



**HAL**  
open science

## Un couplage fluide-fluide de type Boussinesq-SPH pour des calculs à proximité de structures hydroliennes

Christophe Kassiotis, Benedict D. Rogers, Peter K. Stansby, Damien Violeau, Michel Benoit

► **To cite this version:**

Christophe Kassiotis, Benedict D. Rogers, Peter K. Stansby, Damien Violeau, Michel Benoit. Un couplage fluide-fluide de type Boussinesq-SPH pour des calculs à proximité de structures hydroliennes. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.7. hal-00592740

**HAL Id: hal-00592740**

**<https://hal.science/hal-00592740>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un couplage fluide–fluide de type Boussinesq–SPH pour des calculs à proximité de structures hydroliennes

C. Kassiotis<sup>1</sup>, B. D. Rogers<sup>2</sup>, P. K. Stansby<sup>2</sup>, D. Violeau<sup>1</sup>, M. Benoit<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire d'Hydraulique Saint-Venant, Université Paris-Est (Unité de recherche commune EDF R&D, CETMEF, École des Ponts ParisTech) christophe.kassiotis@enpc.fr, {damien.violeau, michel.benoit}@edf.fr*

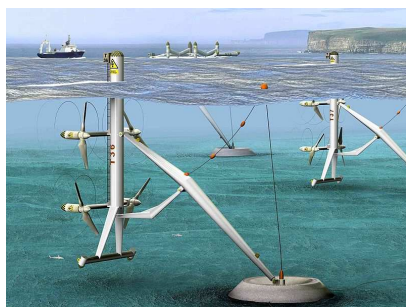
<sup>2</sup> *School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, University of Manchester, United-Kingdom {benedict.rogers, p.k.stansby}@manchester.ac.uk*

**Résumé** — Au cours de notre exposé, nous présenterons une stratégie de couplage pour des problèmes d'écoulements à surface libre. L'objectif est ici, par exemple, de prendre en compte la propagation de vagues sur des distances moyennes à grandes, et leur déferlement sur les côtes à une échelle plus réduite.

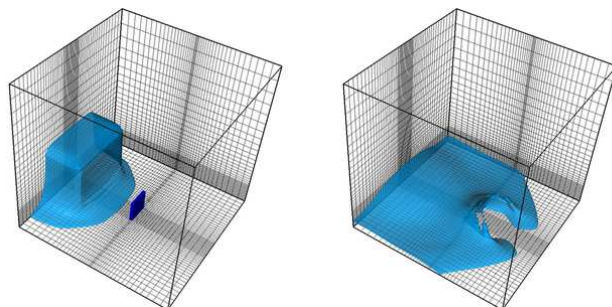
**Mots clés** — Couplage de code, Fluide, Hydraulique, Surface libre, Boussinesq, SPH

## Introduction

La modélisation des fluides environnementaux (rivières, courants marins, vagues océaniques. . .) trouve ses applications dans des domaines tels que la gestion des risques ou la production d'énergies vertes (voir FIGURE 1(a)). Par exemple, pour des systèmes houlomoteurs ou hydroliens de production d'énergie [1], on doit étudier l'interaction entre un fluide à surface libre et un corps déformable [2, 3] (voir FIGURE 1(b)), mais aussi les champs marins sur de grande distance et à proximité des côtes ou des systèmes de production d'énergie.



(a) Hydroliennes



(b) Structure impactée par une colonne d'eau [3]

FIGURE 1 – Exemples d'interaction entre une structure et un fluide à surface libre.

Le coût élevé des méthodes permettant de traitement des surfaces libres complexes a proximité des côtes ou des structures (par exemple *Smoothed-Particle Hydrodynamics* (SPH) [4, 5], ou *Volume-Of-Fluid* (VOF) [6, 7]), rend impossible, à l'heure actuelle, les calculs sur de grandes échelles. De plus, dans un contexte industriel comme celui de EDF R&D, il y a une volonté de réutiliser les codes existants, déjà validé et testé dans leur domaine d'application rend attractive l'idée de coupler des codes de vagues et des méthodes permettant la modélisation des surfaces libres complexes.

Dans cet exposé, nous présenterons une approche permettant le couplage entre des outils numériques décrivant la propagation de vagues et leur déferlement. Nous détaillerons dans la **section 1** le modèle de vague de type Boussinesq que nous utilisons. Nous développerons ensuite l'approche SPH dans la **section 2**. La stratégie de couplage employé est détaillée en **section 3**. Enfin, nous présenterons un exemple de calcul préliminaires dans la **section 4**, avant de conclure.

# 1 Modèle de vague Boussinesq 1DH

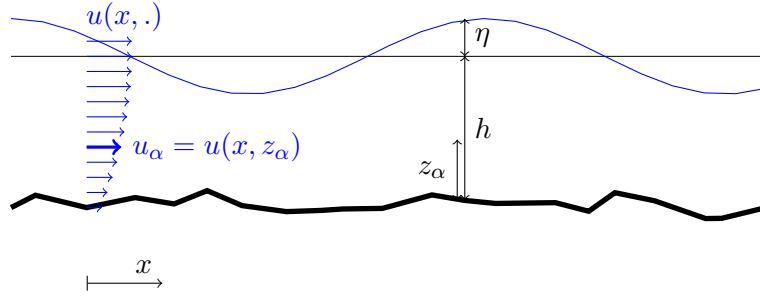


FIGURE 2 – Notations pour un modèle de vagues 1DH de type Boussinesq.

La propagation des vagues peut être décrite de manière précise en utilisant des modèles simplifiés tels que Saint-Venant ou Boussinesq où les équations de Navier-Stokes (ou d'Euler) décrivant l'écoulement sont intégrées sur une colonne d'eau dont la hauteur totale est notée  $H = h + \eta$  (voir FIGURE 2) [8]. Pour le modèle Boussinesq, en ne retenant que les termes d'ordre les plus élevés, l'équation de conservation de la masse s'écrit (en 1DH) :

$$\partial_t H + \partial_x H u_\alpha - \partial_x \left( H \left[ \left( \frac{\eta^2 - \eta h + h^2}{6} - \frac{z_\alpha}{2} \right) \partial_x^2 u_\alpha + \left( \frac{\eta - h}{2} - z_\alpha \right) \partial_x (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h) \right] \right) = 0$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \partial_x u_\alpha + \frac{1}{2} \partial_x u_\alpha^2 + g \partial_x \eta + \partial_t \left[ \frac{z_\alpha}{2} \partial_x^2 u_\alpha + z_\alpha \partial_x (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h) - \partial_x \left( \frac{\eta}{2} \partial_x^2 u_\alpha + \eta \partial_x (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h) \right) \right] \\ + \partial_x \left[ \partial_t \eta (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h + \eta \partial_x u_\alpha) + (z_\alpha - \eta) u_\alpha \partial_x (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h) + \frac{z_\alpha^2 - \eta^2}{2} u_\alpha \partial_x^2 u_\alpha + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\partial_x h u_\alpha + \partial_t h + \eta \partial_x u_\alpha)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

où  $u_\alpha$  est la vitesse horizontale du fluide à une hauteur de référence  $z_\alpha$ , prise en général, telle que  $z_\alpha = -0.531h$ . Dans [9], afin de simplifier l'écriture de ces équations, on introduit les termes  $U = U(u_\alpha)$ ,  $E = E(\eta, u_\alpha)$  et  $F = F(\eta, u_\alpha)$  qui dépendent des variables  $u_\alpha$  et  $\eta$  ainsi que de leur dérivées spatiales et temporelles.

La discrétisation spatiale est assurée par une méthode de type différence finie d'ordre élevé et celle en temps est assurée par un schéma de type prédicteur-correcteur d'ordre 4. L'algorithme 1 présente le schéma de résolution. Pour toute grandeur  $X$ , on note  $X_{i,n}^{(k)}$  sa valeur discrétisée au point  $i$ , pour la  $(k)$ -ème itération de l'instant  $t_n$ .

## 2 Modèle *Smoothed-Particle Hydrodynamics* (SPH)

Les modèles de type Boussinesq sont bien évidemment incapables de représenter le déferlement d'une vague [10] : écoulement à géométrie complexe, possiblement multiplement connexe, définie par une surface libre évoluant au cours du temps. Plusieurs types d'approches sont possibles : description eulérienne du domaine fluide "eau" par un *level-set* (nécessitant généralement de calculer le domaine "air", ce qui a un coût) telle qu'utilisée dans les approches de type *Volume-Of-Fluid* (VOF), description arbitrairement lagrangienne-eulérienne, ou description purement lagrangienne, sans maillage, tel que proposé par la méthode *Smoothed-Particle Hydrodynamics* (SPH) [5].

Les équations de Navier-Stokes du problème continu peuvent s'écrire sous forme Lagrangienne :

$$\begin{aligned} \partial_t \underline{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} + \underline{g} \\ \partial_t \rho &= -\rho \nabla \cdot \underline{u} \end{aligned}$$

---

**Algorithm 1** Algorithme de résolution employé pour le modèle de vague de type Boussinesq

---

- 1: Etant donné :  $u_{i,0}, \eta_{i,0}$
- 2: **for**  $n = 1 \dots N_{\max}$  **do**
- 3:    $(k) = 0$
- 4:   Prédicteur (explicite, d'ordre 3) :

$$\begin{cases} \eta_{i,n+1}^{(0)} &= \eta_{i,n} + \frac{\Delta t}{12}(23E_{i,n} - 16E_{i,n-1} + 5E_{i,n-2}) \\ U_{i,n+1}^{(0)} &= U_{i,n} + \frac{\Delta t}{12}(23F_{i,n} - 16F_{i,n-1} + 5F_{i,n-2}) \end{cases}$$

- 5:   Calculer la vitesse  $u_{i,n+1}^{(0)}$  à partir de  $U_{i,n+1}^{(0)}$
- 6:   Calculer  $E_{n+1}^{(0)} = E(\eta_{n+1}^{(0)}, u_{n+1}^{(0)})$  et  $F_{n+1}^{(0)} = F(\eta_{n+1}^{(0)}, u_{n+1}^{(0)})$
- 7:   **while**  $\Delta\eta > 0.0001$  ou  $\Delta u > 0.0001$  **do**
- 8:     Correcteur (explicite, d'ordre 4) :

$$\begin{cases} \eta_{i,n+1}^{(k+1)} &= \eta_{i,n} + \frac{\Delta t}{24}(9E_{i,n+1}^{(k)} + 19E_{i,n} - 5E_{i,n-1} + E_{i,n-2}) \\ U_{i,n+1}^{(k+1)} &= U_{i,n} + \frac{\Delta t}{24}(9E_{i,n+1}^{(k)} + 19F_{i,n} - 5F_{i,n-1} + F_{i,n-2}) \end{cases}$$

- 9:     Calculer la vitesse  $u_{i,n+1}^{(k)}$  depuis  $U_{i,n+1}^{(k)}$
- 10:    Calculer  $E_{n+1}^{(k)} = E(\eta_{n+1}^{(k)}, u_{n+1}^{(k)})$  et  $F_{n+1}^{(k)} = F(\eta_{n+1}^{(k)}, u_{n+1}^{(k)})$
- 11:    Calculer un indicateur de l'erreur :

$$\Delta\eta = \frac{\sum_i |\eta_{i,n+1}^{(k)} - \eta_{i,n+1}^{(0)}|}{\sum_i |\eta_{i,n+1}^{(k)}|} \quad \text{and} \quad \Delta u = \frac{\sum_i |u_{i,n+1}^{(k)} - u_{i,n+1}^{(0)}|}{\sum_i |u_{i,n+1}^{(k)}|}$$

- 12:      $(k) \leftarrow (k + 1)$
  - 13:    **end while**
  - 14: **end for**
- 

où les vitesses, pressions et densités sont classiquement notées  $\underline{u}$ ,  $p$  et  $\rho$ . Une équation d'état assure la faible compressibilité :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right)$$

où  $\rho_0$  ainsi que  $c_0$  sont les densité et vitesse du son de référence, et où  $\gamma = 7$  pour l'eau. La discrétisation spatiale est assurée par la méthode sans maillage SPH [4] et la discrétisation en temps par des schémas symplectiques. Notons par ailleurs, qu'une des difficultés de la méthode SPH est la bonne représentation des champs à proximité des parois. Nous utilisons ici un récent développement, proposant le calcul semi-analytique des conditions aux limites, qui assure une bien meilleur précision pour le calcul des champs et de leur dérivé spatiales [11].

Comme montré en FIGURE 3, le fluide faiblement compressible est modélisé par un ensemble de particules notées avec les indices  $(\cdot)_i$  et  $(\cdot)_j$ . L'ensemble des particules fluides est noté  $\mathcal{F}$ . A chaque particules, on associe des informations telles que la masse  $m_i$ , la position  $\underline{r}_i$ , la vitesse  $\underline{u}_i$  (qui est la dérivée lagrangienne de la position), la densité  $\rho_i$ , le volume  $V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$  et la pression  $p_i$ . L'interpolation est basée sur des fonctions noyaux à supports compacts. On note  $w_i$ , le noyau associé à la particule  $i$  et  $\Omega_i$  son support. Il s'agit d'une fonction centrée en  $\underline{r}_i$  de rayon  $R$ .

La frontière est elle modélisée par une suite de petit segment. On note dans la suite la valeur de l'intégrale du noyau dans le domaine fluide comme étant :

$$\gamma_i = \int_{\Omega \cap \Omega_i} w(\underline{r}' - \underline{r}_i) dV'$$

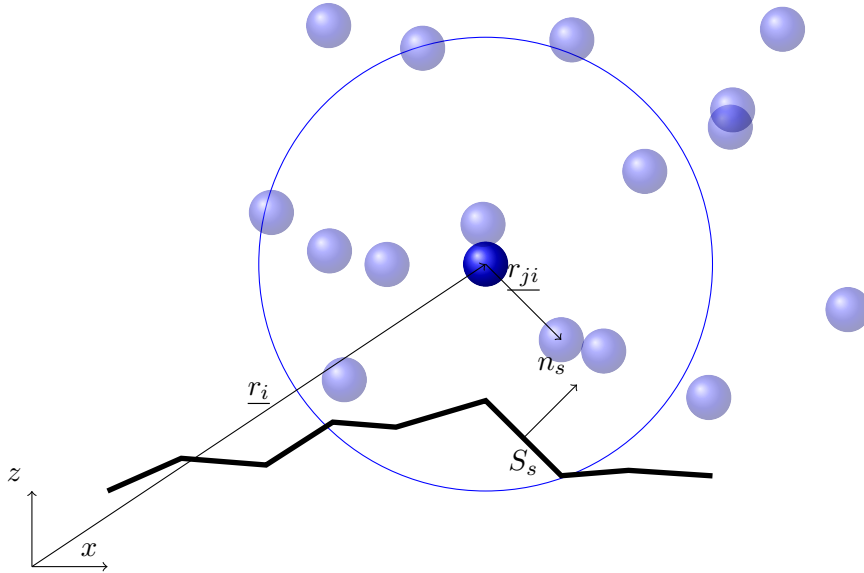


FIGURE 3 – Le modèle SPH

On peut alors montrer que dans l'équation de conservation du mouvement, l'opérateur gradient appliqué au champ de pression peut s'écrire comme :

$$\tilde{\nabla}_i\{p\} \equiv \frac{\rho_i}{\gamma_i} \sum_{j \in \mathcal{F}} m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \sum_{s \in \mathcal{S}} \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_s}{\rho_s^2} \right) \rho_s \nabla \gamma_{is}$$

ce qui nécessite, en plus de l'approximation SPH standard, le calcul de l'évolution du gradient  $\nabla \gamma_{is}$ . Pour des raisons de précision, le calcul de l'évolution de  $\gamma$  est fait à un ordre plus élevé que celui du calcul SPH. On approxime les autres termes dérivées (laplacien, divergence) dans la formulation forte d'une manière équivalente. Pour plus de détails sur ces équations, et notamment sur la manière de prendre en compte les efforts visqueux, le lecteur est invité à se référer à [11].

Notons bien que les outils permettant de décrire la propagation des vagues reposent sur certaines hypothèses simplificatrices des équations de la mécanique des fluides, diminuant logiquement le coût de calcul par rapport à des calculs complets. A contrario, les outils calculant sont extrêmement coûteux, et ne permettent pas de faire de calcul sur des échelles aussi grandes que celle de la propagation des vagues.

### 3 Couplage et développements informatiques

Nous proposons d'utiliser une approche de type *couplage de code* que nous avons déjà exploré pour l'interaction fluide-structure [3]. Les codes existants sont généralisés sous forme de composants, et la communication entre composants est assurée par l'*intergiciel* CTL [12, 13]. Le couplage est indépendant des composants utilisés, et ils peuvent être facilement remplacés.

Notons que nous cherchons ici à formuler le couplage entre deux modèles fluides qui n'ont pas les mêmes dimensions spatiales. A ce problème théorique, étudiés par exemple dans [14, 15, 16], s'ajoute la difficulté du couplage entre un modèle eulérien et un modèle lagrangien. Dans [17], il est proposé d'exister le domaine SPH par un batteur numérique. A contrario, nous nous proposons de nous passer de ce batteur numérique, et d'implanter une condition d'entrée-sortie eulérienne pour SPH. Cette entrée-sortie est gouverné par la code de vagues.

D'un point de vue numérique, les premières études tendent à montrer qu'un couplage explicite (sans itérations) telle que celui proposé dans l'algorithme 2 permet une résolution stable pour un coût réduit. La précision peut-être améliorée en décalant la résolution en temps de chacun des sous-problèmes.

---

**Algorithm 2** Couplage explicite entre le solveur FD-Boussinesq et le solveur SPH

---

- 1: Etant données certaines conditions initiales
- 2: **for**  $n = 1 \dots n_{\max}$  **do**
- 3:    $t = n\Delta t_{\text{Bsqs}}$
- 4:   Imposer la hauteur d'eau et la vitesse à la hauteur de référence à la frontière du solveur FD-Boussinesq ( $\eta_b, v_{\alpha,b}$ )
- 5:   Résoudre le problème fluide avec  $\Delta t_{\text{Bsqs}}$
- 6:   Obtenir la vitesse du solveur FD-Boussinesq aux points  $(x_i, z_i)$  de la frontière SPH :

$$u(x_i, z_i) = u_\alpha(x_i) + \partial_x z_\alpha \partial_x h u_\alpha + (z_\alpha - z_i) \partial_x^2 h u_\alpha + z_\alpha \partial_x z_\alpha \partial_x u_\alpha + \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - z_i^2) \partial_x^2 u_\alpha$$

- 7:   Résoudre le problème SPH de  $t - \frac{\Delta t_{\text{Bsqs}}}{2}$  à  $t + \frac{\Delta t_{\text{Bsqs}}}{2}$
  - 8:   **for**  $k = 1 \dots k_{\max}$  **do**
  - 9:      $t = (n - \frac{1}{2})\Delta t_{\text{Bsqs}} + k\Delta t_{\text{SPH}}$
  - 10:     Interpoler la vitesse  $u_i^k$  (linéaire) et imposer aux particules de frontière SPH le déplacement suivant :  $x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta t_{\text{SPH}} u_i^k$
  - 11:     Résoudre le problème SPH avec le pas de temps  $\Delta t_{\text{SPH}}$
  - 12:   **end for**
  - 13:   Obtenir la hauteur d'eau et la vitesse à la hauteur de référence (par approximation SPH à  $z_\alpha$ ) pour le solveur FD-Boussinesq.
  - 14: **end for**
- 

## 4 Exemple

En FIGURE 4 nous présentons des résultats préliminaires bi-dimensionnels. Pour cet exemple, le couplage est encore faible et explicite, mais nous espérons rapidement passer à un couplage fort, pour pouvoir présenter des cas de validation bi-dimensionnels .

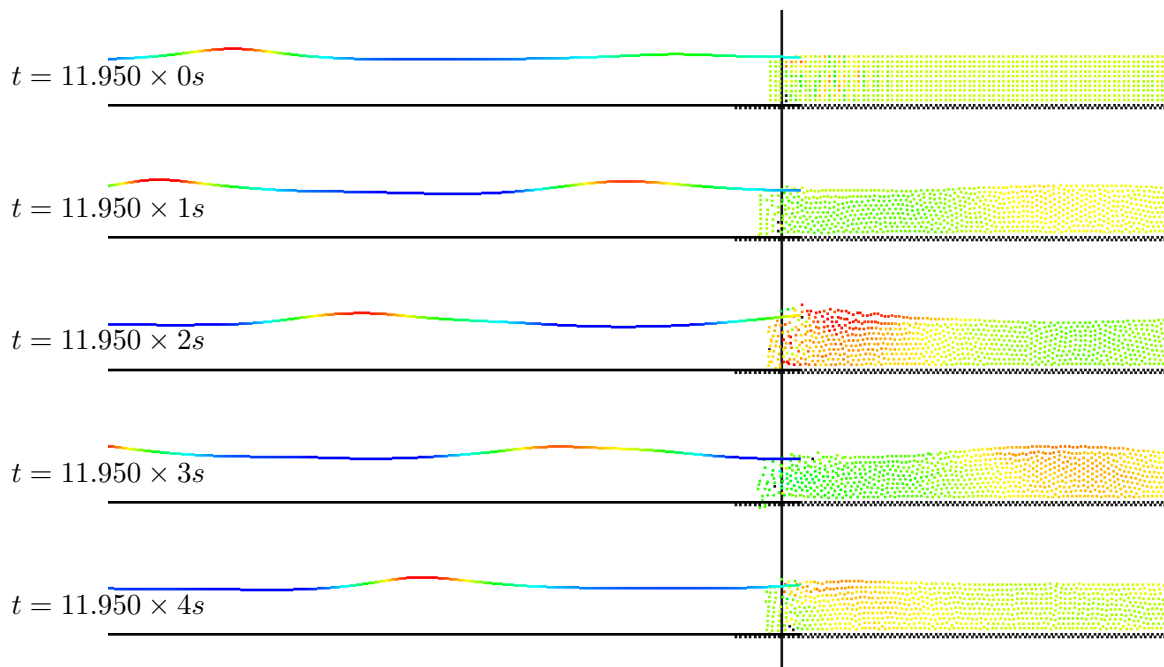


FIGURE 4 – Notations; résultats préliminaires pour un domaine bi-dimensionnel : les couleurs représentent la hauteur d'eau côté Boussinesq et le champ de vitesse côté SPH.

Nous testons ici la propagation de vagues sur un domaine à fond plat, de profondeur  $-0.5m$ . Pour ce type de vagues, le modèle de vague de type Boussinesq a déjà été validé, et nous compa-

rons les résultats du modèle couplé en terme d'amplitude et de vitesse du fluide à ces résultats de références.

## Conclusion

Nous proposons dans notre présentation une stratégie de couplage pour la modélisation des vagues, de leur propagation jusqu'à leur déferlement sur les côtes ou à proximité des structures. Pour la propagation nous privilégions une approche de type Boussinesq. A proximité des structures, nous utilisons un modèle SPH. L'implémentation est basée sur la réutilisation de codes existants. La communication entre ces codes est assurée par l'*intergiciel* CTL. Cet *intergiciel* permet le couplage générique, et l'utilisation de plusieurs codes. Notons toutefois, qu'afin d'assurer le couplage, il a été nécessaire de développer des conditions aux limites spécifiques pour les codes SPH.

## Références

- [1] João Cruz. *Ocean Wave Energy*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] Christophe Kassiotis, Rainer Niekamp, Adnan Ibrahimbegović, and Hermann G. Matthies. Partitioned procedure for strongly coupled fluid-structure problems. Part I: implicit algorithm, stability analysis and validation examples. *Computational Mechanics*, Published online, 2010.
- [3] Christophe Kassiotis, Adnan Ibrahimbegović, and Hermann G. Matthies. Partitioned solution to fluid-structure interaction problems in application to free-surface flows. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 29:510–521, 2010.
- [4] JJ Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30(1):543–574, 1992.
- [5] D. Violeau and R. Issa. Numerical modelling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(2):277–304, 2006.
- [6] Jean-Michel Ghidaglia, A. Kumbaro, and G. Le Coq. On the numerical solution to two fluid models via a cell centered finite volume method. *European Journal of Mechanics/B Fluids*, 20(6):841–867, 2001.
- [7] Henrik Rusche. *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, G.-B., 2002.
- [8] J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 17(2):55–108, 1872.
- [9] G. Wei, J.T. Kirby, S.T. Grilli, and R. Subramanya. A fully nonlinear boussinesq model for surface waves. Part I. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294:71–92, 1995.
- [10] Denis Dutykh and Dimitrios Mitsotakis. On the relevance of the dam break problem in the context of nonlinear shallow water equations. *Discrete and Continuous Dynamical System – Series A*, Accepted, 2009.
- [11] Martin Ferrand, Dominique L. Laurence, Benedict D. Rogers, and Damien Violeau. Improved time scheme integration approach for dealing with semi-analytical wall boundary conditions in SPARTACUS2D. *SPHERIC Newsletter*, 10:6–7, 2010.
- [12] Christophe Kassiotis, Rainer Niekamp, Adnan Ibrahimbegović, and Hermann G. Matthies. Partitioned procedure for strongly coupled fluid-structure problems. Part II: implementation aspects, re-using existing software as components and nested parallel computations by using CTL. *Computational Mechanics*, Published online, 2010.
- [13] Rainer Niekamp, Damijan Markovič, Adnan Ibrahimbegović, Hermann G. Matthies, and Robert L. Taylor. Multi-scale modelling of heterogeneous structures with inelastic constitutive behavior: Part II—software coupling implementation aspects. *Engineering Computations*, 26:6–28, 2009.
- [14] L. Formaggia, J.F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(6-7):561–582, 2001.

- [15] E. Miglio, S. Perotto, and F. Saleri. Model coupling techniques for free-surface flow problems: Part I. *Nonlinear Analysis*, 63(5-7):1885–1896, 2005. Invited Talks from the Fourth World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2004).
- [16] E. Miglio, S. Perotto, and F. Saleri. Model coupling techniques for free-surface flow problems: Part II. *Nonlinear Analysis*, 63(5-7):1897–1908, 2005. Invited Talks from the Fourth World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2004).
- [17] M. Gomez-Gesteira M. Narayanaswamy, A. Crespo and R. A. Dalrymple. Sphysics funwave hybrid model for coastal wave propagation. *Journal of Hydraulics Research*, 48:85–93, 2010.