{EF}](x) + D_{x_1}[V^{EF}](x)) \quad (7)$$

D'où la condition de compatibilité au sens du dérivateur nodal :

$$\left\{ D_{x_2} D_{x_2} D_{x_1}[U^{EF}] - \frac{1}{2} D_{x_2} D_{x_1} D_{x_2}[U^{EF}] - \frac{1}{2} D_{x_1} D_{x_2} D_{x_2}[U^{EF}] \right. \\ \left. + D_{x_1} D_{x_1} D_{x_2}[V^{EF}] - \frac{1}{2} D_{x_2} D_{x_1} D_{x_1}[V^{EF}] - \frac{1}{2} D_{x_1} D_{x_2} D_{x_1}[V^{EF}] \right\}(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (8)$$

Cela se traduit immédiatement sur les vecteurs des inconnues nodales U et V par :

$$\left\{ D_{x_2} D_{x_2} D_{x_1}[U] - \frac{1}{2} D_{x_2} D_{x_1} D_{x_2}[U] - \frac{1}{2} D_{x_2} D_{x_1} D_{x_1}[V] \right. \\ \left. + D_{x_1} D_{x_1} D_{x_2}[V] - \frac{1}{2} D_{x_1} D_{x_2} D_{x_2}[U] - \frac{1}{2} D_{x_1} D_{x_2} D_{x_1}[V] \right\}(x) = 0 \quad (9)$$

Ce que nous noterons algébriquement par :

$$B_u U + B_v V = 0 \quad (10)$$

4 Résolution du problème d'optimisation

D'après le paragraphe précédent, on est ramené à résoudre le problème d'optimisation suivant : Trouver U et V dans \mathbb{R}^n qui minimisent :

$$J(U, V) = \frac{1}{2} \{ \|NU - U^{mes}\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \|NV - V^{mes}\|_{\mathbb{R}^M}^2 \} \quad (11)$$

sous les contraintes

$$B_u U + B_v V = 0 \quad (12)$$

La fonction coût est quadratique, strictement convexe et les contraintes sont linéaires, par conséquent, il existe un unique couple (U, V) solution qui est caractérisé par les conditions d'optimalité du premier ordre. Celles-ci s'écrivent :

$$\begin{cases} N^T N U + B_u^T \lambda = N^T U^m \\ N^T N V + B_v^T \lambda = N^T V^m \\ B_u U + B_v V = 0 \end{cases} \quad (13)$$

où N est la matrice $M \times n$ telle que $N_{ij} = N_j(x_i)$ et λ le multiplicateur associé à la contrainte (12). La résolution numérique ne pose pas de difficultés particulières, à condition de tenir compte du fait que certaines des contraintes de (12) sont redondantes. Pour cela, une factorisation QR est utilisée.

5 Résultats numériques

5.1 Critères d'étude des exemples

La méthode proposée est illustrée sur des exemples numériques où les champs exacts utilisés pour fabriquer les mesures sont choisis analytiques afin de contrôler leur contenu fréquentiel. Ceci permet

en outre d'avoir explicitement les erreurs commises. Ainsi, en notant que l'opérateur de reconstruction utilisé est un opérateur linéaire, la décomposition de l'erreur en erreur aléatoire et erreur d'approximation [6] est directement reliée à celle des mesures. En notant les mesures :

$$U^m = U^{ex} + \delta U \quad (14)$$

le champs de déformation reconstruit s'écrit :

$$\epsilon^{rec} = \epsilon^{ex} + \delta\epsilon^k + \delta\epsilon^b \quad (15)$$

où $\delta\epsilon^k$ est l'erreur d'approximation et correspond à la différence entre le champ de déformation exact et sa reconstruction et $\delta\epsilon^b$ est l'erreur aléatoire qui correspond à la reconstruction de la déformation associée au bruit seul.

Cette dernière peut être caractérisée d'un point de vue statistique par son écart-type. Ce dernier peut être connu à partir de la matrice de covariance du bruit de mesure et de l'opérateur de reconstruction [2]. Dans le cas présent, il sera estimé sur une série de tirages (ici, 400).

La qualité de la reconstruction sera donc discutée en fonction de ces deux erreurs. Nous nous intéresserons en particulier aux erreurs moyennes obtenues sur l'ensemble de la zone de mesure commises sur la déformation ϵ_{XX} .

Les champs exacts sont construits sur le carré unité et l'opérateur de reconstruction s'appuie sur un maillage éléments finis T3 dont on contrôle la taille de maille (de 0,03 à 0,1, correspondant respectivement à 2600 et 200 éléments).

5.2 Effet de la taille de maille

Dans ce premier exemple, le champs de déplacement exact est choisi sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u^{ex}(x,y) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-y\right)} \\ v^{ex}(x,y) = y \end{cases} \quad (16)$$

où u^{ex} est la composante horizontale de U^{ex} et v^{ex} sa composante verticale.

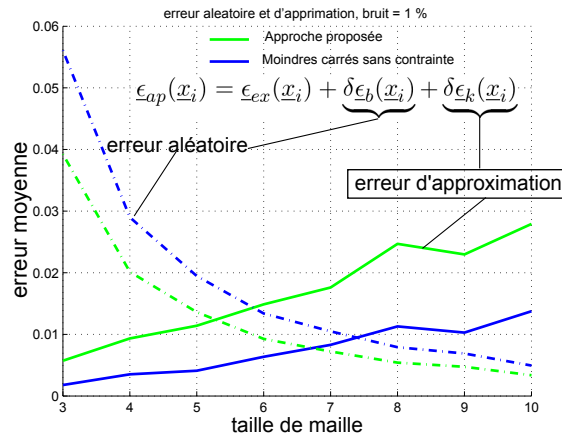


FIGURE 1 – Filtrage du bruit de mesure sur l'approximation diffuse espace-temps

La Figure 1 présente les erreurs aléatoire et d'approximation pour les mesures (16) en fonction de la taille de maille utilisée pour les opérateurs de reconstruction, pour un bruit de mesure de 1%. Sont comparés la reconstruction par la méthode proposée et des moindres carrés s'appuyant sur (11), ce qui revient à minimiser (11) sans la contrainte (12) et est une des méthodes proposée dans [2]. Il apparaît que la prise en compte de la contrainte (12) a, comme attendu, un effet régularisant, puisqu'elle a pour effet de diminuer l'erreur aléatoire. Toutefois, elle augmente également l'erreur d'approximation et l'erreur totale est finalement plus favorable à l'approche classique sur cet exemple.

5.3 Effet du contenu fréquentiel du champs à reconstruire

Dans ce second exemple, les champs de déplacement sont pris sous la forme :

$$\begin{cases} u^{ex}(x,y) = \cos(2\pi N_{XX}x) \cos(2\pi N_{XY}y) \\ v^{ex}(x,y) = \cos(2\pi N_{YX}x) \cos(2\pi N_{YY}y) \end{cases} \quad (17)$$

afin d'étudier l'influence du contenu fréquentiel du champ exact sur l'erreur d'approximation. Dans un premier temps, nous prenons : $N_{XX} = N_{XY} = N_{YY} = N_{YX}$.

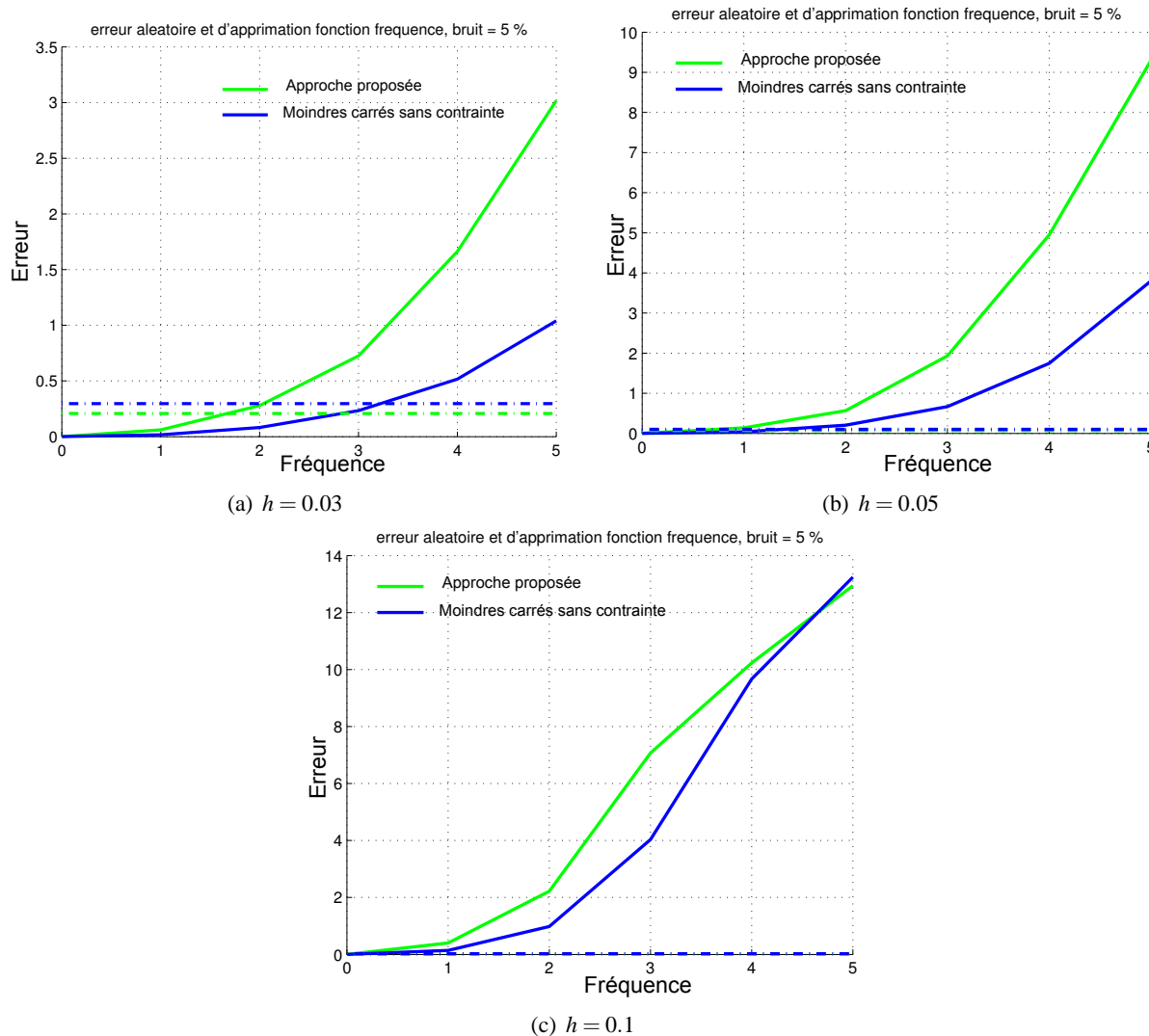


FIGURE 2 – Erreurs en fonction du contenu fréquentiel du champs - effet de la taille de maille, pour un bruit de 5%

La Figure 2 présente les deux erreurs (aléatoire et d'approximation) moyenne sur ϵ_{XX} en fonction de N_{XX} , c'est-à-dire du contenu fréquentiel du champs exact. Le niveau de bruit sur les mesures est pris à 5% de la valeur moyenne du déplacement. Sur chacune des sous-figures, l'erreur aléatoire est constante puisqu'elle ne dépend pas du champ exact. Il apparaît, ce qui était attendu, qu'à taille de maille fixée, l'erreur d'approximation augmente à mesure que N_{XX} augmente. Dans cet exemple à nouveau, l'erreur d'approximation est plus grande par l'approche proposée que par l'approche sans contrainte. De plus, on voit qu'elle devient prépondérante lorsque la fréquence du signal augmente. Il faut toutefois noter que la déformation ϵ_{XX} est proportionnelle à N_{XX} ce qui signifie que l'erreur relative augmente moins vite que l'erreur absolue. Ceci signifie en pratique que c'est l'erreur d'approximation qui sera prépondérante dans les zones à fort gradient de déformation sur des cas pratiques.

5.4 Discussion

Les résultats présentés semblent relativement peu concluants et la méthode proposée reste à améliorer, cette dernière ne devenant pertinente que lorsque les niveaux d'erreur sont déjà trop importants. Il faut toutefois compléter ces exemples numériques par d'autres cas et les agrémenter de quelques remarques et pistes d'évolution pour la méthode proposée. Il semble ainsi que la régularisation imposée aux champs de déformation que l'on souhaite reconstruire est trop forte. Ceci peut provenir d'une part de l'opérateur de dérivation qui a été choisi et qui est un opérateur très approché. Une piste est alors de modifier les opérateurs utilisés afin qu'ils soient plus proches de l'opérateur continu (ce dernier aboutissant à une contrainte trivialement vérifiée), par exemple en passant à une formulation s'appuyant sur des éléments quadratiques de type T6. D'autre part, le choix d'une formulation où l'équation (12) est en contrainte interdit de construire un compromis entre la vérification de cette équation et l'adéquation aux mesures. Il est alors possible de formuler l'approche de telle sorte que l'écart à (12) deviennent un terme de régularisation. Ainsi, le choix du poids de ce terme permettra de construire un compromis et d'offrir plus de souplesse à l'approche. Il pourra alors être intéressant d'également comparer la formulation à une formulation utilisant un terme de régularisation plus standard, par exemple sur la norme de la Hessienne des déformations.

Ces différents points seront discutés lors de la présentation.

6 Conclusion

Une méthode de reconstruction des déformations permettant une régularisation par les équations de compatibilité cinématique a été proposée et illustrée sur des exemples numériques. Les résultats doivent être améliorés en faisant évoluer l'approche proposée, par exemple, en augmentant l'ordre d'approximation. Nous expérimentons actuellement des triangles T6. Une autre piste que nous explorons consiste à coupler l'approche proposée ici avec les outils de dérivation basés sur l'approximation diffuse proposés par ailleurs dans [2].

Références

- [1] S. Avril, M. Bonnet, A-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Jenny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, F. Pierron. Identification from measurements of mechanical fields, *Exp Mech*, 48 :381–402 2008.
- [2] S. Avril, P. Feissel, F. Pierron, P. Villon. Comparison of two approaches for differentiating full-field data in solid mechanics. *Measurement Science and Technology*, 21.1, 015703, 2010.
- [3] M. Ben Azzouna, P. Feissel, P. Villon, Use of diffuse approximation for strain reconstruction from full-field measurements, *ECCM 2010*, Paris
- [4] F. Delvare, A. Cimetière, A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM, *Computational Mechanics*, 41.6, 789-796, 2008.
- [5] H. Leclerc, J. Périé, S. Roux, and F. Hild, Voxel-Scale Digital Volume Correlation, *Experimental Mechanics*, DOI 10.1007/s11340-010-9407-6, 2010.
- [6] P. Feissel, *Du déplacement à la déformation*. Mesures de champs et identification en mécanique des solides (sous la direction de M. Grédiac et F. Hild). Hermès édition, 209–241, 2011.