



**HAL**  
open science

## Etude de la robustesse d'un algorithme basé sur le lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement.

Ayaovi Dzifa Kudawoo, Frédéric Lebon, Mickaël Abbas, Thomas De-Soza,  
Iulian Rosu

### ► To cite this version:

Ayaovi Dzifa Kudawoo, Frédéric Lebon, Mickaël Abbas, Thomas De-Soza, Iulian Rosu. Etude de la robustesse d'un algorithme basé sur le lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592780

**HAL Id: hal-00592780**

**<https://hal.science/hal-00592780>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude de la robustesse d'un algorithme basé sur le Lagrangien stabilisé pour la résolution des problèmes de contact et de frottement

A. D. Kudawoo<sup>1,2,3</sup>, F. Lebon<sup>2</sup>, M. Abbas<sup>1,3</sup>, T. De Soza<sup>3</sup>, I. Rosu<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LaMSID, UMR EDF R & D/CNRS, France, {ayaovi-dzifa,mickael.abbas,thomas.de-soza}@edf.fr

<sup>2</sup> LMA, UPR CNRS, France, {kudawoo,lebon,rosu}@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>3</sup> EDF R&D, AMA T62, France, {ayaovi-dzifa,mickael.abbas,thomas.de-soza}@edf.fr

---

**Résumé** — On présente un algorithme basé sur la formulation mixte de “Lagrangien stabilisé” pour résoudre les problèmes de contact et de frottement entre corps déformables en quasi-statique. Sur un cas-test académique on s'intéresse à la robustesse de cet algorithme plus particulièrement à l'influence des paramètres sur la convergence de l'algorithme étudié.

We present an algorithm based on a mixed Lagrangian formulation called “stabilized Lagrangian” to solve quasi-static frictional contact problems between deformable bodies. In this study, we show the robustness of this algorithm on a simple numerical test in particular the influence of parameters on convergence.

**Mots clés** — contact-frottant, formulations mixtes lagrangiennes, robustesse, convergence.

**Keywords**- frictional contact, mixed lagrangian formulation, robustness, convergence

---

## 1 Introduction générale

On retrouve dans la littérature, plusieurs manières de formuler et de résoudre le problème de contact et de frottement entre corps déformables en quasi-statique. Dans ce travail, on retient la formulation mixte du “Lagrangien stabilisé” [1, 7]. Cette formulation fait intervenir les déplacements comme inconnues primales, la pression de contact comme le multiplicateur de Lagrange associé à la condition de Signorini, et la direction du vecteur contrainte tangent comme le *semi*- multiplicateur associé à la condition de Coulomb.

L'algorithme utilisé, imbrique la méthode de point fixe et la méthode de Newton. Il est implémenté dans *Code\_Aster* [1]. Ce travail se consacre à l'étude de l'influence des paramètres liés à la formulation sur la convergence de l'algorithme. On présente d'abord la formulation du “Lagrangien stabilisé” puis l'algorithme et enfin les résultats sur un cas-test de patin-frottant.

## 2 Formulations du problème et Algorithme de résolution

La figure 1 illustre le problème de contact frottement en quasi-statique avec les corps solides déformables.

Les difficultés classiques du problème sont rappelées :

- Prise en compte des non linéarités matérielles, des non linéarités de grandes transformations et des conditions de Signorini-Coulomb.
- Dépendance de la base locale de contact (2D ou 3D courbe) par rapport aux inconnues de contact
- Non connaissance a priori des statuts des points situés dans la zone potentielle de contact.
- Non connaissance de la valeur des composantes du vecteur contrainte de contact ainsi que le saut de déplacement dans la zone de contact. Ces deux grandeurs (statiques et cinématiques) sont

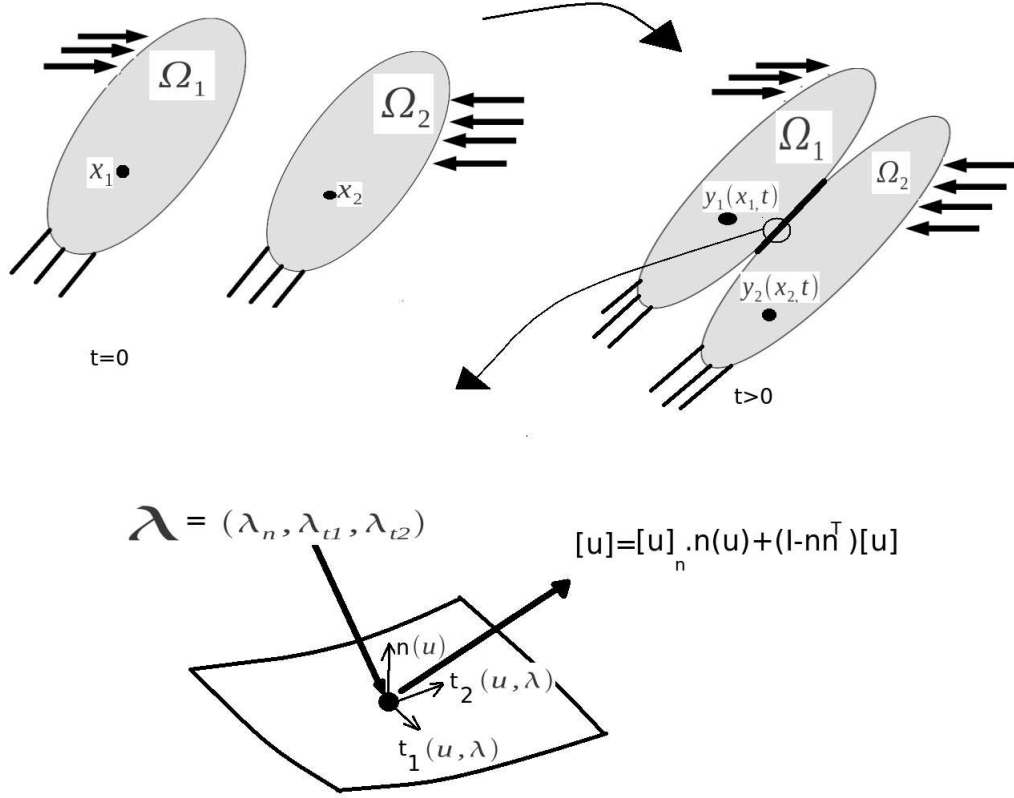


FIGURE 1 – Illustration du problème

reliées par la loi de Signorini-Coulomb non régulière et non associée pour la loi de Coulomb.

## 2.1 Formulation mixte du Lagrangien stabilisé

On écrit le problème de point-selle d'une fonctionnelle mixte lagrangienne :

Soit à trouver  $(u^1, u^2, \lambda_n, \Lambda)^T \in H(\Omega_1) \times H(\Omega_2) \times H^1(\Gamma_c) \times B(\Gamma_c)$  tel que :

$$(u^1, u^2, \lambda_n, \Lambda) = \arg \min_{(v^1, v^2)} \arg \max_{(\lambda_n^*, \Lambda^*)} \left( \left( \sum_{i=1,2} E^i(v^i(x^i, t)) \right) + E_c(v^i(x^i, t), \lambda_n^*, \Lambda^*) \right) \quad (1)$$

$E^i(v^i(x^i, t))$  est la fonctionnelle énergie de déformation associée au  $i$ ème corps en l'absence de contact. Lorsqu'intervient le contact puis le frottement, on rajoute à ces fonctionnelles une fonctionnelle énergie d'interaction de contact  $E_c(v^i(x^i, t), \lambda_n^*, \Lambda^*)$ . Généralement, une fois que la loi de comportement est déterminée et que les hypothèses de petites ou de grandes transformations sont faites on peut exprimer  $E^i(v^i(x^i, t))$ . On cherche maintenant à exprimer  $E_c(v^i(x^i, t), \lambda_n^*, \Lambda^*)$ . La démarche est "équivalente" à la formulation du Lagrangien augmenté, il s'agit de la technique des multiplicateurs de Lagrange "stabilisés" [7, 1] (ou par abus de langage "diversifiés"). Les ingrédients introduits dans la formulation permettent de découpler les non-linéarités dues au contact-frottement. On a

$$E_c(y^i(x^i, t), \lambda_n^*, \Lambda^*) = \int_{\Gamma_c} I_n^s(y^i(x^i, t), \lambda_n^*) + \int_{\Gamma_c} -\mu \lambda_n \cdot I_t^s(y^i(x^i, t), \Lambda^*) \quad (2)$$

Avec :

$$I_n^s(y^i(x^i, t), \lambda_n^*) = \frac{1}{2r_n} \{ S_u(\lambda_n^* - r_n \cdot v_n) \{ \lambda_n^* - r_n \cdot v_n \}^2 - \lambda_n^{*2} \} \quad (3)$$

Et

$$l_t^s(y^i(x^j, t), \Lambda^*) = \frac{1}{2r_t} \{ (1 - S_u) \cdot \Lambda^* \cdot \Lambda^* + S_u \{ S_f \cdot \{ [\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt] [\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt] - \Lambda^* \cdot \Lambda^* \} \} \} \quad (4)$$

$$+ (1 - S_f) \cdot \{ \left[ \frac{\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt}{\|\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt\|} \right] \left[ \frac{\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt}{\|\Lambda^* + r_t \cdot v_t dt\|} \right] - \Lambda^* \cdot \Lambda^* \} \}$$

Dans (2-4), on définit :

1.  $v_n = [y^1(x^1, t) - y^2(x^2, t)] \cdot n(u^1(x^1, t), u^2(x^2, t))$  l'inconnue cinématique de distance normale séparant les deux corps.

2.  $v_t$  l'inconnue de vitesse relative tangente ramenée à une inconnue incrémentale de vitesse tangente,

$$v_t \cdot dt = (I - n(\cdot) \cdot n(\cdot)^t) (\delta u^1(\cdot) - \delta u^2(\cdot)) \text{ avec } \delta u \text{ l'incrément de déplacement}$$

3.  $\lambda_n^*$  l'inconnue de multiplicateur de Lagrange associé à la condition de Signorini et qui s'interprète comme la pression de contact.

4.

$$S_u(\lambda_n - r_n v_n) = \begin{cases} \text{"Level set de contact" ou "champ de signe de contact"} = S_u \\ S_u(\lambda_n - r_n v_n) = 1 \text{ si contact } (\lambda_n - r_n v_n \leq 0) \\ S_u(\lambda_n - r_n v_n) = 0 \text{ si pas contact } (\lambda_n - r_n v_n > 0) \end{cases} \quad (5)$$

Cet opérateur indique si un point situé dans la zone potentielle d'interaction est effectivement en contact.

5. Le semi-multiplicateur de frottement  $\Lambda^*$  : il est déduit du multiplicateur de frottement,

$$\lambda_t^* = -\mu \cdot \lambda_n \cdot \Lambda^*, \text{ Avec } \Lambda^* \in B(0, 1) \quad (6)$$

ou

$$\lambda_t^* = -\mu \cdot \lambda_n \cdot P_{B(0,1)}(\Lambda^* + r_t v_t dt) \quad (7)$$

Cette variable permet d'exprimer d'une autre manière le multiplicateur de Lagrange associé à la condition de Coulomb.  $P_{B(0,1)}$  désigne une opération de projection sur la boule unité  $B(0, 1)$ . Le "vrai" multiplicateur  $\lambda_t^*$  s'interprète comme le vecteur contrainte tangentiel tandis que le semi-multiplicateur (ou par abus de langage "pseudo"-multiplicateur) a deux rôles : en cas d'adhérence il joue le rôle d'un "pseudo"-multiplicateur associé à la vitesse tangente nulle, en cas de glissement il joue le rôle du vecteur unitaire tangent du vecteur contrainte tangentiel donc du vecteur de vitesse de glissement (Coulomb).

6.

$$S_f(\Lambda^* + r_t v_t) = \begin{cases} \text{"Level set de frottement" ou "champ de signe de frottement"} = S_f \\ S_f(\Lambda^* + r_t v_t) = 1 \text{ si adhérence } (\|\Lambda^* + r_t v_t\| \leq 1) \\ S_f(\Lambda^* + r_t v_t) = 0 \text{ si glissement } (\|\Lambda^* + r_t v_t\| > 1) \end{cases} \quad (8)$$

Remarques :

1 *Le Lagrangien augmenté est équivalent au Lagrangien stabilisé*

Cette équivalence apparaît clairement dans le cas du contact. Dans le cas du frottement le Lagrangien Stabilisé s'obtient à partir du Lagrangien Augmenté ou inversement en opérant un changement de variable selon les équations (6-7).

2 Les techniques de calcul s'appliquant à la formulation du Lagrangien augmenté peuvent s'appliquer aussi au Lagrangien stabilisé. Un des intérêts du Lagrangien stabilisé est qu'il fait apparaître séparément les non linéarités de contact et de frottement. Ce qui permet d'adopter plusieurs stratégies de résolution. Aussi dans le Lagrangien augmenté on peut introduire au plus deux paramètres tandis que dans le Lagrangien stabilisé on peut introduire au plus six paramètres. Les unités des

paramètres de contact du Lagrangien stabilisé sont homogènes à une pression par unité de distance tandis que les paramètres de frottement sont homogènes à l'inverse d'un déplacement.

## 2.2 Algorithme de résolution

Nous présentons l'algorithme sur lequel nous avons mené les tests numériques. Cet algorithme est différent de l'algorithme de Newton généralisé [2, 3] car il vise à simplifier les difficultés dues au contact par imbrication des boucles de point fixe et une boucle interne de Newton.

0 Discrétisation en espace et en temps

1 Boucle de point fixe sur les configurations géométriques.

On simplifie la dépendance de la base locale de contact vis-à-vis des inconnues cinématiques.

1.1 Boucle de point fixe sur le seuil de frottement :

La dépendance du vecteur tangent par rapport aux inconnues de pression de contact est simplifiée. Aussi on remplace le problème de Coulomb par une suite de problèmes à seuil de frottement fixé.

1.1.1 Boucle de point fixe sur les statuts de contact  $S_u$  :

la méconnaissance des statuts de contact est éliminée.

1.1.1.1. Boucle interne de Newton : Résolution du problème d'équilibre avec prise en compte des autres non linéarités.

## 3 Tests numériques

Les paramètres qui influencent la résolution par l'algorithme ci-dessus sont :

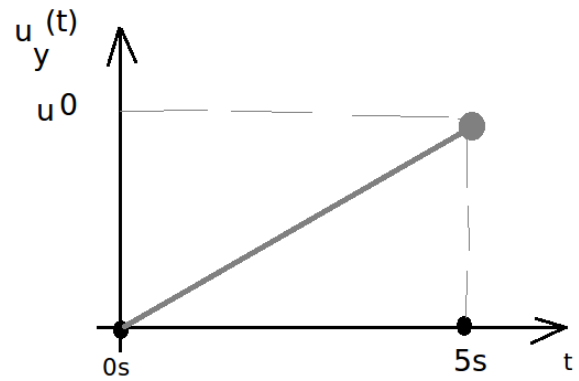
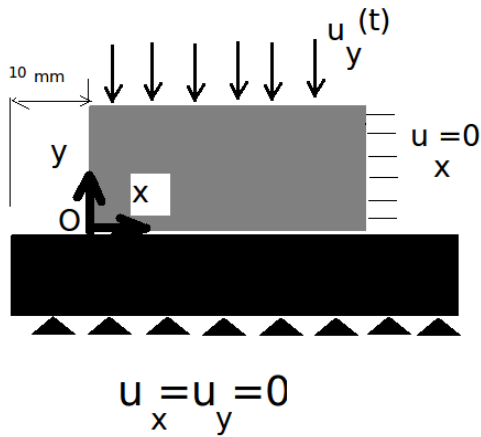
- La construction des espaces d'approximation en vue de respecter la condition *inf-sup*
- Le choix du découpage en temps et le pas de la discrétisation spatiale  $h$ , la méthode d'intégration
- Les paramètres matériaux en l'occurrence la valeur du coefficient de frottement
- Le(s) paramètre(s) géométrique(s) : le choix des normales en présence des singularités
- **Les paramètres liés à la formulation du Lagrangien stabilisé (six au total)**
- **Le choix du critère de convergence.**

On s'intéresse à l'influence de ces deux derniers sur une étude de patin frottant sur un bloc rigide tel qu'illustré sur la figure 2. On retient deux paramètres pour la formulation du Lagrangien stabilisé (2-4). Les critères de convergence sont tels que :

- Pour la boucle de point fixe sur la géométrie, il faut que la plus grande erreur relative commise sur le déplacement dans les deux domaines solides, soit inférieure ou égale à  $10^{-4}$
- Pour la boucle de point fixe sur le seuil de frottement, il faut que la plus grande erreur relative commise sur le seuil de frottement, soit inférieure à  $10^{-4}$
- Pour la boucle de point fixe sur les statuts de contact, il faut qu'un point de contact garde le même statut de contact entre deux itérations successives
- Pour la boucle interne de Newton traitant le problème d'équilibre, il faut que l'erreur absolue soit inférieure à  $10^{-6}$

On réalise les calculs en déformation plane avec des éléments triangulaires et interpolation linéaire pour les déplacements et les multiplicateurs. On effectue trois types de calcul afin d'observer numériquement l'effet des paramètres  $r_n, r_t$  sur la convergence de l'algorithme :

- Calcul élastique en petites déformations :  $E = 200000MPa$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $u^0 = 0.5mm$
- Calcul élasto-plastique en grandes déformations plastiques : on dispose d'une courbe d'écroutissage isotrope fournie par un essai de traction.  $Re = 194MPa$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $u^0 = 2.5mm$
- Calcul hyper-élastique (Néo-hookéen) en grandes déformations élastiques :  $C_{10} = 100MPa$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $u^0 = 10mm$



Bloc Rigide : 120 mm \* 30 mm  
 Bloc déformable : 100 mm \* 50 mm

FIGURE 2 – Bloc déformable sur Bloc rigide

On considère par exemple le calcul hyper-élastique. Les résultats en termes de nombres d'itérations par boucles en un pas de temps sont consignés dans le tableau ci-dessous :

It. de geom.	It. de frott/It. de geom.	It. stat/It. frott	It Newt. /It stat	Nbre total d'It. de Newt.
1	5	1	5	25
2	1	1	4	4
			It de Newt total cumul.	29

It. de geom. = Itération courante point fixe sur la géométrie

It. de frott/It. de geom.= nombre d'itérations point fixe de frottement effectuées par itération courante de géométrie

It. stat/It. frott = nombre d'itérations de statuts par itération courante de frottement

It Newt. /It stat = nombre d'itérations de Newton par itération de courante de statut

It de Newt total cumul. = nombre total d'itérations de Newton pour le pas de temps

Dans [3] on retrouve des conclusions sur l'étude de l'influence du paramètre de la formulation sur la convergence de l'algorithme de type **Newton généralisé**. L'étude sur des systèmes à faible nombre de degrés de libertés montre qu'il est nécessaire de borner les paramètres introduits. Une estimation de la borne maximale a été faite dans [3] sur la base de méthodes heuristiques et théoriques.

Les premiers résultats issus de diverses expérimentations numériques tendent à conclure que :  $si (r_n, r_t) \in I_1 \times I_2$  avec  $I_i$  des intervalles réels bien choisis alors la divergence de l'algorithme (notamment la boucle de Newton) ne peut pas provenir du choix de ces paramètres.

$$I_1 = [r_{n,min}, r_{n,max}]$$

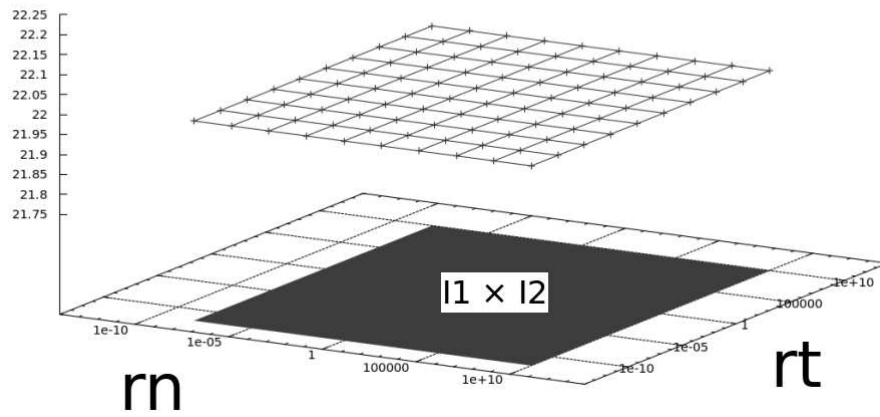
$$I_2 = [r_{t,min}, r_{t,max}]$$

La figure 3 illustre graphiquement les intervalles  $I_1, I_2$ . Ce graphique a été obtenu en faisant varier les paramètres  $r_n, r_t$  jusqu'à divergence de l'algorithme. On prend soin de tracer pour chaque couple de paramètres  $r_n, r_t$  le nombre moyen d'itérations de Newton défini par :

$$\text{Nombre moyen iterations} = \frac{\text{Nombre total d'iterations de Newton}}{\text{Nombre de pas de temps}}$$

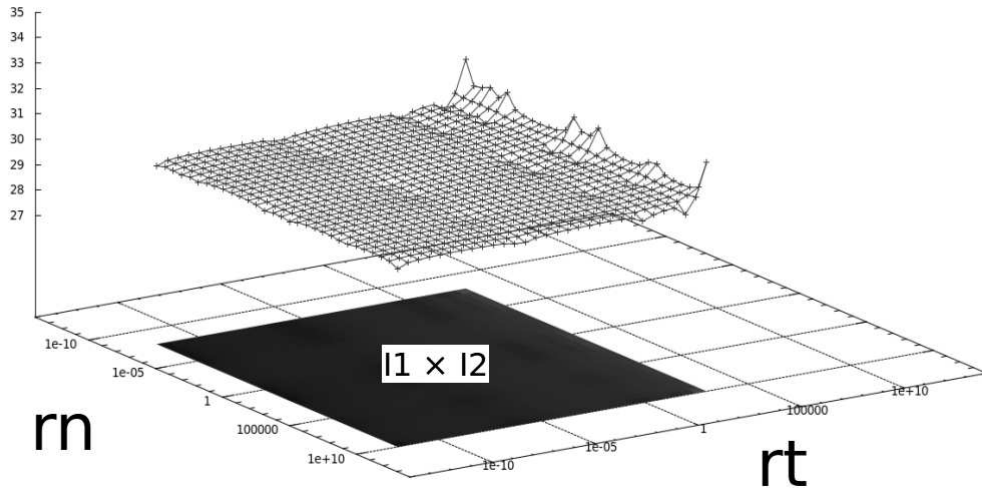
Nombre Itérations  
Moyen

Calcul élastique



Nombre Itérations  
Moyen

Calcul hyper-élastique



Nombre Itérations  
Moyen

Calcul élasto-plastique

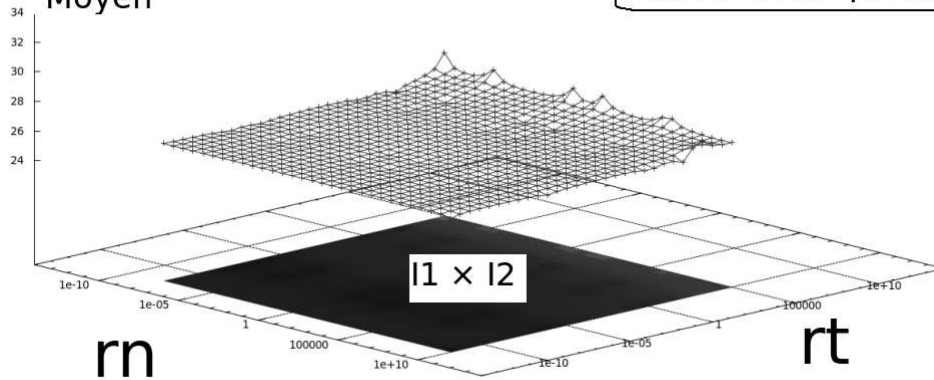


FIGURE 3 – Etude sensibilité par rapport à  $r_n, r_t$

Une difficulté consiste à estimer les bornes maximales et minimales des paramètres. Les expérimentations numériques montrent qu'un calcul élastique permettrait d'obtenir ces bornes. On peut aller plus loin en procédant à une identification de  $r_{.,max}$  en fonction des autres paramètres de l'étude :

$$r_{.,max} = f(\text{Paramètre élastique, Pas de discrétisation, Coefficient de frottement})$$

Les premiers résultats de l'identification sont tels que :

- $r_{n,max}$  est proportionnel au module d'Young et inversement proportionnel au paramètre de discrétisation. Son unité est  $\frac{[N]}{[m^3]}$
- $r_{t,max}$  est proportionnel au coefficient de frottement et inversement proportionnel au paramètre de discrétisation. Son unité est  $\frac{[1]}{[m]}$

Dans le cas d'incompatibilités telles que les corps ont des comportements différents et/ou les maillages sont non coïncidents dans la zone de contact, les expérimentations montrent que la valeur maximale est pénalisée par le corps le plus mou et/ou ayant un maillage grossier. Donc l'estimation avec un calcul élastique sera faite avec le corps le plus mou et/ou le maillage grossier.

## 4 Conclusion

Dans ce travail on a reformulé le problème quasi-statique des corps déformables en contact-frottement via la formulation mixte équivalente à la formulation Lagrangien augmenté dite de Lagrangien stabilisé. Cette formulation utilise le même principe que le Lagrangien augmenté avec des ingrédients différents.

L'algorithme testé élimine les non-linéarités de contact grâce aux boucles de points fixes. On s'est particulièrement intéressé à l'influence du jeu de paramètres sur la convergence de l'algorithme. La conclusion est qu'un choix *nominal* des paramètres du Lagrangien stabilisé n'entraînera pas de divergence.

La suite du travail consiste à caractériser plus finement les bornes des paramètres de la formulation puis à valider nos premières conclusions sur des études plus complexes. Cet algorithme peut aussi présenter d'autres cas de divergence liés aux boucles de points fixes notamment lorsqu'apparaissent de fortes variations (géométrie, seuil de frottement, statuts,...). Il serait donc intéressant de développer et comparer des algorithmes de type Newton généralisé avec l'algorithme actuel.



## Références

- [1] Code\_aster, « *Eléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue* », Documentation de référence - R5.03.52 - V9, 2009. <http://www.code-aster.org>
  
- [2] Pietrzak G., Curnier A. , *Large deformation frictional contact mechanics : continuum formulation and augmented Lagrangian treatment* , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,177 (1999),351-381
  
- [3] Alart P., *Méthode de Newton Généralisée en mécanique du contact*, Journal de Mathématiques pures et Appliquées, Vol. 76(1997), pp 83-108.
  
- [4] Alart P., Curnier A., « *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method* », Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 92(1991), pp 353-375.
  
- [5] Lebon F., « *Contact problems with friction : models and simulations* », Simulation Practice and Theory, Vol. 11(2003), pp 449-463.
  
- [6] Curnier A., « *Unilateral Contact : Mechanical modelling In New developpments in contact mechanics* », CISM Number 384, 1999, edited by Wriggers P. and Panagiotopoulos P.
  
- [7] Ben Dhia H., Zarroug M., *Eléments hybrides de contact frottant*, 5ème Colloque national en calcul des structures, 15-18 Mai, vol. I, pp. 253-260, 2001