



**HAL**  
open science

## Aspects dynamiques du couplage 3D-1D dans la méthode Arlequin

Assaf Ghanem, Thouraya Baranger, Mohamed Torkhani, Najib Mahjoubi

► **To cite this version:**

Assaf Ghanem, Thouraya Baranger, Mohamed Torkhani, Najib Mahjoubi. Aspects dynamiques du couplage 3D-1D dans la méthode Arlequin. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592776

**HAL Id: hal-00592776**

**<https://hal.science/hal-00592776>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Aspects Dynamiques Du Couplage 3D-1D Dans La Méthode Arlequin

A. Ghanem<sup>12</sup>, T. Baranger<sup>23</sup>, N. Mahjoubi<sup>1</sup>, M. Torkhani<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LaMSID, UMR CNRS-EDF 2832, France, (assaf.ghanem, mohamed.torkhani, najib-externe.mahjoubi )@edf.fr

<sup>2</sup>Université de Lyon, CNRS, LaMCoS UMR5259, INSA Lyon, France, assaf.ghanem@insa-lyon.fr

<sup>3</sup>Université Lyon1, France, thouraya.baranger@univ-lyon1.fr

---

**Résumé** — La méthode Arlequin est une méthode de couplage basée sur la combinaison de modèles de finesses et/ou de modélisations différentes. L'opérateur de couplage défini sur la zone commune aux différents modèles a une grande importance. L'application de cette méthode dans des études réalisées en régime dynamique peut être avantageuse en temps de calcul si le choix de l'opérateur de couplage permet de bien traiter l'aspect de propagation d'énergie. Dans ce papier nous étudions le couplage de différents schémas numériques en temps dans le cadre Arlequin.

**Mots clefs** — Dynamique transitoire, analyse multi-échelles, méthode Arlequin.

---

### 1 Introduction

La simulation de modèles de machines tournantes en régime dynamique est généralement basée sur des modélisations de type poutre. La prise en compte d'un phénomène localisé (de type fissure, contact, impact) en se basant sur ces modèles globaux n'est pas fiable, et une étude basée sur un mono-modèle tridimensionnel fin est alors nécessaire.

Plusieurs méthodes adaptatives proposent des solutions pour traiter ce type de problèmes. Cependant, la mise en œuvre de ces approches s'avère compliquée car elles nécessitent dans la plupart des cas la mise en place de stratégies de remaillage.

La méthode Arlequin [1] offre un cadre pour traiter ce type de difficultés. Elle est basée sur une partition de modèles, ce qui permet de coupler des domaines de dimensions et de finesses différentes, d'où une économie en taille du problème par rapport à une mono-modélisation fine. La bi-modélisation Arlequin permet la restitution du comportement global d'un modèle donné tout en ayant la possibilité de mettre en évidence des effets qui apparaissent aux échelles plus fines.

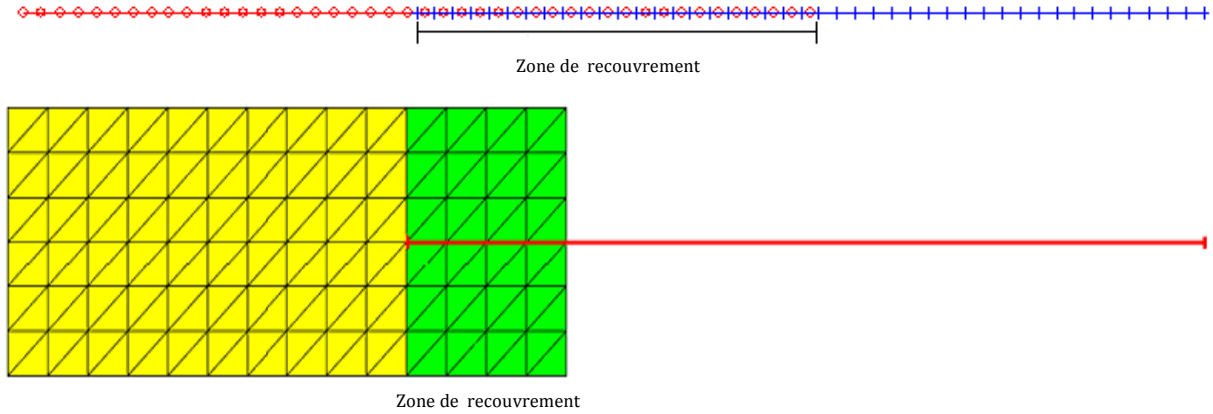
Par ailleurs, comme il est basé sur un raccord avec recouvrement, le cadre Arlequin s'avère efficace pour les études en régime dynamique. En effet, il a été démontré [2] que, moyennant certaines précautions portant sur les ingrédients numériques de la méthode, cette méthode permet aux ondes de transiter « proprement » entre les différents modèles à travers la zone de raccord, sans piéger l'énergie au niveau des échelles fines, par un phénomène de réflexions d'ondes parasites.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'écriture de la formulation Arlequin en régime dynamique transitoire. Le but principal de ce travail est de proposer, dans le cas de raccord de modèles avec recouvrement, un cadre rigoureux pour l'intégration en temps en se basant sur des algorithmes permettant de coupler des schémas différents.

Les futures applications industrielles se situent dans le domaine de la dynamique des rotors. Des couplages multi-modèles de type 2D-1D et 3D-1D qui autorisent d'employer des techniques multi-échelles en temps s'avèrent être utiles.

Dans cette perspective, les études réalisées portent sur un raccord de deux structures maillées en barres, ainsi que sur une structure maillée en 2D collée à une poutre maillée en 1D (Figure 1).

Une première application est réalisée avec une intégration mono-échelle en temps et un seul schéma numérique appliqué sur les deux sous-domaines à raccorder ainsi que sur la zone de collage. Ensuite, une extension est envisagée en vue d'appliquer deux schémas d'intégration différents sur chacun des deux modèles. Dans les deux cas de figure, des schémas de la famille de Newmark [6] sont utilisés.



**Figure 1: Représentation des raccords Arlequin barre-barre et 2D-1D**

## 2 Formulation Arlequin : Écriture continue en régime dynamique

Une étude mécanique basée sur la méthode Arlequin consiste à diviser un domaine  $\Omega$  en plusieurs sous-domaines  $\Omega_i$  se recouvrant sur certaines zones. Pour deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , la zone de recouvrement est formée de leur intersection :  $S_r = \Omega_1 \cap \Omega_2$ .

Dans le cadre de l'application visée dans cet article, le collage est réalisé sur toute la zone de recouvrement (opération de zoom).

La méthode Arlequin s'appuie sur trois étapes principales :

- ❖ superposer les différents états mécaniques dans la zone de recouvrement
- ❖ partager les énergies entre les différents modèles
- ❖ coupler les modèles

En régime dynamique, on considère les deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , soumis à un champ de forces qui varie de manière considérable en fonction du temps. D'après le Principe des Travaux Virtuels, le problème continu consiste à déterminer les champs de déplacement  $u_1$  et  $u_2$ , cinématiquement admissibles, ainsi que le champ de forces fictives  $\lambda$  (multiplicateurs de Lagrange assurant le couplage) sont solutions de l'écriture variationnelle suivante [8]:

$$\text{Trouver } (u_1, u_2, \lambda) \in W_1 \times W_2 \times M;$$

$$\forall (w_1, w_2, \mu) \in W_1 \times W_2 \times M;$$

$$G_{\text{dyn}}(u_1, w_1, u_2, w_2, \alpha) + G_{\text{int}}(u_1, w_1, u_2, w_2, \beta) + G_{\text{arl}}(\lambda, w_1, w_2) = G_{\text{ext}}(w_1, w_2, \varphi) \quad (1)$$

$$G_{\text{arl}}(\mu, u_1, u_2) = 0 \quad (2)$$

où  $W_1$  et  $W_2$  représentent les espaces des champs cinématiquement admissibles associés à chacun des modèles et  $M$  désigne l'espace pivot qui joue un rôle dans le dialogue entre les modèles superposés. Pour plus de détails sur sa définition nous pouvons se référer à [3].

On définit les valeurs des fonctions de pondération  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\varphi \in [0, 1]$  par les conditions suivantes :

$$\alpha = \beta = \varphi = 1 \text{ sur } \Omega \setminus S_r \quad (3)$$

$$0 < \alpha, \beta, \varphi < 1 \text{ sur } S_r \quad (4)$$

Pour la suite on note :  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  ;  $\beta_2 = 1 - \beta_1$  ;  $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$

$G_{\text{dyn}}$ ,  $G_{\text{int}}$ ,  $G_{\text{arl}}$ , et  $G_{\text{ext}}$  représentent respectivement le travail des forces d'inertie, le travail des efforts

internes, celui du collage Arlequin, et finalement le travail des forces extérieures appliquées aux différents modèles. Ils sont définis comme suit :

$$G_{\text{dyn}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{w}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \alpha_2 \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{w}_2 d\Omega_2 \quad (5)$$

$$G_{\text{int}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Omega_1} \beta_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \beta_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_2) d\Omega_2 \quad (6)$$

$$G_{\text{ext}}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{f}_1(\mathbf{w}_1) + \mathbf{f}_2(\mathbf{w}_2) = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \mathbf{w}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \mathbf{w}_2 d\Omega_2 \quad (7)$$

$$G_{\text{arl}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \rangle \quad \text{où } \langle, \rangle \text{ représente un opérateur de couplage.} \quad (8)$$

Plusieurs opérateurs de couplage ont été proposés dans le but de raccorder les différents modèles dans le cadre Arlequin [1, 3, 4].

En désignant par  $\mathbf{u}$  l'écriture généralisée des vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ , les trois principaux opérateurs de couplage sont définis comme suit :

$$\text{Couplage } L^2: \quad G_{\text{arl}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \int_{S_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} dS_c$$

$$\text{Couplage } H^1: \quad G_{\text{arl}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \int_{S_c} [\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} + l^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] dS_c \quad \text{avec } l \text{ paramètre d'homogénéisation}$$

$$\text{Couplage énergétique: } G_{\text{arl}}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \int_{S_c} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dS_c$$

Le couplage  $L^2$  peut présenter des problèmes de conditionnement de la matrice globale. Ceci peut être résolu, soit artificiellement en introduisant un paramètre d'homogénéisation (couplage  $H^1$ ), soit naturellement en utilisant l'opérateur de couplage énergétique.

Les trois opérateurs ont été testés pour les applications réalisées dans cet article. Ils présentent des résultats assez proches pour ce type d'études.

### 3 Conservation de l'énergie en continu avec la formulation Arlequin

En évaluant la variation de l'énergie mécanique par rapport au temps, nous pouvons étudier la contribution en terme d'énergie du raccord réalisé par l'intermédiaire de la méthode Arlequin.

Dans le cas où les forces externes sont considérées nulles, l'énergie totale ( $E_{\text{tot}}$ ) peut être écrite sous la forme suivante :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} \quad (9)$$

Les énergies cinétiques et potentielles sont définies respectivement par :

$$E_{\text{cinétique}} = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \alpha_1 \rho_1 (\dot{\mathbf{u}}_1)^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2} \alpha_2 \rho_2 (\dot{\mathbf{u}}_2)^2 d\Omega_2 \quad (10)$$

$$E_{\text{potentielle}} = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \beta_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \frac{1}{2} \beta_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) d\Omega_2 \quad (11)$$

Chaque modèle peut avoir sa propre loi de comportement. Dans ce cas on considère le cas de l'élasticité linéaire, et on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice d'élasticité contenant les propriétés élastiques de l'élément : module de Young, coefficient de Poisson, etc.

En dérivant l'énergie totale (9) par rapport au temps nous obtenons :

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \rho_1 \dot{u}_1 \ddot{u}_1 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \alpha_2 \rho_2 \dot{u}_2 \ddot{u}_2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_1} \beta_1 \sigma(u_1) : \varepsilon(\dot{u}_1) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \beta_2 \sigma(u_2) : \varepsilon(\dot{u}_2) d\Omega_2 \quad (12)$$

En considérant les champs virtuels  $w_1 = \dot{u}_1$  et  $w_2 = \dot{u}_2$ , et en comparant les termes de (12) avec ceux de (1), nous pouvons écrire :  $\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = - \langle \lambda, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle$

D'autre part, pour  $\lambda = \mu$ , en dérivant (2) par rapport au temps nous obtenons :

$$\frac{dG_{\text{arl}}}{dt} = \langle \lambda, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle + \left\langle \frac{d\lambda}{dt}, u_1 - u_2 \right\rangle = 0 \quad (13)$$

En considérant  $\lambda$  indépendant du temps, le deuxième terme de (13) s'annule.

Donc nous pouvons écrire la conservation de l'énergie par rapport au temps :

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = - \langle \lambda, \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \rangle = 0 \quad (14)$$

D'après (14), nous pouvons dire que dans le cas où  $\lambda$  est constant par rapport au temps, l'approche Arlequin permet de conserver l'énergie totale du système mécanique.

## 4 Ecriture discrète en espace et en temps

Pour la suite nous faisons le choix d'utiliser l'opérateur énergétique en se basant sur les résultats et sur la nature des quantités intégrées qui présente une homogénéité avec les quantités calculées dans (4).

En considérant le même problème que dans les parties précédentes, et en tenant compte de l'effet de l'amortissement de la structure composée des deux modèles, nous pouvons écrire les équations discrètes de la dynamique correspondant à (1), ainsi que la condition discrète du raccord Arlequin (2) :

$$M_1 \ddot{u}_{n+1}^1 + C_1 \dot{u}_{n+1}^1 + K_1 u_{n+1}^1 + L_1^1 \lambda_{n+1} = f_{n+1/\text{ext}}^1 \quad (15)$$

$$M_2 \ddot{u}_{n+1}^2 + C_2 \dot{u}_{n+1}^2 + K_2 u_{n+1}^2 + L_2^1 \lambda_{n+1} = f_{n+1/\text{ext}}^2 \quad (16)$$

$$L_1 u_{n+1}^1 + L_2 u_{n+1}^2 = 0 \quad (17)$$

Avec  $K_i$  les matrices de raideur correspondant aux sous-domaines;  $M_i$  les matrices de masse;  $C_i$  les matrices d'amortissement;  $L_i$  les matrices des opérateurs de couplage agissant sur les déplacements  $u^i$ ;  $\lambda$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange qui permet d'assurer le couplage entre les deux modèles à l'interface.

Les matrices  $C_i$  sont importantes pour les applications de type machines tournantes car elles contiennent les termes gyroscopiques.

On note que dans les écritures (15) et (16) les matrices  $M_i$ ,  $C_i$ , et  $K_i$  sont des matrices pondérées avec les coefficients définis dans (3) et (4).

## 5 Intégration numérique

Dans les deux applications envisagées nous utilisons le même pas de temps dans tout le système, ainsi qu'une intégration numérique multi-schémas basée sur deux schémas de Newmark différents.

L'algorithme utilisé pour réaliser cette intégration est celui de la méthode Gravouil-Combescure [10] du couplage de deux sous-domaines intégrés en temps avec des schémas de Newmark différents et la même échelle de temps.

## Problématique

Les études réalisées sur le collage dans le cadre des applications présentées dans l'introduction donnent un bilan d'énergie équilibré dans le cas de l'utilisation du même schéma de Newmark. Le passage à deux schémas différents ( $\gamma^1 \neq \gamma^2$  et  $\beta^1 \neq \beta^2$ ) aboutit à une différence entre les termes de gauche et de droite du bilan d'énergie présenté dans (18).

### Bilan d'énergie – Intégration avec un schéma de Newmark

Dans ce qui suit, en se basant sur la démonstration présentée dans [7], nous allons écrire le bilan d'énergie au niveau discret dans le cadre d'une intégration basée sur deux schémas de Newmark. Nous allons reprendre cette démarche dans le but de faire apparaître le terme contenant la contribution du travail Arlequin. Cette quantité est à l'origine de différences observées au niveau des résultats (Figure3). Une analyse détaillée du bilan énergétique nous permettra de proposer une solution dans le but d'annuler l'effet résultant du travail des efforts de collage.

Afin de dresser ce bilan, nous écrivons la variation de l'énergie mécanique entre deux instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  des deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ :

$$\sum_{i=1,2} \left[ E_c^i + E_p^i \right]_n^{n+1} = \sum_{i=1,2} \left[ \frac{1}{2} (\dot{u}^i)^t M_i (\dot{u}^i) + \frac{1}{2} (u^i)^t K_i (u^i) \right]_n^{n+1} \quad (18)$$

$$= \sum_{i=1,2} \left[ \frac{1}{2} (\dot{u}_{n+1}^i + \dot{u}_n^i)^t M_i (\dot{u}_{n+1}^i - \dot{u}_n^i) + \frac{1}{2} (u_{n+1}^i + u_n^i)^t K_i (u_{n+1}^i - u_n^i) \right] \quad (19)$$

Le déroulement du calcul nous permet d'aboutir à l'écriture finale du bilan d'énergie dans le cas de l'utilisation de deux schémas de Newmark et d'un collage Arlequin (20).

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,2} \left[ \frac{1}{2} (\dot{u}^i)^t M_i (\dot{u}^i) + \frac{1}{2} (u^i)^t K_i (u^i) + \frac{\Delta t^2}{2} (\beta^i - \frac{1}{2} \gamma^i) (\ddot{u}^i)^t M_i (\ddot{u}^i) \right]_n^{n+1} \\ &= \sum_{i=1,2} (\Delta u^i)^t \left[ \bar{f}^i + (\gamma^i - \frac{1}{2}) \Delta f^i - L_i^t \bar{\lambda} - (\gamma^i - \frac{1}{2}) L_i^t \Delta \lambda \right] \\ & - \sum_{i=1,2} (\gamma^i - \frac{1}{2}) \left[ (\Delta u^i)^t K_i (\Delta u^i) + (\beta^i - \frac{1}{2} \gamma^i) \Delta t^2 (\Delta \ddot{u}^i)^t M_i (\Delta \ddot{u}^i) \right] \\ & - \sum_{i=1,2} (\Delta u^i)^t C_i \left[ \frac{1}{2} (\dot{u}_{n+1}^i + \dot{u}_n^i) + (\gamma^i - \frac{1}{2}) \Delta \dot{u}^i \right] \end{aligned} \quad (20)$$

avec  $\Delta X = X_{n+1} - X_n$  et  $\bar{X} = \frac{1}{2} (X_{n+1} + X_n)$

Les termes de la première ligne du membre de droite de (20) représentent le travail des efforts extérieurs et le travail du raccord Arlequin. La deuxième ligne contient la résultante dissipative du schéma d'intégration de Newmark attribuée aux matrices  $K_i$  et  $M_i$ , et la troisième ligne est constituée des termes reliés à la matrice d'amortissement qui sont aussi dissipatifs. Le membre de gauche contient l'expression de l'énergie mécanique totale ainsi qu'un terme conservatif provenant des paramètres du schéma d'intégration.

## 6 Etude du travail Arlequin

La variation des résultats évoquée dans la partie précédente provient de la contribution du travail du collage Arlequin qui apparaît dans le second membre de l'équation (20).

$$W_{\text{Inter}}^{\text{Ar}} = - \sum_{i=1,2} (\Delta u^i)^t \left( L_i^t \bar{\lambda} + (\gamma^i - \frac{1}{2}) L_i^t \Delta \lambda \right) \quad (21)$$

Ce terme peut être réécrit sous la forme d'une interpolation de  $\lambda$  sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$W_{\text{Inter}}^{\text{Ar}} = - \sum_{i=1,2} (\Delta u^i)^t \left( L_i^t \bar{\lambda} + (\gamma^i - \frac{1}{2}) L_i^t \Delta \lambda \right) = \sum_{i=1,2} (\Delta u^i)^t L_i^t (\gamma^i \lambda_{n+1} + (1 - \gamma^i) \lambda_n) \quad (22)$$

Afin d'annuler l'effet de ce terme, nous devons faire apparaître la condition de raccord Arlequin (17). En s'inspirant de ce qui est déjà proposé dans [9], nous proposons d'utiliser, dans la zone de collage, un  $\lambda$  *constant* (qu'on nomme  $\lambda_{n+\gamma}$ ) par rapport au temps entre deux instants successifs. Cette notion de  $\lambda_{n+\gamma}$  nous permet de réécrire la contribution du travail Arlequin (22) sous la forme :

$$\mathbf{W}_{\text{Inter}}^{\text{Arl}} = \sum_{i=1,2} (\Delta \mathbf{u}^i)^t \mathbf{L}_i^t (\lambda_{n+\gamma}) \quad (23)$$

Si les quadratures numériques utilisées pour intégrer les conditions Arlequin sont bien respectées, l'équation (17) nous permet d'écrire à deux instants (n) et (n+1):

$$\sum_{i=1,2} \mathbf{L}_i \mathbf{u}_{n+1}^i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1,2} \mathbf{L}_i \mathbf{u}_n^i = 0$$

d'où l'annulation du travail des efforts de collage (23).

En réalisant cette opération nous pouvons annuler la contribution du travail des efforts de collage à l'interface. Nous obtenons alors un bilan d'énergie (20) où l'équilibre entre les deux membres de l'équation est vérifié dans chaque intervalle.

### Remarque

La formulation proposée dans la section 6 constitue un cadre théorique permettant l'annulation du travail des forces de collage. La valeur constante de  $\lambda_{n+\gamma}$  dans la zone de collage reste à déterminer.

Dans ce qui suit nous proposons une méthodologie permettant de déterminer une valeur de  $\lambda_{n+\gamma}$  sur la zone de collage, tout en lui attribuant sa propre valeur sur les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

En effet, en s'inspirant de l'équation (22) :

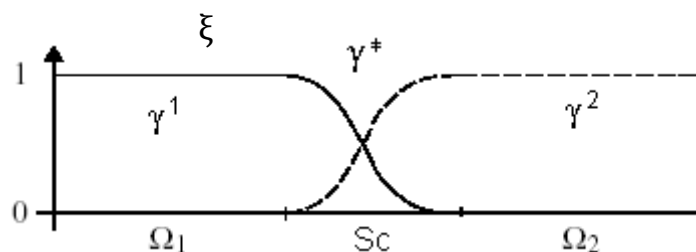
$$\lambda_{n+\gamma} = \gamma^i \lambda_{n+1} + (1 - \gamma^i) \lambda_n$$

nous réécrivons  $\lambda_{n+\gamma}$  comme suit :

$$\lambda_{n+\gamma} = \gamma^* \lambda_{n+1} + (1 - \gamma^*) \lambda_n \quad (24)$$

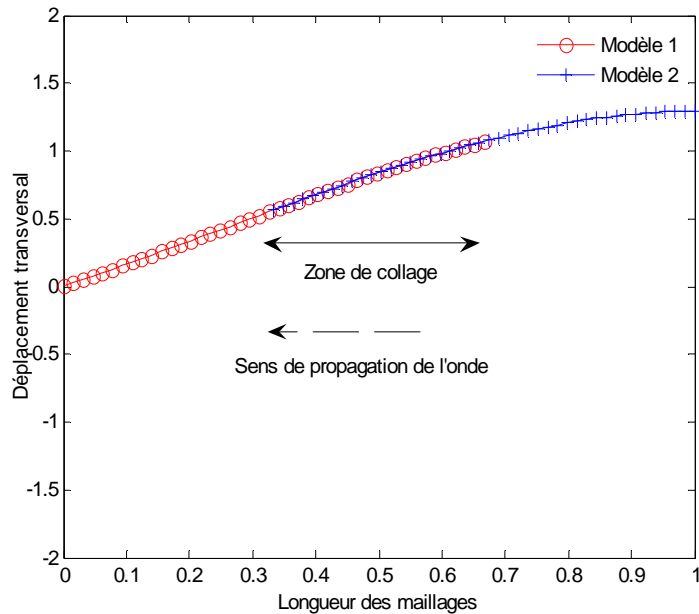
Déterminer la valeur de  $\lambda_{n+\gamma}$  revient alors à trouver  $\gamma^*$ . Afin de rester cohérent avec la notion de partition de l'unité utilisée dans le couplage Arlequin en espace, nous proposons de pondérer  $\gamma^1$  et  $\gamma^2$  avec un coefficient  $\xi$  dans la zone de collage, tout en gardant leurs propres valeurs à l'extérieur de ce domaine. On obtient :  $\gamma^* = \gamma^1$  sur  $\Omega^1 \setminus \text{Sc}$  ;  $\gamma^* = \gamma^2$  sur  $\Omega^2 \setminus \text{Sc}$  ;  $\gamma^* = \xi \gamma^1 + (1 - \xi) \gamma^2$  sur  $\text{Sc}$ .

Où  $\xi$  est défini par la courbe suivante :



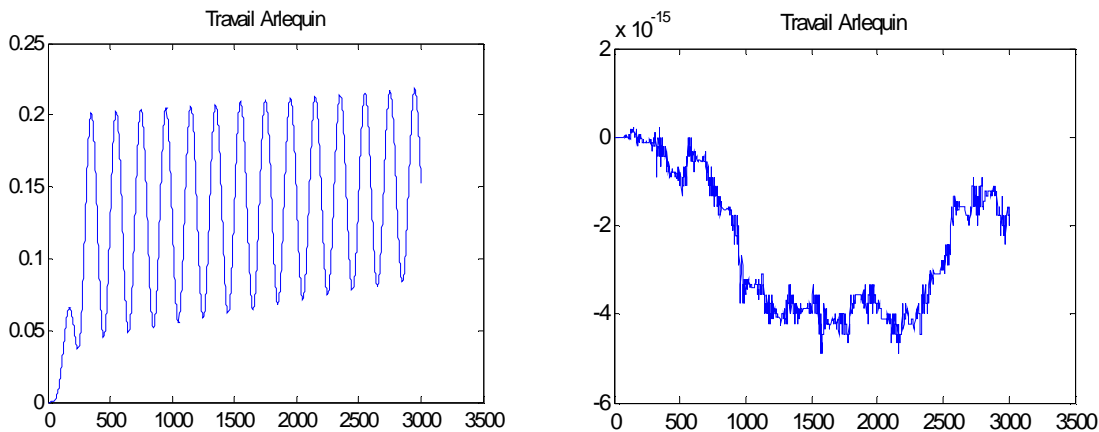
## 7 Application numérique

Cette démarche a été appliquée sur deux modèles maillés en barres et raccordés avec la méthode Arlequin. Chaque domaine a été intégré avec un schéma de Newmark différent. L'intégration est mono-échelle en temps.



**Figure 2 : Etat de la structure raccordée à un instant (t)**

Les résultats ont été validés par rapport à une solution analytique d'une barre au repos initial [5], encadrée à son extrémité gauche et soumise à son extrémité droite à une force de traction constante. Ensuite, nous avons réalisé le même travail avec un chargement sinusoïdal, avec des schémas de Newmark dissipatifs sans prendre en compte l'effet de l'amortissement de la matrice  $C$ .



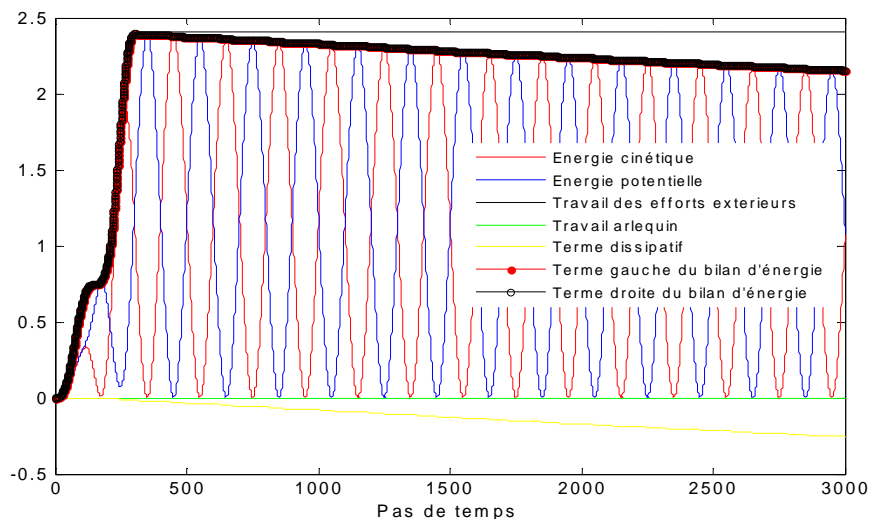
**Figure 3 : Comparaison du travail Arlequin avant (gauche) et après (droite) traitement**

Dans la figure 3, le graphe à gauche montre la variation de la contribution du travail de collage à chaque pas de temps. Dans celui de droite nous avons le même tracé mais après l'introduction de  $\lambda_{n+\gamma}$ . Nous constatons que la valeur de ce travail s'annule dans le deuxième cas, ce qui nous permet de retrouver l'équilibre du bilan d'énergie (Figure 4).

Les différentes grandeurs figurant dans le bilan d'énergie (20), sauf ceux qui contiennent la matrice  $C$  sont présentées dans la figure suivante (Figure 4). Nous obtenons un profil cohérent en terme d'énergies cinétique et potentielle. Nous vérifions l'équilibre du bilan d'énergie du schéma en comparant le terme de gauche de (20) avec celui de droite. Nous pouvons ainsi remarquer que le travail Arlequin s'annule sur tous les pas de temps.

Les résultats dans le cas du raccord barre-barre sont obtenus pour deux configurations, la première avec deux maillages compatibles, et la seconde avec deux maillages incompatibles. Nous obtenons pour les deux cas des résultats satisfaisants, mais dans la deuxième simulation l'ordre de grandeur du travail Arlequin est légèrement supérieur à celui obtenu dans le cas de maillages compatibles.





**Figure 4 : Bilan d'énergie d'une intégration multi-schémas dans le cas du raccord Arlequin**

D'autres aspects importants doivent être traités tel que le transfert des hautes fréquences entre les deux modèles dans le cas où les maillages sont incompatibles.

## 8 Conclusion

Nous proposons dans cet article un cadre rigoureux pour l'intégration mono-échelle / multi-schémas en temps pour le raccord de modèles 1D avec recouvrement. En effet, l'annulation du travail des efforts de collage Arlequin à l'interface permet d'obtenir un bilan d'énergies équilibré.

Nous avons appliqué la même démarche dans le cas du raccord 2D-1D et nous avons obtenu des résultats similaires à ceux présentés dans la (Figure 3). Une extension de cette étude au cas 3D-1D est envisagée dans le but de réaliser une application industrielle de type machines tournantes.

La prochaine étape concerne le couplage multi-échelles / mono-schéma et multi-échelles / multi-schémas en temps afin de pouvoir discrétiser les deux modèles à raccorder indépendamment l'un de l'autre. Le but final est de proposer un cadre permettant l'utilisation de schémas d'intégration en temps différents avec des échelles de temps différentes dans un contexte de raccord spatial avec recouvrement basé sur la méthode Arlequin.

Enfin, des résultats basés sur des cas tests plus élaborés seront présentés lors de la conférence.

## Références

- [1] H. Ben Dhia, G. Rateau, *The Arlequin method as flexible engineering design tool*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 62:1442-1462, 2005
- [2] P. Aubertin, J. Rethoré and R. Borst, *Energy conservation of atomistic/continuum coupling*, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 78:1365-1386, 2009
- [3] G. Rateau, *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles*. Thèse, 2003
- [4] T. N. Baranger and S. Andrieux, *Energy methods for Cauchy problems of evolutions equations*, *Journal of Physics: Conference Series 135 - 012007* doi:10.1088/1742-6596/135/1/012007. IOP Publishing, 2008
- [5] M. Bonnet and A. Frangi, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments fini*. 2006.
- [6] N.M. Newmark, *A method of computation for structural dynamics*. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, 85: 67-94, 1959
- [7] S. Krenk, *Energy conservation in Newmark based time integration algorithms*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6110-6124, 2006
- [8] C. Zammali, *Contribution à la modélisation en mécanique et dynamique des structures sous contact*. Thèse, 2005
- [9] N. Mahjoubi. *A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with incompatible time steps in structural dynamics*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:1069-1086, 2011.
- [10] A. Combescure and A. Gravouil. *A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analyses*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1129-1157, 2002.