



HAL
open science

Transfert de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures

Alexandre Berard, Patrick Hild, Valerie Cano, Sebastien Meunier

► **To cite this version:**

Alexandre Berard, Patrick Hild, Valerie Cano, Sebastien Meunier. Transfert de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592779

HAL Id: hal-00592779

<https://hal.science/hal-00592779>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transfert de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures

A. Bérard^{1,2,3},
P. Hild², V. Cano¹, S. Meunier^{1,3}

¹ EDF Recherche et Développement, Clamart, France, {alexandre.berard,valerie.cano,sebastien.meunier}@edf.fr

² Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comté, Besançon, France, patrick.hild@univ-fcomte.fr

³ Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, UMR CEA-CNRS-EDF 2832, Clamart, France

Résumé — En mécanique des milieux continus, les occasions de transférer des données d'un maillage sur un autre sont nombreuses : études chaînées lors de problèmes multi-physiques, remaillages lors de suivis de propagation de fissures ou lors de mesures de qualité d'un résultat, approches multi-modèles. Dans un calcul utilisant la méthode des éléments finis, deux types de champs sont concernés : ceux connus aux nœuds et ceux connus aux points de Gauss. Nous nous proposons ici de transférer de tels champs et de faire hériter aux champs transférés certaines propriétés des champs initiaux.

Mots clés — maillages incompatibles, points de Gauss, approximation, interpolation, projection, estimation d'erreurs, optimisation sous contrainte.

1 Introduction

Considérons un domaine Ω inclus dans \mathbb{R}^n . Sur une première discrétisation de Ω , qualifiée de *maillage initial*, supposons connu un ensemble de *champs*. Le problème posé (réf. [2], [5]) est le *transfert* de ces champs du maillage initial vers une seconde discrétisation de Ω , le *maillage final*.

Deux classes de champs sont à transférer : ceux connus aux nœuds, comme les déplacements ou la température, et ceux connus aux points de Gauss, comme les déformations, les contraintes ou les variables internes. Chaque classe possède une nature particulière et réclame donc un traitement qui lui est propre : en effet, les champs de déplacement disposent d'une interpolation continue, ce qui n'est pas le cas des champs localisés aux points de Gauss. Cette différence de nature est délicate à traiter, au niveau de l'analyse théorique d'erreur comme au niveau de l'implantation numérique.

En outre, il peut être intéressant de s'interroger sur les propriétés que peuvent conserver ces champs lors du transfert, dont un cas particulier est la condition de positivité. Plus généralement, est-il envisageable de transférer tous les champs associés à une structure donnée en préservant l'ensemble des relations de dépendance entre ces champs ?

2 Transfert de champs connus aux nœuds

Il est possible de dégager trois grandes familles de transfert pour les champs connus aux nœuds : des méthodes « naïves », comme celle du plus proche voisin, ou celles utilisées dans le cas d'un déraffinement, c'est-à-dire lorsque le maillage initial est inclus dans le maillage final ; des méthodes d'interpolation (réf. [6]), utilisant ou non les fonctions de forme de l'un ou l'autre des maillages ; des méthodes de minimisation, discrètes (réf. [8]) ou continues (réf. [7]).

Dans le travail que nous proposons ici, certaines de ces familles ont été enrichies de nouvelles méthodes.

Un aspect intéressant de cet apport est l'introduction de fonctions différentes des fonctions de forme usuelles, permettant d'obtenir des estimations d'erreurs plus fines que celles habituelles. Toutefois, nous ne nous attarderons pas sur les estimations qui existent pour ces méthodes. Pour la plupart, elles sont connues depuis plusieurs dizaines d'années ; elles ont toutefois été adaptées au cadre de notre travail.

3 Transfert de champs connus aux points de Gauss

Plusieurs techniques sont possibles pour transférer des champs connus aux points de Gauss, certaines pouvant utiliser les techniques évoquées dans le paragraphe 2.

Par exemple, en ajoutant au transfert de champs entre nœuds une méthode d'extrapolation sur le maillage initial et une méthode d'interpolation sur le maillage final (FIG. 1), il est possible de transférer des champs entre points de Gauss (réf. [3]).

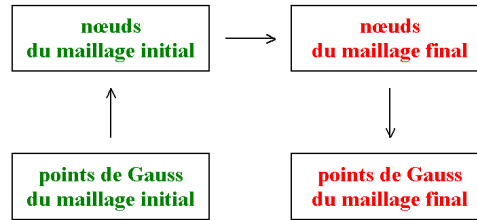


FIG. 1: Il est possible de passer par les nœuds pour transférer des champs connus aux points de Gauss.

Toutefois, un tel détour n'est pas très satisfaisant : chaque opération ne fait qu'entacher d'erreur le champ initial. Dans cette optique, nous proposons et testons d'autres idées (FIG. 2) : création d'un maillage hybride, où les points de Gauss deviennent des nœuds ; éclatement de chaque maille initiale, en autant de sous-maillages que de points de Gauss contenus dans cette maille ; méthode de préservation des champs polynomiaux, n'utilisant que les coordonnées des points de Gauss.

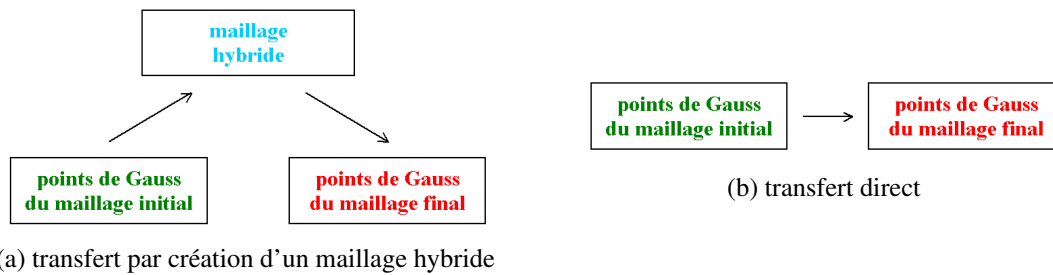


FIG. 2: D'autres chemins sont possibles pour transférer des champs connus aux points de Gauss.

3.1 Méthode du plus proche voisin

Une première idée que nous proposons est celle d'affecter, à chaque point de Gauss du maillage final, la valeur portée par le point de Gauss du maillage initial le plus proche géométriquement du point de Gauss final. Cette méthode a l'avantage de ne pas prendre en considération la discrétisation des deux maillages en présence, et peut donc s'appliquer à tout type de nuage.

Il n'est toutefois pas évident de contrôler l'erreur commise lors du transfert. En effet, contrairement aux estimations obtenues pour les nœuds, aucune fonction n'est à notre disposition. Nous adoptons donc une démarche différente : afin de pouvoir estimer des erreurs en chaque point de Gauss du maillage initial, nous allons considérer deux transferts. Le premier est habituel et consiste à transférer les données connues aux points de Gauss du maillage initial sur les points de Gauss du maillage final ; le second est le transfert « retour », c'est-à-dire que les valeurs calculées aux points de Gauss du maillage final sont de nouveau transférées, par le même procédé, aux points de Gauss du maillage initial. En chaque point de Gauss du maillage initial, nous avons donc deux valeurs : la donnée initiale et celle obtenue après un aller-retour. Il est alors possible d'estimer : dans un premier temps, en chaque point de Gauss du maillage initial, la différence entre ces deux valeurs ; dans un second temps, des bornes d'erreur globales, prenant en compte tous les points de Gauss du maillage initial.

Introduisons les notations suivantes. Le nuage initial est constitué d'un nombre N de points de Gauss, que l'on notera i_1, i_2, \dots, i_N . En tout point de Gauss i_α , la valeur connue initialement est notée x_{i_α} et celle obtenue après aller-retour est notée $\overline{x_{i_\alpha}}$. Nous démontrons alors (réf. [1]) que la différence $|x_{i_\alpha} - \overline{x_{i_\alpha}}|$ est majorée par le produit d'un taux de variation T_{i_α} , dépendant des valeurs sur le nuage initial, et d'un réel

k_α , qui est un paramètre de discrétisation du nuage final. L'erreur obtenue est d'ordre 1 : nous avons, pour tout entier α compris entre 1 et N ,

$$|x_{i_\alpha} - \overline{x_{i_\alpha}}| \leq 2T_{i_\alpha}k_\alpha.$$

De manière plus précise, le réel k_α désigne le diamètre de la cellule de Voronoï, sur le nuage final, dans lequel se situe le point de Gauss numéro i_α . D'autre part, T_{i_α} est le maximum d'un certain nombre de taux de variations, sur le nuage initial, dans un voisinage de i_α :

$$T_{i_\alpha} = \max_{i_\gamma} \left| \frac{x_{i_\alpha} - x_{i_\gamma}}{i_\alpha - i_\gamma} \right|, \text{ pour tout } i_\gamma \text{ tel que } |i_\alpha - i_\gamma| \leq 2k_\alpha.$$

Un corollaire du résultat précédent est l'obtention d'estimations d'erreurs globales, en les trois normes ℓ^∞ , ℓ^1 et ℓ^2 définies respectivement par

$$\|X - \overline{X}\|_{\ell^\infty} = \max_{1 \leq \alpha \leq N} |x_{i_\alpha} - \overline{x_{i_\alpha}}|,$$

$$\|X - \overline{X}\|_{\ell^1} = \sum_{\alpha=1}^N |\Omega_\alpha| |x_{i_\alpha} - \overline{x_{i_\alpha}}|,$$

$$\text{et } \|X - \overline{X}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{\alpha=1}^N |\Omega_\alpha| |x_{i_\alpha} - \overline{x_{i_\alpha}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $|\Omega_\alpha|$ désigne la mesure de la cellule de Voronoï Ω_α , du nuage initial, qui contient i_α . Les erreurs globales sont également d'ordre 1.

Plusieurs remarques peuvent être formulées. Tout d'abord, il est intéressant de noter que les majorations obtenues sont optimales, au sens où il existe un contre-exemple (fonction affine) montrant effectivement que l'erreur est d'ordre 1. De plus, les estimations sont valables quelle que soit la dimension d'espace considérée. Il convient aussi de remarquer que, lorsque le maillage final est suffisamment fin, alors l'erreur est nulle et l'égalité entre x_{i_α} et $\overline{x_{i_\alpha}}$ est vérifiée. Enfin, on remarque que cette méthode préserve le caractère borné des champs à transférer, et donc en particulier la positivité.

3.2 Variante de la méthode précédente

La méthode décrite dans le paragraphe précédent a été adaptée et développée dans le code de calcul par éléments finis *Code_Aster*, développé au centre R&D d'EDF (réf. [9]). Dans cette variante, il ne s'agit pas d'affecter, en chaque point de Gauss du maillage final, la valeur portée par le point de Gauss du maillage initial le plus proche, mais la valeur portée par le point de Gauss vérifiant deux conditions : il est géométriquement situé dans la même maille initiale que le point de Gauss final et est, dans cette maille, le plus proche du point de Gauss final (FIG. 3).

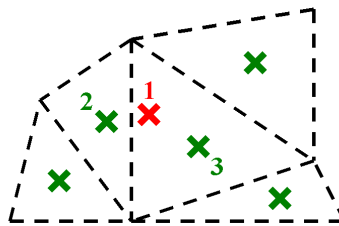


FIG. 3: Les points de Gauss du maillage initial sont en vert et ceux du maillage final en rouge.

Les mailles indiquées sont celles du maillage initial. Dans le cas de la méthode du paragraphe 3.1, après transfert, le point de Gauss numéro 1 porte la valeur du point de Gauss numéro 2 ; pour la méthode du paragraphe 3.2, ce même point de Gauss porte la valeur du point de Gauss numéro 3.

Il s'agit donc d'une méthode moins générale que la précédente, puisqu'elle ne s'affranchit pas complètement des mailles. Toutefois, elle a l'intérêt de tenir compte de la discrétisation du maillage initial, et donc de l'« intelligence » qui peut y être cachée : si la structure étudiée est un barreau bimatériau, il y a fort à parier que l'interface entre les deux matériaux ait été maillée au préalable. Il s'agit également d'une méthode d'ordre 1, dont l'analyse théorique est effectuée dans réf. [1].

3.3 Obtention d'une estimation d'erreur d'ordre 2

Il est naturel de se demander s'il n'est pas possible de trouver une méthode de transfert dont l'estimation d'erreur associée serait d'ordre supérieur à celle obtenue dans les paragraphes précédents.

Dans cette section, nous nous intéressons à la question suivante : au lieu d'affecter, en chaque point de Gauss du maillage final, la valeur du point de Gauss le plus proche, on se propose de considérer les $n + 1$ points de Gauss les plus proches, tels que leur enveloppe convexe soit de mesure non nulle dans \mathbb{R}^n , et d'affecter au point de Gauss final l'interpolation linéaire des valeurs en ces $n + 1$ points. Nous démontrons alors (réf. [1]) que l'erreur locale est d'ordre 2 dans de nombreux cas ; les cas restants demeurent actuellement à l'étude.

De même qu'au sein du paragraphe 3.1, il est possible d'obtenir des estimations globales et de noter que les majorations sont optimales.

4 Transferts de champs sous contraintes

Certaines des méthodes décrites précédemment, qu'elles s'appliquent pour les nœuds ou pour les points de Gauss, n'assurent pas nécessairement que les champs transférés restent dans le domaine physiquement admissible. Dans certains cas, il est donc nécessaire d'imposer des contraintes *a priori*.

Le transfert de champs sous contraintes reste un problème encore difficile et d'actualité (réf. [4]). Dans ce travail, nous nous focalisons sur des transferts conservant le caractère minoré, voire borné, d'une quantité : il est par exemple essentiel que la déformation plastique cumulée reste positive, ou que l'endommagement soit compris entre 0 et 1. Deux outils sont envisagés : une méthode de pénalisation et une méthode de multiplicateurs de Lagrange.

5 Application numérique : adaptation de maillage

L'application numérique présentée ici est celle du raffinement d'un quart de plaque trouée (FIG. 4), en dimension deux et en élastoplasticité ; une dizaine d'adaptations est effectuée.

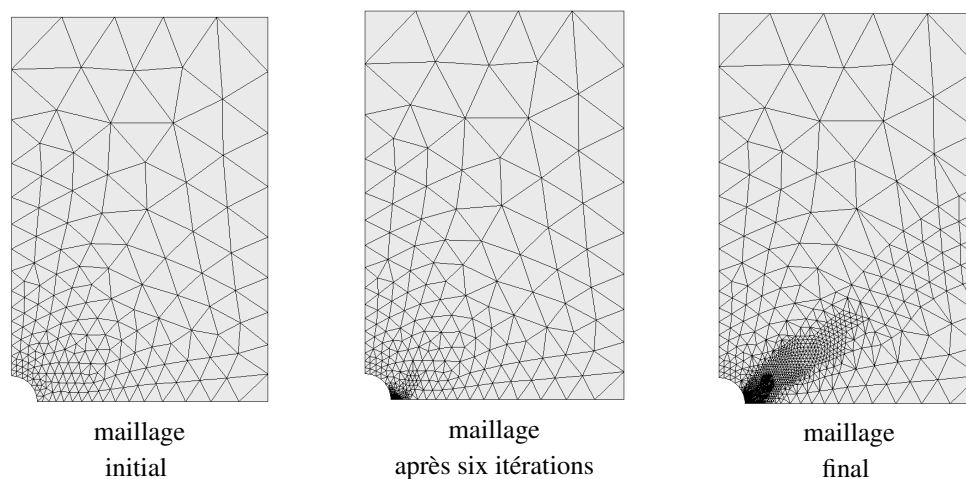
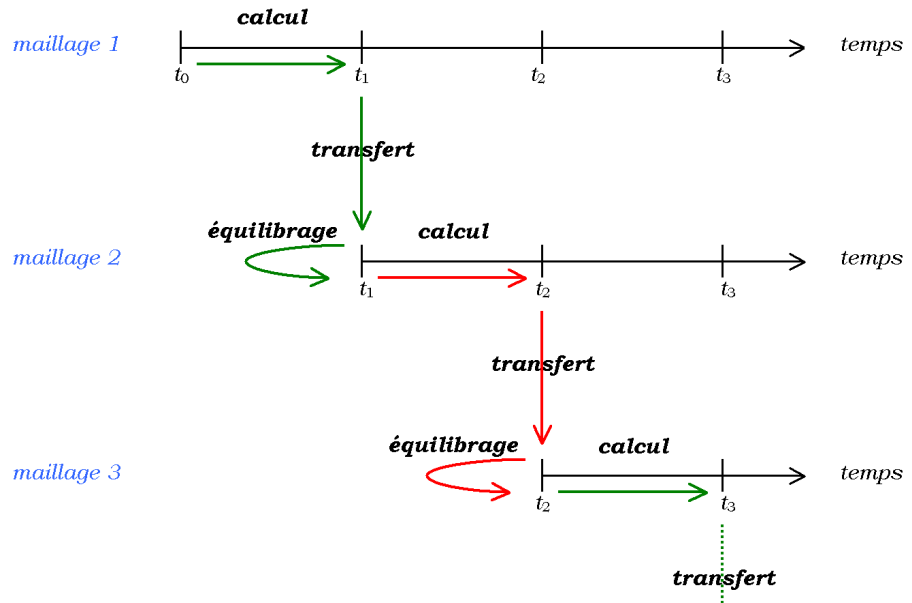


FIG. 4: Allure des discrétisations de la plaque trouée après quelques itérations

Le transfert utilisé permet de réduire le nombre d'itérations nécessaires pour l'équilibrage en le ramenant au nombre d'itérations nécessaires pour le calcul (FIG. 5).

Cette application fait appel à deux transferts : un transfert aux nœuds, basé sur une méthode d'interpolation utilisant les fonctions de forme du maillage initial, comme évoqué dans la partie 2, et un transfert aux points de Gauss, qui est celui décrit dans le paragraphe 3.2. L'étude a été réalisée dans l'environnement *Code_Aster* (réf. [9]).



(a) schéma du processus d'adaptation

Instant de calcul	Itérations pour l'équilibrage (ancien transfert)	Itérations pour le calcul (ancien transfert)	Itérations pour l'équilibrage (nouveau transfert)	Itérations pour le calcul (nouveau transfert)
de t_0 à t_1	1	1	1	1
de t_1 à t_2	4	3	1	4
de t_2 à t_3	5	5	1	4
de t_3 à t_4	6	5	4	5
de t_4 à t_5	11	6	6	5
de t_5 à t_6	11	6	6	6
de t_6 à t_7	10	7	6	7
de t_7 à t_8	17	6	6	7

(b) nombre d'itérations de Newton lors des phases d'équilibrage et de calcul

FIG. 5: Schéma du processus d'adaptation et nombre d'itérations de Newton lors des phases d'équilibrage et de calcul.

Références

- [1] A. BÉRARD, *Transfert de champs entre maillages de type éléments finis et applications numériques en mécanique non linéaire des structures*, Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, à soutenir en 2011.
- [2] P. HILD, *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles*, Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, 1998.
- [3] D. NÉRON, *Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques*, Thèse de doctorat de l'École Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [4] R.H. NOCHETTO, L.B. WAHLBIN, *Positivity preserving finite element approximation*, Math. Comput. (71), 1405-1419, 2001.
- [5] M. ORTIZ, J.J. QUIGLEY, *Adaptive mesh refinement in strain localization problems*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. (90), 781-804, 1991.
- [6] D. PERIC, C. HOCHARD, M. DUTKO, D.R.J. OWEN, *Transfer operators for evolving meshes in small strain elastoplasticity*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. (137), 331-344, 1996.
- [7] G. RATEAU, *Méthode Arlequin pour les problèmes multi-échelles*, Thèse de doctorat de l'École Centrale de Paris, 2004.
- [8] P. VILLON, H. BOROUCAKI, K. SAANOUNI, *Transfert de champs plastiquement admissibles*, C. R. Mécanique (330), 313-318, 2002.
- [9] SITE WEB OFFICIEL DE CODE_ASTER, www.code-aster.org.