

# Critères de convergence en mécanique des solides

P. Badel<sup>1</sup>, E. Lorentz<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EDF R&D, Pierre.Badel@edf.fr

<sup>2</sup> LaMSID, CNRS – EDF R&D, Eric.Lorentz@edf.fr

---

**Résumé** — On s'intéresse ici à la pertinence des critères de convergence utilisés lors des résolutions itératives de problèmes discrétisés par éléments finis. On propose une définition d'un vecteur de référence qui permet d'estimer si le résidu nodal est ou non petit. Elle remédie à plusieurs difficultés : agrégation de grandeurs physiques différentes, accès discriminant aux déséquilibres locaux, dépendance à la taille de maille, contrôle intuitif et maîtrisé par le modélisateur. Son intérêt est illustré dans le cas d'un problème élasto-plastique de référence.

**Mots clefs** — Éléments finis, critères de convergence.

---

## 1 Problématique

La résolution des problèmes de mécanique des solides s'appuie fréquemment sur une discrétisation spatiale par éléments finis formulée en déplacement. Il s'agit alors de résoudre une forme discrétisée des équations d'équilibre. Lorsque le système correspondant est résolu de manière itérative, l'algorithme prend fin quand un ou plusieurs critères permettent d'en décréter la convergence. On revient ici sur cette notion de critère de convergence, essentielle à la qualité de la simulation.

Une solution simple consiste à mesurer l'écart entre deux itérés successifs [1,2], mais ce n'est pas une garantie de convergence. Mieux vaut revenir sur le système à résoudre lui-même, i.e. l'égalité d'un résidu nodal à zéro, ce résidu s'exprimant comme l'écart entre forces internes et forces externes. La convergence numérique est atteinte dès que ce résidu est devenu « petit ». L'usage courant consiste à définir une norme du résidu qu'on compare soit à une référence absolue, soit à la même norme des efforts extérieurs. Avec deux questions : le choix de la norme et celui de la référence.

## 2 Force de référence nodale

Concernant la définition d'une norme du résidu, elle se heurte à plusieurs difficultés. Tout d'abord, les composantes peuvent représenter des quantités différentes dont l'agglomération au sein d'une norme unique est délicate : citons les éléments de structure, par exemple les coques pour lesquelles le résidu agrège des forces et des moments, ou encore les différentes variétés d'éléments mixtes, par exemple les éléments « incompressibles » U/P pour lesquels le résidu comprend des forces et des volumes. Une seconde difficulté a trait au fait que les composantes du résidu nodal sont d'autant plus petites que les éléments finis contributeurs sont eux-mêmes petits. Pour s'en convaincre intuitivement, il suffit de considérer le calcul d'une résultante sur une surface : plus la discrétisation est fine, plus le nombre de nœuds qui contribuent à l'estimation de la résultante par sommation est grand et plus chaque composante du vecteur nodal est donc petite. Il s'agit là d'une dépendance du résidu à la taille de maille. Des normes intégrales (ré-interpolation des champs et intégration volumique sur le domaine) permettent de lever partiellement ces difficultés. Mais elles atténuent l'information locales et peuvent conduire à déclarer convergé un calcul qui ne le serait pas partout. C'est vrai aussi de la norme dite « en énergie » dont par ailleurs le calcul n'est apparemment possible que dans certaines configurations (schéma de Newton, matrice tangente définie positive). C'est pourquoi on propose d'abandonner l'idée d'une norme globale du résidu pour lui préférer une comparaison avec un vecteur nodal de référence (et non plus une valeur de référence unique).

Reste à définir ce vecteur nodal de référence, de sorte que chaque composante du résidu doive être petite (en absolu) par rapport à la même composante du vecteur de référence, le caractère « petit » étant décidé de la même manière pour toutes les composantes (exemple : petit = 1.E-3). Compte tenu de la dépendance à la taille de maille mentionnée précédemment, le vecteur de référence ne peut pas être calculé sur la base de quantités qui ne seraient exprimées qu'en certaines zones de la structure : il

en va ainsi par exemple du vecteur nodal des forces extérieures qui ne constitue donc pas un bon candidat pour l'évaluation d'un vecteur de référence. A cet égard, les forces intérieures à la première itération offrent des caractéristiques plus intéressantes, mais avec l'inconvénient d'une mesure de la qualité de la solution non pas absolue mais tributaire de la qualité de la première estimation dans le processus itératif, non maîtrisée. On recommande ici une construction différente du vecteur de référence, fondée sur la donnée de grandeurs intuitives fournies par le modélisateur. Sa formulation précise sera fournie lors de la présentation orale mais on peut dès à présent en exposer l'idée générale. Les forces internes nodales sont traditionnellement calculées sur la base des contraintes calculées dans l'élément, des fonctions de forme, des poids d'intégration et d'une opération d'assemblage. En fournissant un niveau de contrainte de référence (par exemple la limite d'élasticité dans un calcul élasto-plastique), on peut alors construire un vecteur de référence de manière similaire (à quelques détails près, en particulier les opérations de sommation devront être effectuées sur des quantités en valeur absolue pour éviter les compensations entre éléments voisins). Une telle construction reste par ailleurs facile à développer dans un code de calcul et se généralise à toutes les formulations, voir [3] pour une implantation. Ainsi dans le cas d'une coque, l'épaisseur participera à la construction du vecteur de référence, fournissant à la fois les informations relatives aux forces et aux moments.

### 3 Illustration

A titre d'illustration, on considère le cas d'une sphère creuse élasto-plastique soumise à une force surfacique de traction sur sa surface extérieure, modélisée par une tranche (grâce à la symétrie axiale) et pour laquelle on dispose d'une solution de référence analytique. On envisage une suite de maillages raffinés sur le bord intérieur de la sphère, dans la zone où se produit la plastification, cf. figure 1 pour une image du type de maillage utilisé. On compare sur la figure 2 l'erreur relative commise sur la déformation plastique (par rapport à la référence analytique) en fonction de la taille des mailles sur le bord intérieur de la sphère, avec une convergence décrétée sur la base d'une comparaison avec la norme des efforts extérieurs (« relative residual ») ou sur la base du critère proposé (« stress reference »), pour deux niveaux de précisions (1E-5 et 1E-7 pour la norme des efforts extérieurs ; 1E-1 et 1E-3 pour le critère proposé). On constate que l'utilisation d'une comparaison avec la norme des efforts extérieurs mène à une erreur qui augmente avec la finesse du maillage, car la précision exigée par le critère de convergence diminue avec la taille de maille. En revanche, l'utilisation du critère proposé mène à une erreur proprement contrôlée par ce critère, i.e. l'erreur diminue avec la taille de maille quand l'erreur est dominée par l'erreur de discrétisation spatiale et reste constante quand l'erreur est dominée par l'erreur de convergence du schéma itératif.

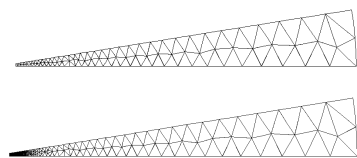


Fig. 1 – Types de maillages

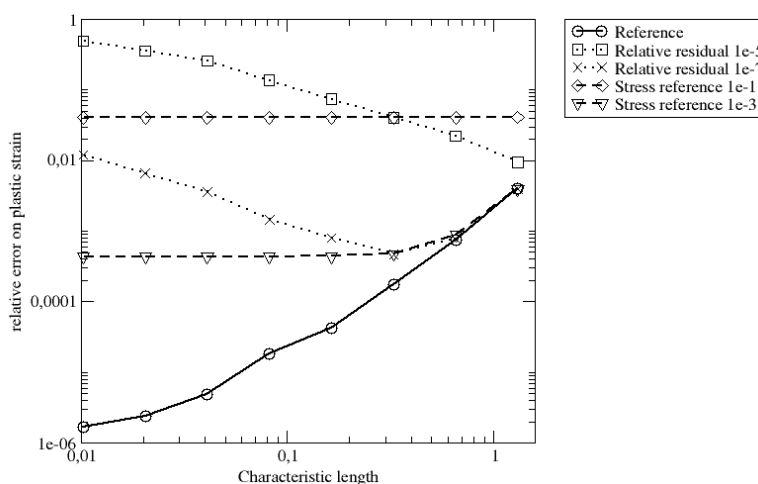


Fig. 2 – Erreur commise sur la déformation plastique

### Références

- [1] *ABAQUS analysis user's manual v6.4, chapitre 8 (2003).*
- [2] *ANSYS theory reference v5.6, onzième édition, chapitre 15 (1999).*
- [3] *CODE\_ASTER, EDF code éléments finis open source, disponible sur [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org).*