

Sur le mystère de la solution linéarisée de Calderon pour détecter un défaut volumique

H.D. Bui

LMS/CNRS/Ecole Polytechnique ParisTech, 91128 Palaiseau,
LaMSID/CNRS/Electricité de France, Clamart et UME MS/ ENSTA ParisTech, Palaiseau

Dans un célèbre papier de 1980, A.P. Calderon [1] étudiait le problème inverse suivant. Il s'agit de déterminer la perturbation $h(\mathbf{x})$ de constante d'élasticité du matériau, satisfaisant aux équations

$$\operatorname{div}\{(1 + h(\mathbf{x})) \operatorname{grad} u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

$$u = f \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega. \quad (2)$$

L'équation (1) pour $h = 0$ correspond par exemple à l'équilibre d'un solide élastique en mode antiplan, de module de cisaillement normalisé à l'unité, et $u = u_3(x_1, x_2)$. Un défaut volumique peut être défini par une certaine fonction $h(\mathbf{x})$ de support compact, dont il s'agit de trouver par deux conditions aux limites Eqs. (2). Dans le cas général $h \neq 0$, le champ inconnu $u = u(\mathbf{x}; h)$ dépend implicitement de h si bien que le problème inverse est non linéaire en h . Calderon (1980) a donné la solution explicite du problème inverse linéarisé, en supposant la perturbation très petite, auquel cas la solution linéarisée $h^0(\mathbf{x})$ satisfait aux équations

$$\operatorname{div}\{(1 + h^0(\mathbf{x})) \operatorname{grad} u^0 = 0 \text{ in } \Omega, \quad (3)$$

où u^0 est harmonique, $\operatorname{div} \operatorname{grad} u^0 = 0$. En 1989, D. Isaacson et E. Isaacson [2] étudiaient le problème non linéaire pour le cas de géométrie et chargement axisymétriques. Ils obtenaient numériquement la solution non linéaire par une méthode de séries et comparaient leur solution avec la formule linéarisée de Calderon pour une inclusion circulaire dans un cercle. Pour h assez grand, il n'y a pas de raison que les deux solutions soient pareilles. Pourtant, les auteurs cités ont trouvé que les supports des deux solutions h^0 et h sont pratiquement les mêmes.

C'est ce mystère de la solution de Calderon que ce papier essaie de clarifier. Nous utilisons l'approche de la fonctionnelle d'écart de réciprocité introduite par Calderon, étendue ensuite par Andrieux et Ben Abda [3] et par les deux équipes de l'auteur à EDF et au LMS aux études des problèmes inverses de fissures et de défauts, en élasticité, statique ou dynamique, 2D ou 3D, en acoustique ou thermique, en thermoélasticité (voir la synthèse des résultats dans [4]) et viscoélasticité dynamique [5], [6]. On utilise un champ adjoint $\varphi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$, de paramètre vectoriel $\boldsymbol{\xi}$ pour écrire (1) et (2) sous la forme

$$\int_C h(\mathbf{x}) \text{grad } u(\mathbf{x}; h) \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) d^2x = \int_{\partial\Omega} (g \varphi - f \partial_n \varphi) dS := R(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\xi}. \quad (4)$$

Nous prenons la fonction adjointe de Calderon $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp(-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)) \exp(-x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1)$. Nous appelons \tilde{h} l'extension de h à l'infini en posant $\tilde{h} = 0$ en dehors de l'inclusion. Les intégrales sur C sont remplacées par les intégrales sur tout le plan. Nous pouvons montrer que (les $\mathbf{a}_{nmpq}^{hkr s}$ sont des vecteurs complexes, le point $(.)$ indique le produit scalaire)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{h,k,r,s=1}^2 \sum_{n,m,p,q=0}^{\infty} \mathbf{a}_{nmpq}^{hkr s} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_h^n} \frac{\partial^m}{\partial x_k^m} [x_r^p x_s^q \tilde{h}(\mathbf{x}) \text{grad } u(\mathbf{x})] \exp(-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) d^2x = R(\boldsymbol{\xi}). \quad (5)$$

Ainsi $R(\boldsymbol{\xi})$ est la transformée de Fourier de $F(\mathbf{x})$ définie par la double somme ci-dessus. Même si la fonction u demeure inconnue, le support de F est *exactement* celui de \tilde{h} ou de ses dérivées partielles. Il est déterminé par la fonction $R(\boldsymbol{\xi})$ connue par les données f, g . Qu'en est-il de la solution linéarisée? Calderon a trouvé que $\tilde{h}^0(\mathbf{x})$ est la transformée de Fourier inverse de $-2R(\boldsymbol{\xi})/\|\boldsymbol{\xi}\|^2$. Nous montrons qu'elle peut s'écrire:

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right] \tilde{h}^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} R(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) d^2\xi \equiv F(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Ainsi le support de F est aussi celui de \tilde{h}^0 . Nous avons élucidé le mystère soulevé par Isaacson et Isaacson [4]. Les supports sont identiques $\text{supp}(h) \equiv \text{supp}(h^0)$.

References

- [1] A. P. Calderon. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on numerical and applications to continuum physics*. W.H. Meyer and M. A. Raupp (Eds.) Brazilian Math. Soc. Rio de Janeiro, (1980) 65-73.
- [2] D. Isaacson and E.L. Isaacson. Comment on Calderon's Paper: On an Inverse Boundary Value Problem. *Math. of Computation* **52**, N186 (1989) 553-559.
- [3] S. Andrieux. and A. Ben Abda. Identification de fissures planes par une donnée de bord unique: un procédé direct de location et d'identification. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **315** (I) (1992), 1323-1328.
- [4] H.D. Bui. *Fracture Mechanics. Inverse problems and solutions*, Springer, (2006).
- [5] H.D. Bui, S. Chaillat, A. Constantinescu and E. Grasso. Identification of defects in viscoelasticity, *Annals Solid Struct. Mech.* **1**, 1, (2009), 3-8.
- [6] H.D. Bui and S. Chaillat. On a nonlinear inverse problem in viscoelasticity. *V.J.M.* **3,4**, (2009) 211-219.