



**HAL**  
open science

## Méthode numérique pour l'étude de la stabilité de modèles d'endommagement à gradient

Jérôme Beaurain, Kyrylo Kazymyrenko, Jean-Jacques Marigo

► **To cite this version:**

Jérôme Beaurain, Kyrylo Kazymyrenko, Jean-Jacques Marigo. Méthode numérique pour l'étude de la stabilité de modèles d'endommagement à gradient. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8 p. ; Clé USB. hal-00592777

**HAL Id: hal-00592777**

**<https://hal.science/hal-00592777v1>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode numérique pour l'étude de stabilité de modèles d'endommagement à gradient

J. Beaurain<sup>1</sup>, K. Kazymyrenko<sup>2</sup>, J-J. Marigo<sup>3</sup>

<sup>1</sup> EDF R&D Clamart, LaMSID, France, [jerome.beaurain@edf.fr](mailto:jerome.beaurain@edf.fr)

<sup>2</sup> EDF R&D Clamart, LaMSID, France, [kyrylo.kazymyrenko@edf.fr](mailto:kyrylo.kazymyrenko@edf.fr)

<sup>3</sup> LMS, Ecole Polytechnique, France, [marigo@lms.polytechnique.fr](mailto:marigo@lms.polytechnique.fr)

**Résumé** — Pour étudier la durabilité de certains ouvrages de génie civil, on représente la dégradation irréversible de matériau tel que le béton, à l'aide de lois de comportement adoucissantes avec lesquelles on perd les propriétés mathématiques d'unicité de la solution. On est alors capable d'exhiber un certain nombre de solutions multiples, dont on définit la stabilité par la positivité de la dérivée seconde dans la direction des endommagements croissants. On s'intéresse ici au développement d'une méthode numérique permettant d'estimer la stabilité et de bifurquer, si nécessaire, vers d'autres solutions plus stables.

**Mots clés** — endommagement, régularisation, modèle à gradient, stabilité, matériaux adoucissants.

## 1 Introduction

Le suivi de la dégradation mécanique irréversible de matériaux fragiles nécessite d'utiliser des lois de comportement adoucissantes. Cependant, leur étude reste encore difficile. Les modèles d'endommagement adoucissants, non régularisés, conduisent à de la localisation. D'un point de vue théorique, le problème d'évolution est mal posé [1]. Cela entraîne des problèmes de convergence et une forte dépendance à l'orientation du maillage. Pour résoudre ces problèmes, on a introduit des modèles non locaux, qui peuvent aussi être vus comme une approximation de la rupture fragile [2,4,6]. On s'intéresse plus particulièrement à la régularisation en gradient d'endommagement dans l'énergie de déformation  $W$  :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2}El^2\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha + \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + \omega(\alpha) \quad (1)$$

où  $\varepsilon$  et  $\alpha$  représente la déformation et l'endommagement tandis que  $E$ ,  $A(\alpha)$  et  $\omega(\alpha)$  représentent respectivement le module de Young du matériau sain, la rigidité associée à la loi de comportement du matériau et l'énergie volumique dissipée dans le matériau lors d'un processus d'endommagement homogène ( $\nabla\alpha = 0$ ). Le paramètre  $l$  est la longueur interne du modèle dont la valeur influe sur le gradient et donc sur la régularisation. Compte tenu de la perte des propriétés d'unicité de la solution, on se doit d'étudier la stabilité des solutions. Le critère que l'on utilise pour définir la stabilité est la positivité de la dérivée seconde dans la direction des endommagements croissants. Ce qui se traduit mathématiquement par un problème de minimisation sous contraintes. On propose ici une méthode numérique d'optimisation sous contraintes d'inégalités qui permet d'évaluer le signe de la dérivée seconde, pour des problèmes éléments finis de grandes tailles, et qui permet également de rechercher des solutions bifurquées stables dans le cas où l'on détecte une instabilité sur la branche fondamentale.

## 2 Mise en place du critère de stabilité

Dans les problèmes classiques, qui consistent à vérifier qu'un point stationnaire d'une fonction est stable, on vérifie que la dérivée seconde de la fonction est positive en ce point. Cela implique que l'on est bien sur un minimum local de la fonction. Toutefois, dans le cas particulier de l'endommagement, on n'a pas de minimum au sens strict du terme, mais un minimum dans la direction des endommagements croissants, du fait de l'irréversibilité mécanique du phénomène. Le critère qui consiste juste à vérifier que la plus petite valeur propre est positive n'est donc plus satisfaisant. Il est ainsi nécessaire

d'introduire un nouveau critère qui prend en compte la condition unilatérale d'accroissement de l'endommagement. Pour cela, on va utiliser un développement de Taylor d'ordre 2 de l'énergie, et l'on va comparer le niveau d'énergie sur lequel on se trouve avec ceux que l'on pourrait obtenir à partir de petites perturbations dans l'espace des fonctions tests admissibles.

On note  $C^0$  l'ensemble des directions admissibles tels que :  $C^0 = \{v \in H^1(\Omega), v = 0, \text{ sur } \partial\Omega\}$ , et on note  $D$  l'ensemble des endommagements admissibles :  $D = \{\beta \in H^1(\Omega), \beta \geq 0, \text{ sur } \Omega\}$ . Alors, le point  $(u, \alpha)$  est stable si et seulement si :

$$\forall h \geq 0, \forall (v, \beta) \in C^0 \times D, \phi(u + hv, \alpha + h\beta) \geq \phi(u, \alpha)$$

Par développement de Taylor au second ordre, cela s'écrit :

$$\forall h \geq 0, \forall (v, \beta) \in C^0 \times D : \\ \phi(u + hv, \alpha + h\beta) - \phi(u, \alpha) = h \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, \alpha) \cdot v + h \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha) \cdot \beta + \frac{h^2}{2} (v, \beta)^T K(v, \beta) + o(h^2)$$

Où  $K$  est la matrice des dérivées secondes. Or, l'équilibre de la structure nous permet d'écrire :

$$\forall v \in C^0, \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, \alpha) \cdot v = 0$$

Puis, le critère d'irréversibilité associé à la loi de comportement peut s'écrire de la façon suivante :

$$\forall \beta \in D, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha) \cdot \beta \geq 0$$

On note  $\Omega^*$  l'ensemble des zones de  $\Omega$  sur lesquelles le critère est atteint et  $\Omega^T$  les zones élastiques :

$$\forall (x, \alpha(x)) \in \Omega^* \times D, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha(x)) = 0 \\ \forall (x, \alpha(x)) \in \Omega^T \times D, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha(x)) > 0$$

Si l'on considère alors des fonctions tests qui endommageraient les zones élastiques, on voit bien que c'est le terme de degré 1 en  $h$ , associé à la dérivée première par rapport à l'endommagement, qui prédominerait dans le développement de Taylor. Puis par positivité de tous ses coefficients, il serait alors évident que :

$$\phi(u + hv, \alpha + h\beta) \geq \phi(u, \alpha)$$

Il ne s'agit donc pas de perturbations susceptibles de déstabiliser notre structure. On doit donc éliminer ces fonctions tests de notre étude de stabilité. Pour ce faire, on va désormais considérer que nos  $\beta$  tests admissibles appartiennent à l'ensemble  $D^* = \{\beta \in D, \beta(x) = 0 \text{ sur } \Omega^T\}$ , tel que :

$$\forall \beta \in D^*, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(u, \alpha) \cdot \beta = 0$$

En conclusion, on est stable en  $(u, \alpha)$  si et seulement si le terme de degré 2 en  $h$  est positif :

$$\forall (v, \beta) \in C^0 \times D^*, (v, \beta)^T K(v, \beta) \geq 0 \quad (2)$$

On se retrouve donc avec un critère ayant une forme de quotient de Rayleigh sous contraintes d'inégalités.

Remarque : En raisonnant sur le problème en vitesse, on peut montrer [7] qu'une condition nécessaire de non-bifurcation (i.e unicité du problème en vitesse) s'écrit :

$$\forall (v, \beta) \in C^0 \times D^{**}, (v, \beta)^T K(v, \beta) \geq 0 \quad (3)$$

où  $D^{**} = \{\beta \in H^1(\Omega), \beta(x) = 0 \text{ sur } \Omega^T\}$ . On voit donc qu'elle diffère de la condition de stabilité par l'ensemble des champs d'endommagements tests  $\beta$  qui n'ont plus à être positifs. On en déduit immédiatement que non-bifurcation  $\implies$  stabilité, mais l'inverse n'est pas vrai en général.

### 3 Méthode numérique pour la résolution du critère

Notre critère de stabilité consiste à vérifier la positivité d'un quotient de Rayleigh dans la direction des endommagements croissants. En général, pour vérifier la positivité d'une fonction, on cherche son minimum et on conclut à partir de son signe. Il existe quelques algorithmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités dans la littérature, très efficaces dans le cas de contraintes complexes, mais ayant tous comme particularité d'être peu robustes lorsque l'on travaille sur des problèmes de grandes tailles, et donc sur des discrétisations à grands nombres de degrés de liberté. Pour s'affranchir de cette limitation, on a choisi de travailler dans un espace de réduction, comportant les modes propres les plus significatifs. C'est ce qui est fait de façon standard pour les minimisations sous contraintes d'égalités. L'algorithme développé se découpe alors en deux phases :

1. La première qui consiste à construire un sous espace de réduction de taille  $m$ . Pour cela, on utilise la méthode de Sorensen disponible dans la librairie Arpack [3], qui peut se présenter sous la forme suivante :

En partant d'un vecteur initial  $q_1$ , on construit une famille de vecteur  $q_k$  en projetant orthogonalement, à l'itération  $k$ , le vecteur  $K^{-1}q_k$  sur les  $k$  vecteurs précédents. L'orthogonalité est alors assurée explicitement à partir d'un algorithme de Gram-Schmidt suffisamment robuste dans la plupart des cas.

```

Calcul de  $q_1/||q_1|| = 1$ 
Pour  $k = 1, m$  faire
   $z = K^{-1}q_k$ 
  Pour  $l = 1, k$  faire
     $b_{lk} = (z, q_l)$ 
     $z = z - b_{lk}.q_l$ 
  Fin boucle
   $b_{k+1,k} = ||z||$ 
  Si  $b_{k+1,k} \neq 0$  alors
     $q_{k+1} = \frac{z}{b_{k+1,k}}$ 
  Sinon déflation
  Fin si
Fin boucle

```

On obtient alors une sous matrice, dite de Hessenberg supérieure, de la forme suivante :

$$B_m = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ 0 & \cdots & \cdots & b_{m-1,m} \\ 0 & 0 & b_{m,m-1} & b_{m,m} \end{bmatrix}$$

Et  $Q_m$  la matrice rectangulaire de passage de  $K^{-1}$  à  $B_m$  telle que :

$$Q_m^T Q_m = I_m$$

On a ainsi défini la relation :

$$K^{-1} = Q_m B_m Q_m^T$$

A cette étape, on a accès aux modes propres significatifs de l'opérateur tangent et donc à sa plus petite valeur propre. Celle-ci est calculée par une décomposition de Schur, déjà programmée dans le code. Le temps nécessaire à son estimation est très court. Si elle est positive, le critère de bifurcation n'est pas vérifié et la solution que l'on suit est donc automatiquement stable. Si elle est négative, c'est que l'on a obtenu un mode singulier. On a donc passé un point de bifurcation. Dans ce cas, on s'intéresse à la seconde étape qui consiste à obtenir une valeur approchée du critère de stabilité.

2. La seconde partie consiste à rechercher une estimation du minimum sous contraintes. Pour cela, on utilise la méthode des puissances sur la matrice de Hessenberg en assurant la positivité des variables d'endommagement de chaque vecteur itéré, à l'aide d'une projection  $\Pi$  dite de Rosen, qui consiste à remplacer les endommagements négatifs par 0 [9]. On peut alors écrire l'algorithme sous la forme suivante, en ajoutant  $\varepsilon$  comme critère de convergence et  $x_0$  comme vecteur initial aléatoire de la méthode :

$$\left[ \begin{array}{l}
 v_0 = \Pi(Q_m x_0) \\
 x_0 = \frac{Q_m^T v_0}{\|Q_m^T v_0\|} \\
 \text{Pour } k = 1, \text{ nitmax} \\
 \quad x_k = B_m x_{k-1} \\
 \quad v_k = \Pi(Q_m x_k) \\
 \quad x_k = \frac{Q_m^T v_k}{\|Q_m^T v_k\|} \\
 \quad \text{Si } (\|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon) \text{ alors} \\
 \quad \quad \text{mode} = v_k \\
 \quad \quad \text{crit} = \frac{v_k^T K v_k}{\|v_k\|^2} \\
 \quad \text{Sinon déflation} \\
 \quad \text{Fin si} \\
 \text{Fin boucle}
 \end{array} \right.$$

On aboutit alors à une estimation du critère à partir du maximum sous contraintes de  $K^{-1}$ . Afin de tester la qualité de cette estimation, on effectue ensuite un redémarrage à partir du vecteur convergé, en appliquant cette fois la méthode sur  $B_m^{-1}$ , via un décalage nous assurant de travailler avec une matrice définie positive (on travaille avec une matrice  $[\mu I_m - B_m^{-1}]$  avec  $\mu > \rho(B_m^{-1})$ ). La convergence est alors plus difficile à obtenir compte tenu de la forme de la matrice  $B_m^{-1}$ , et dépend du décalage  $\mu$  qui doit être petit, mais suffisamment supérieur à la plus grande valeur propre sans contraintes.

## 4 Cas d'une barre en traction

### 4.1 Résultats analytiques

Le cas de la barre en traction est le seul pour lequel on peut actuellement trouver dans la littérature des résultats analytiques de stabilité. On peut ainsi retrouver les expressions des critères de bifurcation et de perte de stabilité de la solution homogène en fonction du rapport entre la longueur de la barre et la longueur interne ainsi qu'en fonction du chargement [8].

On considère une barre de taille  $L$ , représentée en Figure 1, que l'on fixe en sa base  $x = 0$  et que l'on charge en déplacements imposés  $U_t = tL$  à son extrémité  $x = L$ .

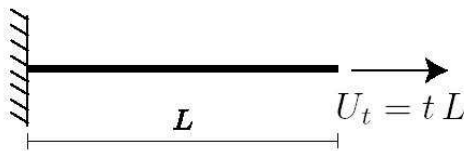


FIG. 1 – Représentation de la barre 1D en traction

Les déplacements admissibles dans la barre doivent alors satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$u_t(x=0) = 0, u_t(x=L) = U_t$$

Dans un cadre général, on peut écrire l'expression de l'énergie totale de la façon suivante :

$$\Phi(u, \alpha) = \int_0^L \frac{1}{2} E(\alpha_t) u_t'^2 + \omega(\alpha_t) + \frac{1}{2} E_0 l^2 \alpha_t'^2 dx$$

En tenant compte de l'équilibre  $\sigma_t(x) = E(\alpha_t(x)) u_t'(x)$ , on élimine les degrés de liberté de déplacements et on se ramène à une étude de stabilité sur un problème simple en endommagement.

Après avoir effectué certains calculs, on définit un quotient de Rayleigh qui est le rapport de la partie négative de la dérivée seconde de l'énergie sur sa partie positive :

$$R_t(v, \beta) = \frac{\int_0^L E_0 l^2 \beta'^2 + E(\alpha_t) \left( v' + \frac{E'(\alpha_t)}{E(\alpha_t)} t \beta \right)^2 dx}{\int_0^L \left( \frac{1}{2} S''(\alpha_t) \sigma_t^2 - \omega''(\alpha_t) \right) \beta^2 dx}$$

On choisit ici, de prendre respectivement comme loi de comportement et comme dissipation :

$$E(\alpha_t) = E_0 (1 - \alpha_t)^2, \quad \omega(\alpha_t) = \frac{\sigma_M^2}{E_0} \alpha_t$$

En notant  $U_e$  le chargement à la limite d'élasticité, on présente en Figure 2 la réponse de la structure et le graphe de stabilité pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda = \frac{U_e}{l}$ .

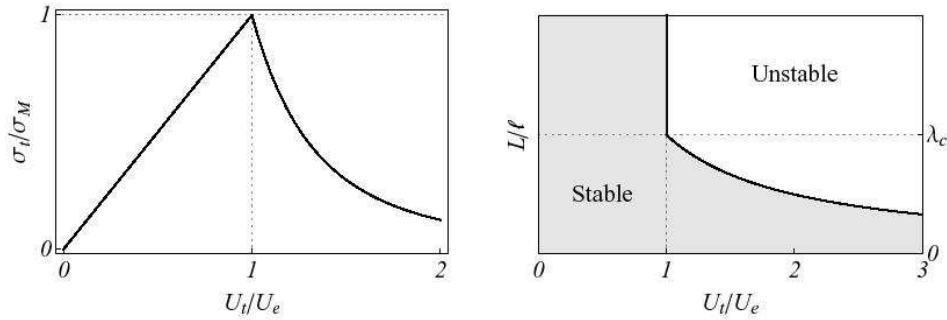


FIG. 2 – Réponse contraintes-déformations de la barre et diagramme de stabilité de la solution homogène

Les expressions du chargement à la bifurcation  $U_{tb}$  et à la perte de stabilité  $U_{ti}$ , obtenues à partir de fonctions tests localisant l'endommagement sur l'une des extrémités de la barre, sont les suivantes :

$$U_{tb} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} l \quad (4)$$

$$U_{ti} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} l \quad (5)$$

## 4.2 Résultats numériques

On a réalisé le cas test dans le code Aster en utilisant des maillages triangles, puis quadrangles, toujours quadratiques en déplacement et linéaires en endommagement, comme cela est fait classiquement pour les calculs d'endommagement non locaux dans le code Aster. On utilise l'algorithme de Newton global pour la convergence qui, du fait de ses propriétés, nous permet de converger constamment sur la solution homogène, quelque soit son état de stabilité. La barre est de longueur 100 m. On prend comme paramètres matériaux des paramètres simplistes :

$E_0 = 1$  N/m,  $\sigma_M = 0.01$  N/m et  $\nu = 0$  de sorte à conserver le caractère quasi 1D.

On applique alors l'algorithme développé dans le code, de sorte à comparer les résultats obtenus avec ceux théoriquement attendus. Pour cela, on fait varier la longueur interne de notre modèle ainsi que le raffinement de la discretisation spatiale, et l'on recherche à chaque fois le chargement à partir duquel on détecte l'instabilité de la solution. On observe alors que l'algorithme sans redémarrage par la matrice  $B_m^{-1}$ , fournit globalement un retard d'à peu près 25% avec le chargement à l'instabilité analytique (5), et cela indépendamment du maillage. Lorsque l'on inclut le redémarrage, on se rapproche d'autant plus de la valeur attendue que le décalage  $\mu$  est faible. On présente dans le tableau ci-dessous les écarts relatifs obtenus à partir d'une discrétisation en 11011 degrés de liberté d'endommagement (75053 ddls en tout) pour 3 différentes valeurs de décalage.

Décalage $\mu$	$3\rho(B_m^{-1})$	$1.5\rho(B_m^{-1})$	$0.75\rho(B_m^{-1})$
Ecart relatif	10-13%	6-10%	3-6%

TAB. 1 – Ecart relatif avec les résultats analytiques pour différentes valeurs de décalage

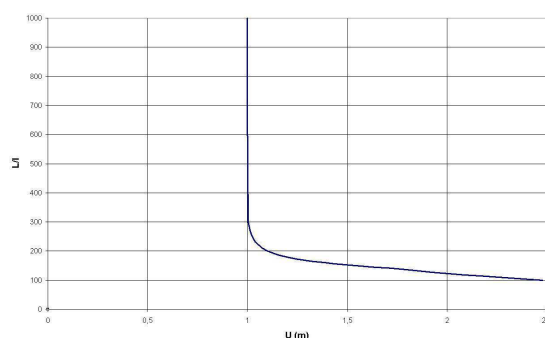


FIG. 3 – diagramme de stabilité obtenu avec 11011 ddls d'endommagement

Dans tout les cas, on reproduit un diagramme de stabilité similaire à celui de la Figure 2 (ex : voir Figure 3) et on retrouve exactement le critère de bifurcation (4). Si l'on veut obtenir un résultat dans un délai de temps très court, on utilise l'algorithme sans redémarrage. On recherche alors un maximum sous contrainte pour  $K^{-1}$  dont la précision varie autour de 25%. Si l'on veut estimer finement la stabilité, il faut effectuer l'algorithme avec redémarrage et accepter un temps calcul plus long et non-négligeable du fait de la difficile convergence qui nécessite beaucoup d'itérations. Qualitativement, le mode d'instabilité présenté à la Figure 4 présente un bon état d'endommagement, puisqu'on obtient bien une localisation en bout de barre. Ce qui est le résultat attendu.



FIG. 4 – mode d'instabilité de la solution homogène

La discrétisation la plus fine sur laquelle on a travaillé est de 11011 ddls d'endommagements. On comprend assez bien que le facteur pouvant complexifier l'étude de stabilité est le nombre de degrés de liberté d'endommagement qui atteignent le critère, et donc qui s'incrémentent pour un certain chargement donné. Pour les études classiques en 2D, ce nombre dépasse rarement quelques milliers. En 3D, la qualité des résultats est plus difficile à assurer. Toutefois, on peut s'attendre à trouver une bonne estimation de la stabilité.

### 4.3 Cas de la minimisation alternée

On effectue désormais le calcul à partir d'un algorithme de minimisation alternée récemment développé dans le code. On sait que la minimisation alternée est un algorithme descendant qui a donc l'avant-

tage de toujours converger vers une solution. Ce qui permet de franchir directement les snap-backs. On trouve alors que l'on converge sur la solution localisée dès le chargement de bifurcation atteint et cela malgré que la solution homogène soit encore stable. Cela s'explique par le fait que la minimisation alternée a la capacité d'aller chercher les solutions les plus basses en énergie. Et on comprend assez bien que la solution localisée soit plus basse en énergie que la solution homogène. Les courbes forces-déplacements pour les deux méthodes de résolution sont présentées sur la Figure 5.

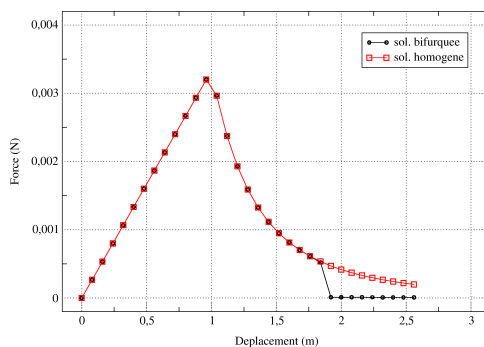


FIG. 5 – courbes forces-déplacements obtenues à partir de Newton et de la minimisation alternée

On a pu se rendre compte que ce phénomène se produit quelque soit le maillage, réglé ou non, sur lequel on s'appuie. Il s'agit donc bien d'une conséquence de l'utilisation de la minimisation alternée. Les solutions alors obtenues en endommagement sont présentées au chargement de bifurcation puis au chargement suivant sur les Figures 6 et 7. On remarque que la bifurcation localise d'abord faiblement l'endommagement puis fortement jusqu'à atteindre une valeur de l'endommagement  $\simeq 1$ .

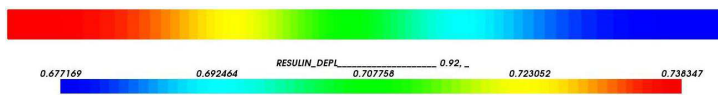


FIG. 6 – solution localisée au chargement de bifurcation

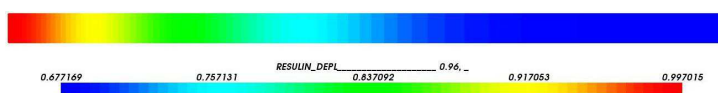


FIG. 7 – solution localisée au pas de temps suivant

On voit alors bien que lorsque la solution homogène devient instable, la solution localisée consiste à déchirer complètement le bord de la barre (on n'a pas un endommagement de 1 du fait de la rigidité résiduelle que l'on ajoute afin de préserver la convergence des calculs). Ce résultat a été retrouvé en appliquant la méthode de recherche de branches bifurquées développée par Roméo Fernandes lors de travaux précédents [5], et qui consiste à reprendre le pas de temps instable en partant d'une prédiction du champ de déplacement qui soit le déplacement convergé auquel on ajoute la perturbation qui déstabilise la structure.

L'étude de stabilité de la solution localisée montre que celle-ci est toujours stable. En effet, le plus petit mode propre associé à la matrice tangente a une valeur propre positive. Ce qui est suffisant pour déduire la stabilité. Cette observation correspond bien avec l'idée qu'une instabilité est associée à une propagation brutale de l'endommagement dans une zone localisée. En conséquence, les solutions localisées semblent plus stables. Et de fait, la solution fournie par la minimisation alternée est plus stable que



celle fournie par la méthode de Newton. Ce qui s'envisage très bien du fait des caractéristiques propres à la minimisation alternée.

## 5 Conclusion

La méthode numérique développée permet d'obtenir une bonne approximation du critère de stabilité. Bien qu'il existe toujours un écart avec les résultats théoriques, il nous est désormais possible de savoir si une solution en endommagement devient instable pour des problèmes dépassant le millier de degrés de liberté. Notre étude nous a également permis d'observer que les solutions localisées sont plus stables et que l'algorithme de minimisation alternée semble fournir de meilleurs minimums que l'algorithme de Newton du point de vue stabilité.

## Références

- [1] A. Benallal, R. Billardon, and G. Geymonat. *Bifurcation and Localization in Rate-Independent Materials.*, In Q. Nguyen, editor, C.S.I.M Lecture Notes on Bifurcation and Stability of Dissipative Systems. Springer-Verlag.
- [2] A. Benallal and J-J. Marigo. *Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening.*, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., 15 :283-295, 2007.
- [3] O. Boiteau. *Solveurs modaux et résolution du problème généralisé (GEP)*, Documentation Code\_Aster, R5.01.01, 52-61, 2009.
- [4] B. Bourdin, G. Francfort, and J-J. Marigo. *Numerical experiments in revisited brittle fracture.*, J. Mesh. Phys. Solids, 48 :797-826, 2000.
- [5] R. Fernandes. *Modélisation numérique objective des problèmes hydromécaniques couplés dans le cas des géomatériaux.*, Thèse de doctorat à l'école doctorale Université jean Fourier (Grenoble1), 107-136, 2009.
- [6] E. Lorentz and S. Andrieux. *Analysis of non-local models through energetic formulations.*, Int. J. Solids Struct., 40 :2905-2936, 2003.
- [7] Q-S. Nguyen. *Stabilité et mécanique non linéaire*, Hermes Science, 2000.
- [8] K. Pham, H. Amor, J-J. Marigo, C. Maurini. *Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture.*, Preprint Int. J. Damage Mech., 13-15, 2009
- [9] A. Pinto Da Costa and A. Seeger. *Numerical resolution of cone-constrained eigenvalue problems.*, Computational & Applied Mathematics, 28 :37-61, 2009.