

Méthode numérique pour l'étude de la stabilité de modèles d'endommagement à gradient

J.Beaurain^{1,2,3}, J-J. Marigo⁴, K. Kazymyrenko^{1,2}

¹EDF R&D, 1 avenue du Général de Gaulle, 92141, Clamart Cedex, France (jerome.beaurain@edf.fr et kirylo.kazymyrenko@edf.fr)

²LaMSID – UMR EDF/CNRS/CEA 2832, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex, France

³Institut Jean Le Rond d'Alembert – UMR 7190, Université Paris 6, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

⁴LMS- UMR 7649, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France (marigo@lms.polytechnique.fr)

Résumé — Pour étudier la durabilité de certains ouvrages de génie civil, on représente la dégradation irréversible de matériau, tel que le béton, à l'aide de lois de comportement adoucissantes, avec lesquelles on perd les propriétés d'unicité de la solution. On est alors capable d'exhiber un certain nombre de solutions multiples, dont on définit la stabilité par la positivité de la dérivée seconde dans la direction des endommagements croissants. On s'intéresse ici au développement d'une méthode numérique permettant d'estimer la stabilité et de bifurquer si nécessaire vers d'autres solutions stables.

Mots clefs — endommagement, régularisation, modèle à gradient, stabilité, matériau adoucissant

1 Introduction

Le suivi de la dégradation mécanique irréversible de matériaux fragiles nécessite d'utiliser des lois de comportements adoucissantes issues de la mécanique des sols. Cependant, leur étude reste encore difficile. Les modèles standards d'endommagement conduisent à de la localisation. D'un point de vue théorique, le problème d'évolution est mal posé [1]. Cela entraîne des problèmes de convergence et une forte dépendance à l'orientation du maillage. Pour résoudre ces problèmes, on a introduit des modèles non-locaux, qui peuvent être vus comme approximation de la rupture fragile [2,3,4]. On s'intéresse plus particulièrement à la régularisation en gradient d'endommagement dans l'énergie de déformation W :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2} E l^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha + \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon \cdot \varepsilon + \omega(\alpha) \quad (1)$$

Où ε et α représentent la déformation et l'endommagement tandis que E , $A(\alpha)$ et ω représentent respectivement le module de Young, la loi de comportement du matériau et l'énergie volumique dissipée dans le matériau lors d'un processus d'endommagement homogène ($\nabla\alpha = 0$). Le paramètre l est la longueur interne du modèle, dont l'amplitude influe le gradient et donc la régularisation. Compte tenu de la perte des propriétés d'unicité de la solution, on se propose d'étudier la stabilité de ces solutions, de développer une méthode numérique capable de calculer le critère défini et d'exhiber les solutions bifurquées stables dans le cas où l'on détecte une instabilité.

2 Mise en place du critère de stabilité

On définit généralement la stabilité d'un minimum par la positivité de la dérivée seconde. Dans le cas plus particulier de l'endommagement, on tient compte de la condition unilatérale d'irréversibilité. La stabilité est alors définie par la positivité de la dérivée seconde dans la direction des endommagements croissants. Ce qui peut, dans le cas d'un modèle discrétisé, s'écrire sous la forme d'un quotient de Rayleigh :

$$\min_{(v, \beta \geq 0)} \frac{(v, \beta)^T K(v, \beta)}{\|(v, \beta)\|^2} \geq 0 \quad (2)$$

Où v et β sont respectivement les vecteurs tests en déplacement et en endommagement, et K la matrice des dérivées secondes obtenue pour le matériau, à l'état de la solution convergée.

3 Méthode numérique de résolution du critère

Les algorithmes de minimisation sous contraintes d'inégalités que l'on trouve dans la littérature sont assez peu robustes et ne convergent plus lorsque l'on travaille avec des problèmes à grands nombres de degrés de liberté. On a donc cherché à réduire la taille de notre problème en nous basant sur les fréquences propres les plus significatives de notre opérateur tangent. Une fois que l'on a construit ce sous-espace, on applique la méthode des puissances avec projection dans l'espace des endommagements positifs jusqu'à obtenir un vecteur stationnaire dont toutes les composantes en endommagements sont positives [5]. Ce vecteur nous permet ensuite d'évaluer notre critère et ainsi de savoir si l'on se trouve sur une solution instable.

4 Etudes de stabilité en 2 dimensions

On a implémenté l'algorithme dans le logiciel libre *Code_Aster* afin de tester sa robustesse sur des études à grands nombre de degrés de liberté. On a commencé par regarder la stabilité des solutions homogènes dans le cas de la traction uniforme d'une barre (FIG. 1 avec L la longueur de la barre et U_t le chargement de traction et FIG 2), puis dans le cas d'un biaxial. Dans chaque cas, on a également testé une méthode de changement de branche dans la direction de l'instabilité. Une fois que l'on s'est assuré de la robustesse et de la qualité des résultats obtenus sur ces deux cas tests, on peut alors étudier la stabilité de solutions non-homogènes obtenues sur des études plus complexes.

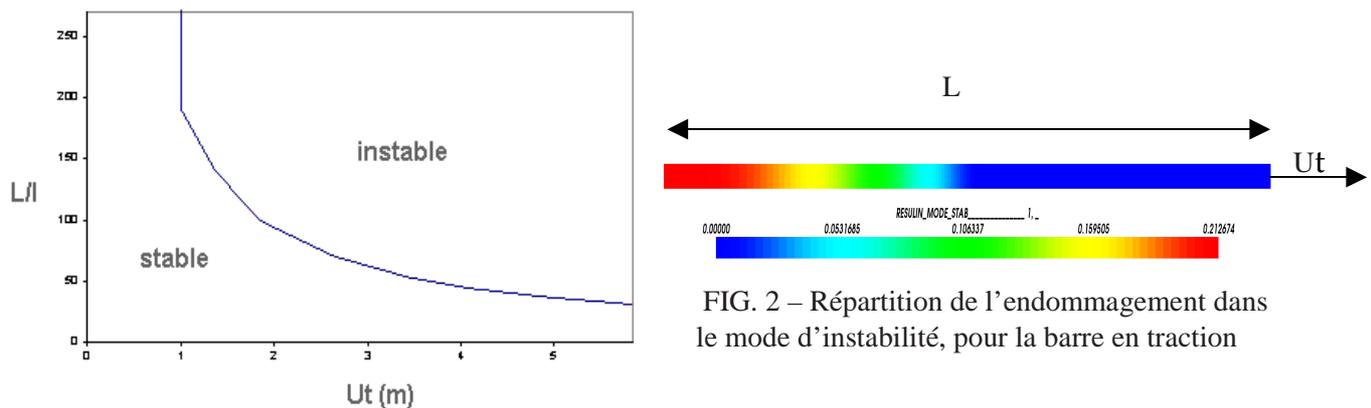


FIG. 1 – Diagramme de stabilité pour la solution homogène de la barre en traction

FIG. 2 – Répartition de l'endommagement dans le mode d'instabilité, pour la barre en traction

Références

[1] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate independent materials. In Q. Nguyen, editor, *C.S.I.M Lecture Notes on Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*. Springer-Verlag.

[2] A. Benallal and J.-J. Marigo. Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 15 : 283 – 195, 2007.

[3] B. Bourdin, G. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 : 797-826, 2000.

[4] E. Lorentz and S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. *Int. J. Solids Struct.*, 40 : 2905-2936, 2003.

[5] A. pinto Da Costa and A. Seeger. Numerical resolution of cone-constrained eigenvalue problems. *Computational & Applied Mathematics*, 28 : 37-61, 2009.