HAL open science

Critères de convergence en mécanique des solides

Pierre Badel, Eric Lorentz

To cite this version:

Pierre Badel, Eric Lorentz. Critères de convergence en mécanique des solides. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592774

HAL Id: hal-00592774

https://hal.science/hal-00592774v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Critères de convergence en mécanique des solides

P.-B. Badel[1], E. Lorentz[1,2]

[1] *EDF R&D, France, pierre.badel@edf.fr*
[2] *LaMSID, unité mixte de recherche 2832 CNRS/EDF, France, eric.lorentz@edf.fr*

Résumé — La méthode des éléments finis formulée en déplacement nécessite un critère de convergence lorsqu'elle est employée en mécanique non linéaire avec des algorithmes de résolution itératifs. Ce critère de convergence vise à mesurer la proximité du champ de contrainte obtenu avec l'équilibre. Les critères usuels ne fournissent pas une mesure objective de la distance à l'équilibre : la taille des mailles et les dimensions physiques qui composent le résidu influe sur la valeur du critère. Un nouveau critère est proposé qui répond à cette double critique.
Mots clefs — méthode éléments finis, critère de convergence, Code_Aster.

1 Introduction

En mécanique des solides, l'ensemble des équations à résoudre est composé des conditions de compatibilités, des lois de comportement et des équations d'équilibre. Ces dernières peuvent s'écrire sous forme variationnelle, ce qui constitue le point de départ de la méthode des éléments finis. Après discrétisation en temps et en espace, les équations à résoudre à un instant donné constitue un problème de recherche de zéro multidimensionnel, sous contrainte et potentiellement non linéaire. Les inconnues sont les degrés de liberté, Cf. par exemple [4] :

$$\text{trouver } \tilde{\mathbf{U}} \in KA \quad / \quad \mathbf{F}^{\text{int}}\left(\tilde{\mathbf{U}}\right) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \tag{1}$$

où $\tilde{\mathbf{U}}$ est une solution du problème discrétisé, KA est l'ensemble des degrés de liberté statiquement admissible, $\mathbf{F}^{\text{int}}$ et $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sont respectivement le vecteur nodal de forces internes et externes. Les contraintes résultent des conditions aux limites de Dirichlet ou de contraintes cinématiques internes (contact par exemple), tandis que les non linéarités des forces internes proviennent de la cinématique envisagée (grandes déformations par exemple) ou du comportement du matériau (plasticité par exemple). Dès lors qu'un schéma numérique itératif est utilisé pour résoudre ce système, la question se pose de quantifier la satisfaction numérique de l'égalité (1) : un critère de convergence devient nécessaire. Pour cela, comme mentionné dans [3], un critère de convergence pertinent doit nécessairement mesurer l'erreur commise sur (1). Il faut noter qu'une autre famille de critères peut être utilisé dans certains codes de calcul éléments finis [1-2] : elle s'appuie sur la différence en déplacement $\delta\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n$ entre deux approximations de la solution obtenues lors de deux itérations successives du schéma. Si cette famille de critères peut bien entendu compléter un critère fondé sur le résidu, elle ne peut en aucun cas s'y substituer (il suffit de considérer la suite $u_n = \log n$ qui ne converge pas, alors que l'incrément δu_n tend vers zéro).

Le critère de convergence le plus simple est obtenu en imposant que la norme du vecteur résidu soit petite, le caractère « petit » étant contrôlé par un paramètre scalaire ε en absolu ou $\bar{\varepsilon}$ en relatif :

$$\text{absolu :} \quad \left\|\mathbf{F}^{\text{int}}\left(\mathbf{U}_n\right) - \mathbf{F}^{\text{ext}}\right\| \le \varepsilon \tag{2}$$

$$\text{relatif :} \quad \left\|\mathbf{F}^{\text{int}}\left(\mathbf{U}_n\right) - \mathbf{F}^{\text{ext}}\right\| \le \bar{\varepsilon}\left\|\mathbf{F}^{\text{ext}}\right\| \tag{3}$$

Ce critère dépend explicitement de la norme choisie et si toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, cela n'a que peu d'intérêt pratique dans un contexte numérique.

Une première difficulté réside dans le fait que le vecteur résidu peut être composé de plusieurs parties, qui peuvent chacune avoir leur dimension physique. Par exemple, l'utilisation d'éléments de coques mène à un vecteur résidu composé de forces et de moments. Par suite, la norme l-infini (maximum des valeurs absolues de chacune des composantes) ne doit pas être appliquée sur le vecteur entier, bien que ce soit le choix classiquement retenu dans les logiciels éléments finis.

Par ailleurs, les paramètres ε ou $\bar{\varepsilon}$ ne permette pas une maîtrise objective de la bonne résolution de l'équation d'équilibre, car l'amplitude des composantes du vecteur dépend de la taille des mailles (et donc du raffinement du maillage). En effet la contribution du e-ième élément fini à la i-ième composante du vecteur de force interne s'écrit :

$$F_i^{\text{int},e}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_e^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\sigma}\right)_i \,\mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le champ de contraintes, Ω_e et $\mathbf{B}_e$ représente respectivement le domaine et la matrice des dérivées de fonction de forme dans l'élément e. Si l'on introduit une longueur caractéristique l_e de l'élément e, il vient que $\mathbf{B}_e \propto l_e^{-1}$ et $\Omega_e \propto l_e^{2}$ (resp. $\Omega_e \propto l_e^{3}$) en 2D (resp. 3D) et ainsi $F_i^{\text{int},e} \propto l_e$ (resp. $F_i^{\text{int},e} \propto l_e^{2}$). Par conséquent, à champ de contraintes donné, plus l'élément est petit, plus sa contribution au vecteur de force interne sera petite… ce qui entraîne que le critère de convergence (2) sera plus facilement satisfait avec de petits éléments finis qu'avec de grands éléments finis, et ceci indépendamment de la qualité de la solution. La même conclusion s'applique au critère (3) dès lors que le maillage est raffiné dans des zones où aucune force externe ne s'applique : dans ce cas, $\left\|\mathbf{F}^{\text{ext}}\right\|$ ne prend pas en compte l'effet de taille d'éléments.

Le but de cet article est de proposer un nouveau critère de convergence qui surmonte les deux difficultés mentionnées : l'agrégation de composantes de nature physique différente dans le vecteur résidu et l'objectivité du critère par rapport à la taille de maille. Le critère est présenté dans la section suivante, un benchmark numérique à la section 3 sera l'occasion de souligner les qualités de ce nouveau critère.

2 Un nouveau critère fondé sur un vecteur de référence nodal

Un nouveau critère de convergence, qui respecte les propriétés suivantes est proposé :

- une force de référence est construite pour chaque degré de liberté à partir d'un paramètre unique avec une signification physique claire ;
- la précision du critère de convergence est contrôlée par un (petit) paramètre adimensionnel ;
- la précision du critère ne dépend pas de la taille de maille.

Le point central du critère est la définition d'un vecteur de force de référence $\mathbf{F}^{\text{ref}}$. La i-ème composante du vecteur résidu $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{ext}$ est alors comparée à la i-ème composante du vecteur force de référence :

$$\forall\, i \in \left\{1, 2, \ldots, N_{dof}\right\} \qquad \left|R_i\right| \le \bar{\varepsilon}\, F_i^{\text{ref}} \tag{5}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la valeur adimensionnelle qui contrôle la précision. Pour calculer le vecteur force de référence, nous proposons d'introduire une contrainte de référence pour deux raisons. D'une part, l'amplitude des contraintes est facilement reliée au paramètre matériau : par exemple en plasticité, la contrainte seuil peut être adoptée comme contrainte de référence. D'autre part, le champ de contrainte est l'ingrédient fondamental pour calculer le vecteur force interne pour une large classe d'éléments.

Nous ne considérons ici que la classe des forces internes qui s'écrivent, pour un certain champ de contrainte :

$$\begin{aligned} & F_i^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{e \in \Gamma_i} F_i^{\text{int},e}(\boldsymbol{\sigma}) \\ & \text{avec} \quad F_i^{\text{int},e}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{g=1}^{N_G(e)} \sum_{j=1}^{N_\sigma(e)} \omega^g \, B_{i,j}^g \left\{\sigma^g\right\}_j \end{aligned} \tag{6}$$

où Γ_i est l'ensemble des éléments qui contribuent au i-ème degré de liberté. Une quadrature de Gauss a été adoptée, en notant $N_G(e)$ le nombre de points de Gauss du e-ième élément et l'exposant g signifiant une évaluation au g-ième point de Gauss. ω^g est le poids du point de Gauss, $\mathbf{B}^g$ est la matrice des dérivées des fonctions de forme et $\left\{\sigma^g\right\}$ est l'ensemble des $N_\sigma(e)$ composantes des contraintes, écrites sous forme vectorielle.

Le vecteur force de référence $\mathbf{F}^{\text{ref}}$ est alors construit par la procédure suivante à partir de la contrainte de référence σ^{ref}. Pour expliquer la procédure, on introduit $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ correspondant à la solution parfaitement convergée :

$$\forall\, i \in \left\{1, 2, \ldots, N_{dof}\right\} \qquad F_i^{\text{int}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = F_i^{\text{ext}} \tag{7}$$

Pour un certain point de Gauss g et une certaine composante j, on peut définir un nouveau champ de contraintes (non équilibré) $\boldsymbol{\sigma}_j$ en perturbant l'amplitude de la j-ième composante du champ de contrainte solution $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (δ_{jk} étant le symbole de Kronecker) :

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \sigma^{\text{ref}} \mathbf{P}_j \qquad \text{avec} \quad \left\{P_j\right\}_k = \delta_{jk} \tag{8}$$

La composante F_i^{ref} du vecteur force de référence est construite pour être une estimation grossière du vecteur résidu calculé à partir de cette perturbation :

$$F_i^{\text{ref}} \approx \left| R_i(\boldsymbol{\sigma}) \right| \tag{9}$$

Plus précisément, en utilisant la linéarité de $\mathbf{F}^{\text{int}}$ par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$ et (7) :

$$\begin{aligned} R_i(\boldsymbol{\sigma}_j) &= F_i^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}_j) - F_i^{\text{ext}} \\ &= F_i^{\text{int}}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \sigma^{\text{ref}} \mathbf{P}_j\right) - F_i^{\text{ext}} \\ &= F_i^{\text{int}}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + F_i^{\text{int}}\left(\sigma^{\text{ref}} \mathbf{P}_j\right) - F_i^{\text{ext}} \\ &= F_i^{\text{int}}\left(\sigma^{\text{ref}} \mathbf{P}_j\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Nous choisissons d'exprimer $\mathbf{F}^{\text{ref}}$ sous la forme :

$$F_{i(j)}^{\text{ref}} = \left| F_i^{\text{int}}\left(\sigma^{\text{ref}} \mathbf{P}_j\right) \right| \tag{11}$$

Ainsi, si le critère (5) est satisfait, il est permis d'espérer que l'amplitude de la différence entre le champ de contrainte trouvé et le champ de contraintes à l'équilibre soit de l'ordre de $\bar{\varepsilon}\, \sigma^{\text{ref}}$.

Remarques

Bien entendu, ce dernier résultat ne peut être quantitativement exact, car des différences locales entre champ de contraintes peuvent s'annuler entre elles au niveau nodal. Un choix qui permet plus ou

moins l'obtention de la propriété est donné par :

$$
\begin{aligned}
F_i^{\mathrm{ref}} &= \min_{e \in \Gamma_i} F_i^{\mathrm{ref},e} \\
\text{avec} \quad F_i^{\mathrm{ref},e} &= \frac{\sigma^{ref}}{N_G(e)} \sum_{g=1}^{N_G(e)} \sum_{j=1}^{N_\sigma(e)} \omega_g \left| B_{i,k}^g \, P_k^j \right| \\
&= \frac{\sigma^{ref}}{N_G(e)} \sum_{g=1}^{N_G(e)} \sum_{j=1}^{N_\sigma(e)} \omega_g \left| B_{i,j}^g \right|
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$\bar{\varepsilon}$ est uniquement un facteur d'échelle ; la linéarité de $\mathbf{F}^{\mathrm{int}}$ assure qu'une perturbation de contrainte $\bar{\varepsilon}\,\sigma^{\mathrm{ref}}$ et un facteur d'échelle de 1 ou une perturbation de contrainte σ^{ref} et un facteur d'échelle $\bar{\varepsilon}$ mène au même résultat ; des considérations pratiques nous ont amené à définir deux quantités, la contrainte de référence et un facteur d'échelle, même si seul le produit des deux est significatif.

L'expression (12) a été implantée dans le code éléments finis Code_Aster (5), sans soulever de difficulté particulière. Des développements sont nécessaires à deux niveaux : le calcul des contributions élémentaires $F_i^{\mathrm{ref},e}$ (qui ressemble fortement au calcul des contributions aux efforts intérieurs) et l'assemblage du vecteur force de référence (similaire à l'assemblage classique, en remplaçant la somme par l'opérateur « min »).

3 Application numérique

Cette section a pour but d'illustrer le caractère objectif par rapport à la taille de maille du nouveau critère de convergence et à le comparer au critère classique (3). Une sphère creuse élastoplastique de rayon interne $r_i = 10\,\mathrm{mm}$ et de rayon externe $r_e = 100\,\mathrm{mm}$ est soumise à une pression externe $P = 700\,\mathrm{MPa}$, Cf. figure 1. Le comportement adopté suit une loi de von Mises, avec un écrouissage isotrope linéaire. Les paramètres matériaux sont le module d'Young $E = 200\,000\,\mathrm{MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, la contrainte seuil $\sigma_Y = 450\,\mathrm{MPa}$ et la module d'écrouissage $H = 22\,\mathrm{MPa}$.

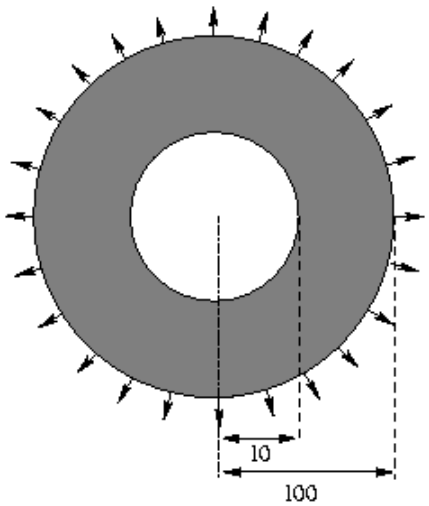

Fig. 1 – SPHERE CREUSE SOUMISE A UNE PRESSION EXTERNE

3.1 Solution analytique

La solution analytique pour une sphère creuse élastoplastique soumise à une pression externe est résumée ci-dessous pour ce qui concerne la distribution spatiale du champ de contrainte radiale et du champ de déformation plastique cumulée, Cf. (3) pour les détails concernant cette solution :

- il existe une pression critique P_Y en-dessous de laquelle la réponse de la sphère est purement élastique :

$$P_Y = \frac{2}{3}\sigma_Y \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^3 \right] \tag{13}$$

- au-delà de cette pression critique, le phénomène de plasticité se développe à l'intérieur d'une couche $r \le r_Y$ tandis que le reste de la sphère reste élastique. Le rayon critique dépendant de la pression externe appliquée est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{P}{\sigma_Y} = \frac{2C}{3} + 2C \ln\left(\frac{r_Y}{r_i} \right) + \frac{2}{3} r_Y{}^3 \left(\frac{1-C}{r_i^3} - \frac{1}{r_e^3} \right) \\ &\text{avec} \quad C = \frac{E}{2(1-\nu)H + E} \end{aligned} \tag{14}$$

- à l'intérieur de la couche plastique, la contrainte radiale et la déformation plastique cumulée s'écrivent :

$$r_i \le r \le r_Y \begin{cases} \tilde{\sigma}(r) = \frac{2}{3}(1-C)\sigma_Y r_Y^3 \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_i^3} \right] \\ \qquad\qquad -2C\sigma_Y \ln\left(\frac{r}{r_i} \right) \\ \tilde{p}(r) = \frac{\sigma_Y}{H}(1-C)\left[\left(\frac{r_Y}{r} \right)^3 - 1 \right] \end{cases} \tag{15}$$

- pour ce qui concerne la partie élastique, la contrainte radiale s'écrit :

$$\tilde{\sigma}(r) = -P + \frac{2}{3}\sigma_Y r_Y^3 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_e^3} \right) \qquad \text{pour} \quad r_Y < r \le r_e \tag{16}$$

3.2 Simulations numériques

Grâce à la symétrie sphérique du problème, seule une tranche de la sphère est modélisée en utilisant des éléments finis 2D axisymétriques. Pour illustrer l'effet de taille, plusieurs maillages ont été réalisés, Cf. figure 2. Ils sont caractérisés par la taille de leur plus petit élément. Plus précisément, tous les maillages partagent la même taille d'éléments sur la face externe, tandis qu'un raffinement est opéré sur la face interne. Les efforts sont appliqués sur la face externe, de telle sorte que tous les vecteurs d'efforts extérieurs $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ sont les mêmes pour tous les maillages ; il en est donc de même pour leur norme $\left\| \mathbf{F}^{\text{ext}} \right\|$ qui sert de quantité de référence pour le critère de convergence relatif classique (3). En revanche, les efforts non équilibrés sont attendus dans la zone plastique $r \le r_Y$ (ou à la périphérie de cette zone) lors du processus itératif. Ainsi, l'amplitude des efforts non équilibrés sera dépendante du maillage, car dépendante de la taille de maille.

La pression extérieure est appliquée en deux incréments jusqu'à 700 MPa, qui mène à un rayon de la zone plastique de $r_Y = 14.85\,\text{mm}$. Le schéma itératif adopté est une méthode de Newton avec matrice élastique, de sorte que la convergence ne soit pas obtenue dès la première itération. En effet, l'utilisation d'un opérateur tangent consistant aurait mené à la convergence dès la première itération.

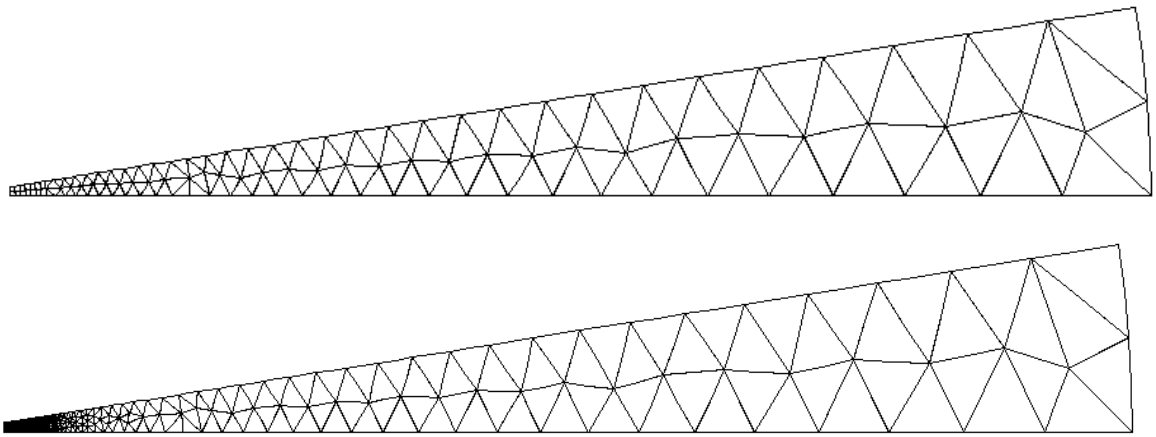

Fig.2 – MAILLAGE DE LA SPHERE CREUSE (SYMETRIE SPHERIQUE), (A) TAILLE CARACTERISTIQUE 1. ; (B) TAILLE CARACTERISTIQUE 0.1

Quarante calculs ont permis de mesurer la précision de la solution numérique en fonction ;

- de la taille caractéristique du maillage (8 maillages entre 0.01mm et 1mm) ;
- du critère de convergence mis en œuvre : $\overline{\varepsilon} = 10^{-5}$ (a) et $\overline{\varepsilon} = 10^{-7}$ (b) pour le critère (3), $\overline{\varepsilon} = 10^{-1}$ (c) et $\overline{\varepsilon} = 10^{-3}$ (d) pour le critère proposé et enfin, une très petite valeur $\overline{\varepsilon} = 10^{-12}$ (e) pour le critère (3), que l'on considère comme un calcul de référence pour estimer l'erreur due à la discrétisation spatiale uniquement, comme expliqué ci-dessous.

Deux erreurs sont considérées, l'une relative au champ de contrainte radiale, l'autre au champ de déformation plastique cumulée. Elles mesurent l'écart entre la solution exacte donnée dans la section précédente et la solution numérique obtenue, sous la forme :

$$e_\sigma = \frac{\int_{r_i}^{r_e} \left(\sigma(r) - \tilde{\sigma}(r)\right)^2 r\,dr}{\int_{r_i}^{r_e} \tilde{\sigma}(r)^2\, r\,dr} ; e_p = \frac{\int_{r_i}^{r_e} \left(p(r) - \tilde{p}(r)\right)^2 r\,dr}{\int_{r_i}^{r_e} \tilde{p}(r)^2\, r\,dr} \quad (17)$$

Les résultats sont présentés sur les figures 3 et 4 sous la forme d'erreur fonction de la longueur caractéristique du maillage.

3.3 Discussion

Deux contributions à l'erreur (17) sont observées. La première contribution est constituée de l'erreur relative au seuil de convergence : plus ce dernier est petit, plus l'erreur est faible, à taille de maille fixée. Ceci est vrai pour les deux critères. La seconde contribution est constituée par l'erreur de discrétisation spatiale : si la convergence était parfaite (solution discrétisée exacte pour un maillage donné), cette erreur devrait décroître avec le raffinement de maillage. C'est d'ailleurs ce qui est observé sur la courbe de référence (e), pour laquelle la convergence est obtenue de façon extrêmement précise : sur cette courbe, seule l'erreur de discrétisation spatiale est visible.

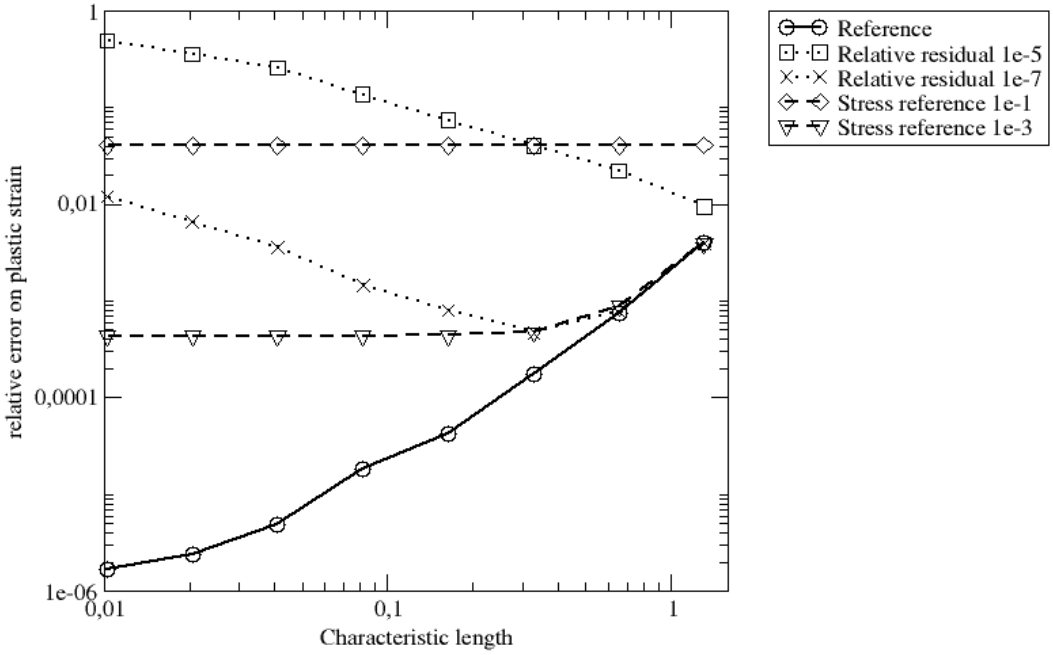

Fig.3 – ERREUR SUR LA CONTRAINTE RADIALE

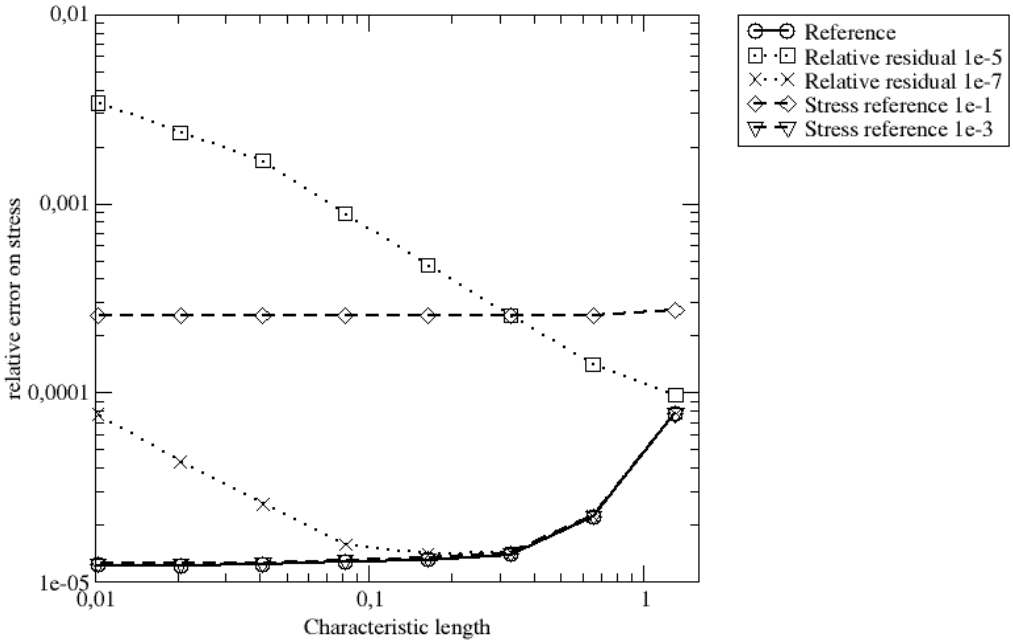

Fig.4 – ERREUR SUR LA DEFORMATION PLASTIQUE CUMULEE

Un couplage entre le raffinement du maillage et la qualité de convergence peut apparaître pour des valeurs de critères utilisés en pratique, comme mentionné en introduction. Concernant cet aspect, l'erreur mesurée sur la contrainte radiale et la déformation plastique cumulée présentent les mêmes tendances, avec des résultats amplifiés pour l'erreur portant sur la déformation plastique cumulée.

La comparaison entre la courbe de référence (e) et les autres (a-d) montre que pour des maillages grossiers, l'erreur de discrétisation spatiale est prépondérante et masque l'erreur de convergence,

quelque soit le critère de convergence utilisé ; en revanche, à mesure que le maillage est raffiné, l'erreur de convergence devient prédominante.

Les courbes (a) et (b) correspondant au critère de convergence classique (3) exhibe un comportement paradoxal à première vue, pour les maillages où l'erreur sur la convergence est dominante : plus les éléments sont petits, plus l'erreur est grande ! Ceci constitue exactement la dépendance au maillage soulignée dans cet article. Pour de petits éléments, l'erreur de discrétisation spatiale décroît, tandis que le critère de convergence devient de plus en plus lâche, de telle sorte que des solutions de plus en plus mal convergées sont acceptées, très éloignées de la solution exacte. Il convient de souligner que le même effet aurait été observé avec le critère absolu (2), car la quantité de référence $\left\|\mathbf{F}^{\text{ext}}\right\|$ ne dépend pas du maillage dans les conditions de cette expérimentation numérique.

Les courbes (c) et (d) correspondant au nouveau critère exhibe un premier régime où l'erreur décroît avec le raffinement du maillage, grâce à la diminution de l'erreur de discrétisation spatiale (coïncidence avec la courbe de référence (e)). Par la suite, dans un deuxième régime, l'erreur reste constante : l'erreur est en effet due à l'erreur de convergence qui est contrôlée par le paramètre de convergence (lui-même constant). L'objectif d'obtenir un critère de convergence indépendant de la taille de maille est donc bien obtenu avec le critère proposé dans cet article.

4 Conclusion

Un nouveau critère de convergence a été proposé et implantée dans un code éléments finis, sans poser de difficultés particulières. Le critère repose sur une contrainte de référence qui peut être reliée à des paramètres matériaux, cette contrainte de référence permet de calculer un vecteur d'effort de référence nodal. Il permet de prendre en compte des composantes de résidus de nature physique différente. De plus, il est plus robuste que les critères usuels fondés sur la norme du résidu, dès lors que la taille de maille n'est plus homogène, ce qui est le cas lors d'adaptations de maillage.

Afin de rester brève, la présentation à été dédiée à la mécanique des milieux continus, sous l'hypothèse de petites déformations et d'éléments finis classiques. Mais le spectre d'application du critère de convergence proposé est bien plus large : son extension aux grandes déformations, aux éléments finis mixtes, aux coques, aux poutres et aux phénomènes multiphysiques (thermo-mécanique, thermo-hydro-mécanique par exemple) fera l'objet de publications futures.

Références

[1] ABAQUS analysis user's manual, v6.4, chapter 8, 2003.

[2] *ANSYS theory reference v5.6*, eleventh edition, chapter 15, 1999.

[3] P. Badel, L. Lambourdière and G. Debruyne. *Sphère creuse élastoplastique sous pression*, EDF Internal Report, CR-AMA, 2004.

[4] T. Belytschko, W.K. Liu and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*, eds. John Wiley & Sons, 2000.

[5] Code_Aster, EDF opensource (GPL) finite element software, available on www.code-aster.org

[6] M.A. Crisfield. *Non linear finite element analysis of solids and structures, vol. 1: Essentials*, eds. John Wiley & Sons, 1991.