



HAL
open science

Couplages Stokes/Darcy dans des milieux déformables pour la modélisation des procédés par infusion

Sylvain Drapier, Julien Bruchon, Jean-Michel Bergheau

► **To cite this version:**

Sylvain Drapier, Julien Bruchon, Jean-Michel Bergheau. Couplages Stokes/Darcy dans des milieux déformables pour la modélisation des procédés par infusion. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592739

HAL Id: hal-00592739

<https://hal.science/hal-00592739>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Couplages Stokes/Darcy dans des milieux déformables pour la modélisation des procédés par infusion

S. Drapier¹, J. Bruchon¹, J.-M. Bergheau²

¹ École des Mines de Saint-Étienne, centre SMS et LCG UMR CNRS 5146, F-42023 Saint-Étienne cedex 02, {drapier;bruchon}@emse.fr

² ENISE, LTDS UMR CNRS 5513, F-42023 Saint-Étienne cedex 02, bergheau@enise.fr

1 Introduction

Les procédés LCM (Liquid Composite Molding) permettent d'élaborer des structures composites de grande taille à moindre coût tout en garantissant des propriétés finales élevées [8]. Si le principe sur lequel s'appuient ces procédés est basique, leur maîtrise passe actuellement presque uniquement par des campagnes essais-erreurs très coûteuses, notamment par manque de modèles numériques fiables de ces procédés.

Schématiquement on peut modéliser ces procédés comme suit : sous l'action d'une pression mécanique appliquée sur un empilement de nappes de renforts fibreux secs et de résine liquide, la résine infuse à travers les préformes en cours de déformation. La modélisation de ces procédés est classiquement parcellaire et très simplifiée, la difficulté étant de coupler les phénomènes mécaniques transitoires de type mécanique des fluides, mécanique des solides, mécanique des milieux poreux, en plus de la thermo-physico-chimie de la résine.

Le premier modèle global de procédés LCM a été proposé dans un cadre isotherme par P. Celle [4] [3]. Ce travail, aujourd'hui repris dans un cadre industriel par ESI Software est en cours de validation (*cf* [7] dans ces proceedings). Dans le même temps, des travaux ont été menés en parallèle par G. Pacquaut sur une autre voie de modélisation [10] [11], [12].

Nous proposons ici de réaliser un comparatif de ces 2 approches, et notamment d'évaluer leur capacité à modéliser un écoulement de fluide dans 2 zones contiguës où règnent des régimes de Stokes et de Darcy (Figure 1) représentant respectivement une zone de résine pure et une zone de préformes en cours de remplissage. Le suivi du front de fluide dans les préformes est, en effet, étroitement lié à la capacité de la résolution à fournir des champs de vitesses stables et homogènes à l'interface Stokes-Darcy, notamment pour des perméabilités d'intérêt industriel de l'ordre de $10^{[-11,-15]}m^2$.

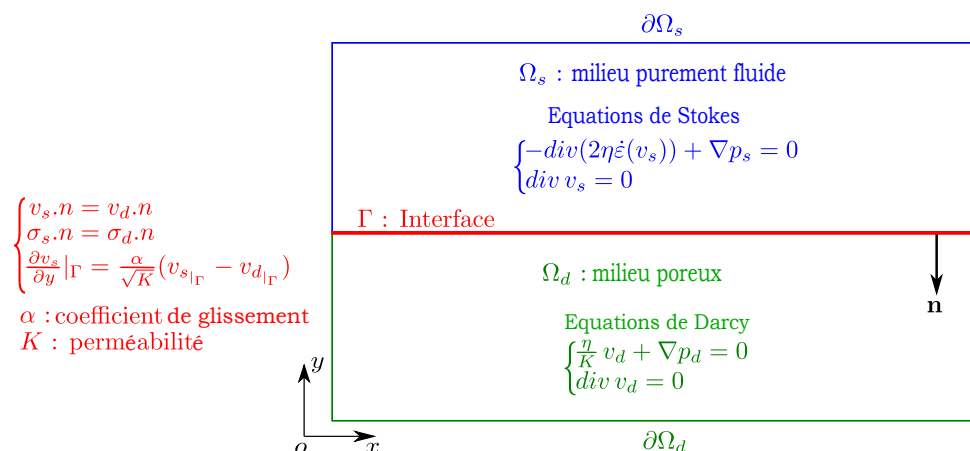


FIG. 1 – Écoulements de Stokes-Darcy : $v_{s,d}$ et $p_{s,d}$ pression et vitesses dans les zones de Darcy et Stokes, η viscosité du fluide

2 Approche couplée vs découplée

Dans ces approches, la déformabilité des préformes est couplée faiblement avec les écoulements. Ce couplage faible se fait de façon itérative et comprend deux étapes. D'une part, le comportement orthotrope non-linéaire des préformes est modifié pour intégrer la présence du fluide *via* sa pression hydrostatique (Terzaghi étendu). À l'inverse, la déformabilité des préformes modifie leur porosité, et donc leur perméabilité qui évolue en rapport *via* un modèle de Carman-Kozeny. Classiquement, le comportement hypoélastique non-linéaire orthotrope des préformes est représentée par un schéma lagrangien réactualisé.

Concernant les écoulements, les 2 approches considérées ici s'appuient sur des mini-éléments mixtes vitesse/pression, connus pour leur stabilité dans la gestion de l'incompressibilité [2]. Les différences principales interviennent au niveau de la représentation de l'interface Stokes-Darcy et des couplages correspondant, mais également par les formulations des mini-éléments utilisés.

2.1 Modélisation du couplages Stokes-Darcy

Les écoulements sont modélisés grâce à des mini-éléments triangulaires vérifiant la condition *inf-sup*, dont la robustesse a été largement démontrée ([2, 11, 12] entre autres). Ces éléments mixtes, formulés en vitesse-pression, sont stabilisés 'naturellement' par des termes issus de la condensation des contributions associées à un degrés de liberté supplémentaire 'bulle' introduit au barycentre de l'élément. Ces éléments sont des cas particuliers de méthodes de stabilisation générales basées sur une décomposition multi-échelle (*sub-grid*) ([1] par exemple) et cherchant à introduire la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement à travers une pénalisation basée sur la physique du problème.

Ces éléments finis peuvent être formulés à partir de la forme primale ou duale faible associée aux équations de Stokes et de Darcy que nous cherchons à résoudre. Les différences principales de ces formulations portent d'une part sur la capacité d'imposer des conditions aux limites faiblement ou comme conditions de Dirichlet, mais également sur la régularité requise pour les fonctions de forme.

De façon classique, la formulation duale est employée pour simuler des écoulements de type Stokes, ceci essentiellement pour pouvoir imposer facilement les conditions aux limites en vitesse, *i.e.* comme condition de Dirichlet. C'est en effet la vitesse qui est, comme nous le verrons ci-dessous, primordiale comme degrés de liberté à contrôler. La formulation duale du problème de Stokes s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l}
 \forall (\delta \mathbf{v}_s, \delta p_s) \in (\mathcal{V}_s, \mathcal{P}_s) \\
 \int_{\Omega_s} 2\eta \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}_s) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_s) dv - \int_{\Omega_s} p_s \nabla \cdot \delta \mathbf{v}_s dv = \underbrace{\int_{\partial\Omega_{t_s}} \eta \delta \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\partial\Omega_{t_s}} p_s \delta \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} ds}_{\int_{\partial\Omega_{t_s}} \delta \mathbf{v}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \mathbf{n} ds} \\
 \int_{\Omega_s} \delta p_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s dv = 0 \\
 \mathcal{V}_s = \left\{ \delta \mathbf{v}_s \in H^1(\Omega)^3 / \delta \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_{v_s} \right\} \text{ et } \left\{ \mathbf{v}_s \in H^1(\Omega)^3 / \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^d \text{ sur } \partial\Omega_{v_s} \right\} \\
 \mathcal{P}_s \equiv L^2(\Omega)
 \end{array} \right. \quad (1)$$

Dans le cas des écoulements en milieu poreux, les 2 formulations sont envisageables même si seule la forme primale est stable pour des mini-éléments P1+/P1 tandis que la forme duale doit être stabilisée par une autre méthode [9, 13]. La modélisation des écoulements de Stokes et de Darcy avec ces éléments a été validée individuellement, en 2D et 3D, sur les mêmes cas tests dont les solutions analytiques sont connues [4, 11] (écoulement de Poiseuille, test du convergent (radial) pour Darcy) ou également à l'aide des solutions manufacturées dans [11] où la convergence a également été évaluée. Nous renvoyons le lecteur à ces publications et aux thèses correspondantes [3, 10] pour plus de détails sur cette partie de la modélisation.

2.2 Couplage fort direct

Une approche envisagée pour coupler ces écoulements consiste à recourir à un couplage direct, à travers la formulation faible des équations couplées de Stokes et Darcy. La formulation duale est considérée

dans Stokes et dans Darcy afin d'assurer la continuité des vitesses et des pressions de façon 'naturelle' à travers l'interface. Cette formulation duale de Darcy s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\delta \mathbf{v}_d, \delta p_d) \in (\mathcal{V}_d, \mathcal{P}_d) \\ \int_{\Omega_d} \frac{\eta}{K} \mathbf{v}_d \cdot \delta \mathbf{v}_d \, d\Omega - \int_{\Omega_d} p_d \nabla \cdot \mathbf{v}_d \, d\Omega = - \int_{\partial\Omega_d} p_{ext} \delta \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}_d \, d\Gamma \\ - \int_{\Omega_d} \delta p_d \nabla \cdot \mathbf{v}_d \, d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_d = \{ \delta \mathbf{v}_d \in H(\text{div}, \Omega_d) / \delta \mathbf{v}_d = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{v}_d} \} \text{ et } \{ \mathbf{v}_d \in H(\text{div}, \Omega_d) / \mathbf{v}_d = \mathbf{v}_d^d \text{ sur } \partial\Omega_{\mathbf{v}_d} \} \\ \mathcal{P}_d \equiv L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

Une approche de ce type généralisant les interpolations des mini-éléments pour des écoulements de Stokes ou Darcy a été proposée très récemment avec des méthodes de stabilisation particulières [1], mais dans un cadre théorique peu contraignant, assez éloigné des perméabilités d'intérêt industriel de l'ordre de $10^{[-11, -15]} m^2$ visées ici.

Dans notre cas particulier utilisant des mini-éléments P1+/P1, cette formulation duale qui ne vérifie par la condition de *Brezzi-Babuska* pour un élément bulle standard dans Darcy est stabilisée par une approche dite *Huges Variationnal Multiscale*[9]. Cette technique permet de prendre en compte, à l'échelle macroscopique, les effets locaux de l'écoulement. De plus, une condition dite *Beaver-Joseph-Saffman* est imposée à l'interface, elle permet de relier le cisaillement de l'écoulement le long de cette interface aux vitesses tangentielles dans les 2 milieux (*cf* Figure 1). L'interface est représentée ici par une fonction Level-set définie dans un maillage non-structuré [11]. Dans ce cas, la forme faible associée à l'écoulement couplé Stokes/Darcy s'écrit (avec les restrictions sur les champ solution et tests indiqués dans les équations 1 et 3 :

$$\int_{\Omega} 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}) H_s \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\alpha \eta}{\sqrt{K}} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})(\delta \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\Gamma}_{\text{à changer en intégrale sur } \Omega} + \int_{\Omega} \frac{\eta}{K} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} H_d \, d\Omega =$$

$$\int_{\partial\Omega_s} \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v}_s \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega_d} p_{ext} \delta \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0$$

avec les fonctions de présence telles que $H_{(s,d)} = 1$ si $\mathbf{x} \in (\Omega_s, \Omega_d)$ et nulles sinon.

Ce couplage a été validé sur de nombreux cas tests et la convergence évaluée. Principalement 2 types d'écoulement ont été considérés pour ces validations, ce sont des écoulements tangents à l'interface ou transverse au plan de l'interface. Sur les Figure 2 et 3, la pression et les profils de vitesses sont représentés. La pression calculée est homogène dans la direction de l'écoulement et correspond à un écoulement de type Poiseuille dans Stokes et constant dans Darcy (Figure 2). Le profil des vitesses (Figure 3), quant à lui, montre une bonne corrélation entre les résultats numériques et analytiques, même pour des hauteur de la zone de Stokes assez faibles, et dans le cas de perméabilités d'intérêt industriel (10^{-11} et $10^{-15} m^2$). On vérifie que le fait d'imposer la relation de Beaver-Joseph-Saffman à l'interface conduit à des profils continus.

En second lieu, les résultats d'un essai d'écoulement transverse à l'interface, tel que présenté sur la Figure 4-a, montrent que l'écoulement est stable pour une perméabilité élevée ($K = 10^{-2} m^2$ ici). On note que dans le domaine de Stokes, la pression est égale à la pression imposée de $10 Pa$. En conséquence, la vitesse obtenue dans la zone de Darcy est très proche de $0,1 m/s$ (Figure 4-b), comme on peut l'estimer en première approximation pour un écoulement unidirectionnel de gradient constant : $v_d = \frac{K}{\eta} \sigma_n$.

Pourtant, des oscillations apparaissent à l'interface, ce qui se vérifie sur le profil des vitesses normales de la Figure 4-b. Ces oscillations pourraient être délétères pour la représentation du front de fluide en régime insaturé. Lorsque la perméabilité diminue dans la zone poreuse, ces oscillations s'amplifient et s'accompagnent également d'oscillations normalement à l'interface. Ceci est visible sur la Figure 5 où le profil de la vitesse transverse v_y normalisé par la perméabilité a été tracé en fonction de la position dans la hauteur. On observe clairement que la vitesse normale n'est pas continue à l'interface (en $y = 0$) lorsque la perméabilité devient faible. Par contre, la vitesse tangentielle est, elle, contrôlée par le coefficient α

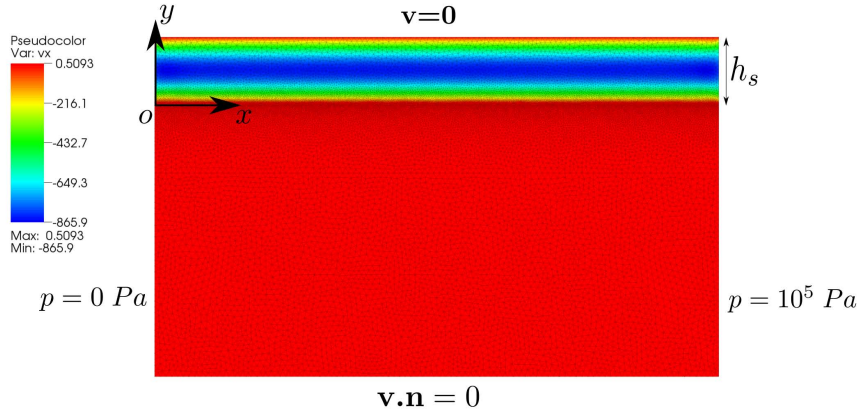


FIG. 2 – Distribution de pression et conditions aux limites pour le cas test d'écoulement tangent, avec $\eta = 1 \text{ Pa.s}$ et $K = 10^{-2} \text{ m}^2$.

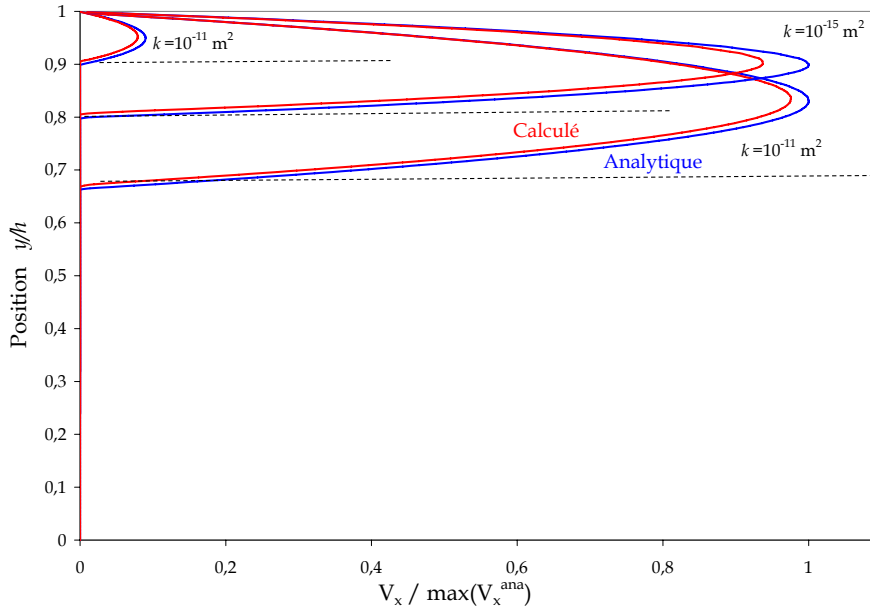
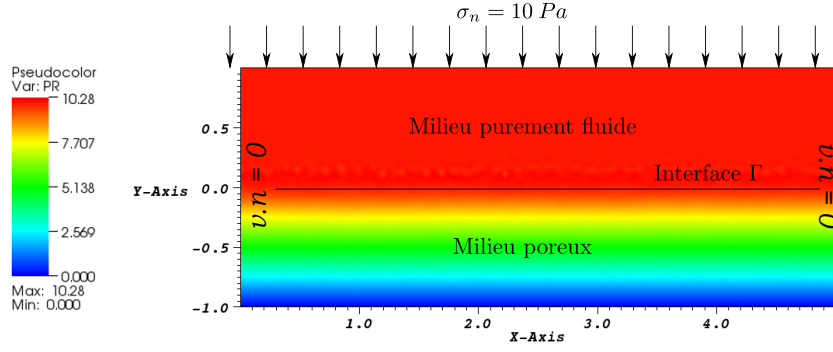


FIG. 3 – Cas test d'écoulement tangent, profil adimensionné des vitesses longitudinales v_x pour $\eta = 1 \text{ Pa.s}$, $K = 10^{[-11;-15]} \text{ m}^2$, et $h_s = [1/10; 1/5; 1/3]$.

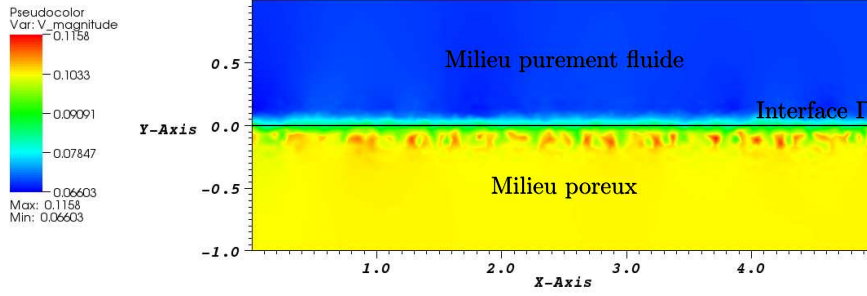
représentant l'"adhérence" entre le fluide et le milieu poreux, à travers la condition de Beaver-Joseph-Saffman introduite précédemment.

2.3 Couplage faible itératif

L'approche proposée par Celle [4] consiste à résoudre indépendamment les écoulements de Stokes et Darcy. Un mini-élément P1+P1 est utilisé dans sa formulation duale pour les écoulements dans Stokes. Dans Darcy, la formulation primale qui ne nécessite pas d'être stabilisée, en plus de la formulation bulle P1+P1, est considérée. Elle s'écrit :



(a)



(b)

FIG. 4 – Cas test d'écoulement transverse, pour $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et $K = 10^{-2} \text{ m}^2$: (a) distribution de pression et (b) distribution des vitesses normales v_y .

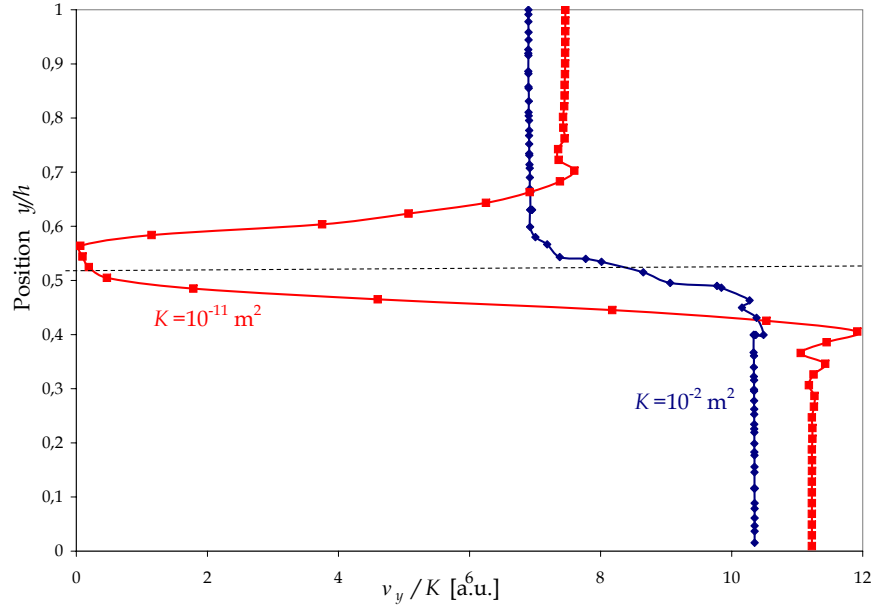


FIG. 5 – Profil des vitesses normalisées v_y/K en fonction de l'altitude, pour 2 perméabilités $K = 10^{-2} \text{ m}^2$ et $K = 10^{-11} \text{ m}^2$, traité avec l'approche couplée.

$$\begin{cases}
 \forall (\delta \mathbf{v}_d, \delta p_d) \in (\mathcal{V}_d, \mathcal{P}_d) \\
 \int_{\Omega_d} \delta \mathbf{v}_d \cdot \frac{\eta}{\mathbf{K}} \cdot (\mathbf{v}_d) \, dv + \int \delta \mathbf{v}_d \cdot \nabla p_d \, dv = 0 \\
 \int_{\Omega_d} \mathbf{v}_d \cdot \nabla \delta p_d \, dv = \int_{\partial \Omega_{\mathbf{v}_d}} \delta p_d \mathbf{v}_d^d \cdot \mathbf{n} \, dv \\
 \mathcal{P}_d = \left\{ \delta p_d \in H^1(\Omega)^3 / \delta p = 0 \text{ sur } \partial \Omega_{p_d} \right\} \text{ et } \left\{ p \in H^1(\Omega)^3 / p = p_{ext} \text{ sur } \partial \Omega_{p_d} \right\} \\
 \mathcal{V}_d \equiv L^2(\Omega)^3
 \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions sur l'interface (Figure 6) sont telles que la vitesse normale dans Darcy $\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n}$ est imposée dans Stokes comme une condition de Dirichlet (Equation 1) tandis que la pression de Stokes p_s est imposée dans Darcy en tant que condition de Dirichlet (Equation 3). Ensuite, un processus itératif permet d'équilibrer les vitesses normales et pressions de part et d'autre de l'interface représentée ici par les arêtes d'un maillage. L'équilibre est considéré comme atteint lorsque le résidu en vitesse/pression pour les 2 zones est admissible au sens d'un critère de convergence fixé.

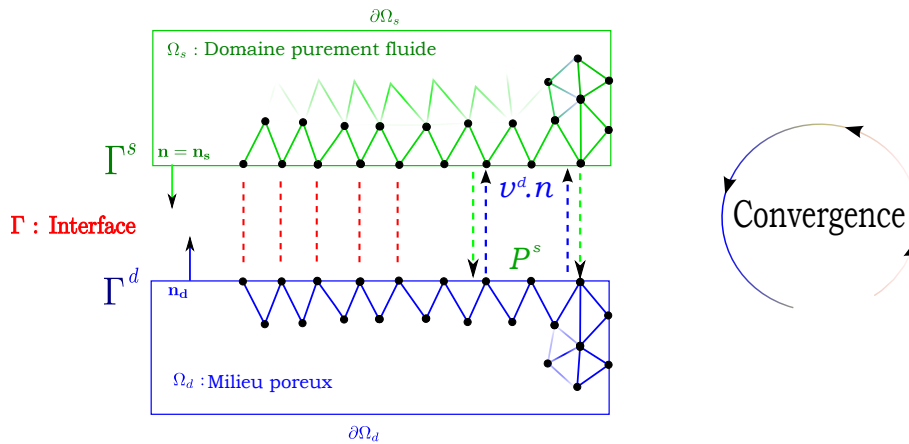


FIG. 6 – Approche découplée de l'écoulement Stokes-Darcy

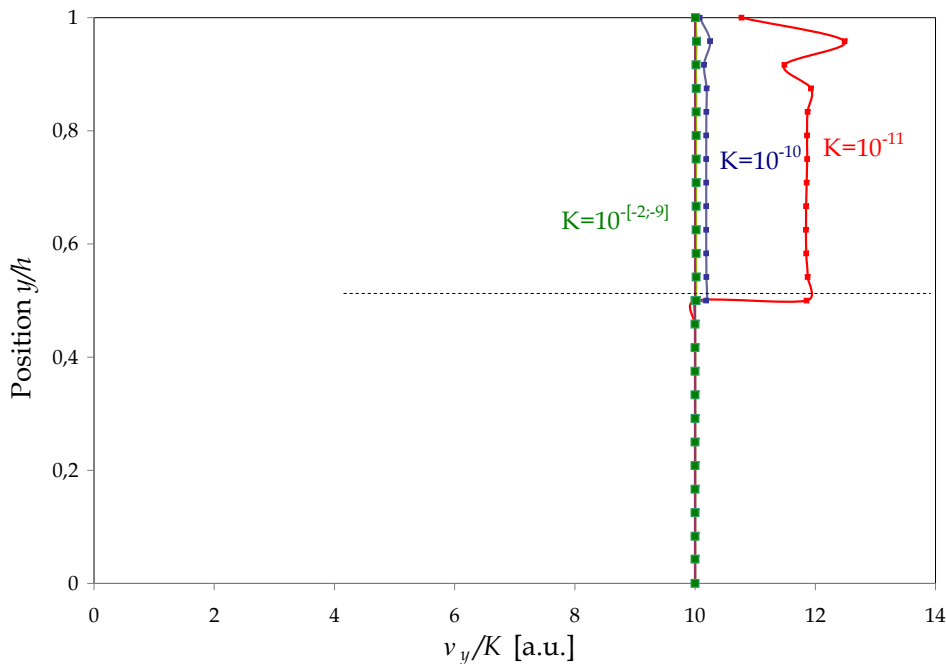


FIG. 7 – Profils de vitesses normalisées dans le cas test d'écoulement transverse traité avec l'approche découplée : perméabilités $K = 10^{[-2;-9;-10;-11]} m^2$

Les profils des vitesses obtenus avec cette approche découplée (Figure 7) dans le cas test d'écoulements transverses le plus sévère et le plus approprié dans notre cas, montrent que la continuité des vitesses transverses est bien assurée. Par contre, on voit clairement que pour des perméabilités faibles, les vitesses calculées dans la zone de Stokes divergent de la solution attendue. Compte-tenu des conditions aux limites du problème (vitesse libre en surface de Stokes), les vitesses dans la zone de Stokes sont en effet conditionnées par les vitesses données à l'interface. Ceci montre que pour des perméabilités inférieures à $10^{-10} m^2$, les vitesses normales ne sont plus correctement évaluées. Ceci provient probablement de la façon dont la continuité des vitesses est imposée, condition de Dirichlet imposée par pénalité dans notre cas. On constate que pour une pénalité qui permettrait d'assurer la continuité des vitesses nor-

males, des difficultés de convergence sévères apparaissent. Par contre, cette approche permet d'obtenir des profils de vitesse homogènes le long de l'interface.

3 Conclusion et perspectives

On note que les écoulements changent de régime lorsque la perméabilité diminue dans le milieu poreux, passant d'un régime dominé par des écoulements normaux, à un régime où les écoulements tangentiels à l'interface deviennent prépondérants. La stabilisation de l'écoulement grâce à la condition de *Beaver-Joseph-Saffman* intégrée dans l'approche couplée prend donc tout son sens dans ce cas.

La solution découplée, prenant également en compte la déformation des préformes, est actuellement en cours de consolidation en vue de son industrialisation. Par contre, la représentation des écoulements à forts rapports de perméabilités, tels que rencontrés en milieux industriels, doit faire l'objet d'une étude complémentaire pour valider la robustesse des simulations dans ces conditions sévères. Deux exemples illustratifs de simulation sont donnés sur la Figure 8.

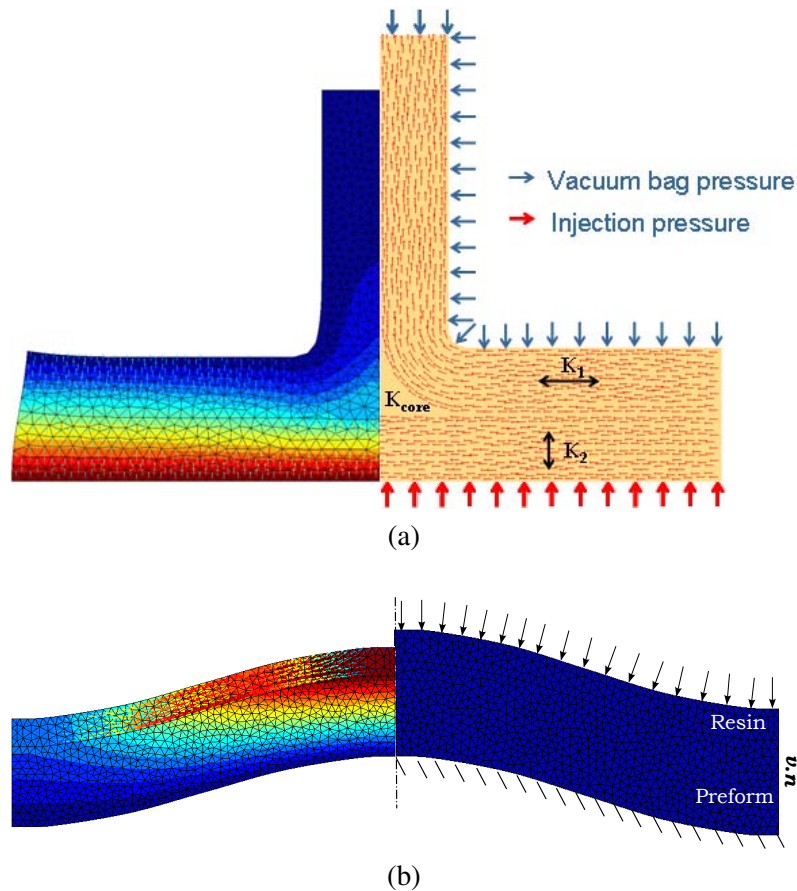


FIG. 8 – Exemples d'élaboration : injection d'un raidisseur en T, et infusion d'une pièce courbe - géométrie et conditions aux limites (droite), et champs de vitesse dans le maillage déformé (gauche).

Pourtant, comme nous venons de le vérifier, pour des régimes sévères les solutions envisagées ne donnent pas entièrement satisfaction. D'autres solutions doivent être envisagées, prenant en compte la physique du problème particulier de l'écoulement qui, à des perméabilités aussi faibles, doit certainement induire des effets locaux fortement non-linéaires. Des techniques telles que les développements asymptotiques raccordés devraient fournir de précieuses informations sur ce comportement local [5].

Références

- [1] S. Badia, R. Codina *Unified Stabilized Finite Element Formulations for the Stokes and the Darcy*. SIAM Journal on Numerical Analysis **47**(3) :1971-2000, 2009.
- [2] F. Brezzi, M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer Verlag, 1991.

- [3] P. Celle. *Couplages fluide / milieu poreux en grandes déformations pour la modélisation des procédés d'élaboration par infusion.*, Thèse de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2006.
- [4] P. Celle, S. Drapier, et J-M. Bergheau. *Numerical modelling of liquid resin infusion into fiber preforms undergoing compaction.*, European Journal of Mechanics/A, **7**(4) :647–661, 2008.
- [5] M. Chandesris, D. Jamet *Derivation of jump conditions for the turbulence $k - \epsilon$ model at a fluid/porous interface.* International Journal of Heat and Fluid Flow **30** :306-318, 2009.
- [6] R. Codina. *Analysis of a stabilized finite element approximation of the Oseen equations using orthogonal subscales.* Applied Numerical Mathematics, **58** :264-283, 2008.
- [7] A. Dereims, S. Drapier, J-M. Bergheau *Simulation de procédé pour matériaux composites - Interaction fluide/structure en grandes déformations*, Actes du 10eme Colloque National en Calcul des Structures, 9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens.
- [8] S.Drapier, et J.-M. Bergheau. *Modelling of Infusion-Based Processes for Polymer Composites.* Chapitre 8 de *Innovations in Materials Manufacturing, Fabrication, and Environmental Safety* coordonné par M. Schwartz. Taylor and Francis editor, ISBN 1420082159, 2011.
- [9] K.B. Nakshatrala, D.Z. Turner, K.D. Hjelmstad, A. Masud. *A stabilized mixed finite element method for Darcy flow based on a multiscale decomposition of the solution.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **195** :4036–4049, 2006.
- [10] G. Pacquaut. *Couplage Stokes/Darcy dans un cadre Level-set en grandes déformations pour la simulation des procédés d'élaboration par infusion de résine.*, Thèse de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2010 .
- [11] G. Pacquaut, J. Bruchon, N. Moulin, et S. Drapier. *Combining a level set method and a mixed stabilized P1/P1 formulation for coupling Stokes-Darcy flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, À paraître, 2011.
- [12] G. Pacquaut, J. Bruchon, N. Moulin, S. Drapier, L. Abouorme *Simulation par éléments finis du procédé d'infusion de résine*, Actes du 10eme Colloque National en Calcul des Structures, 9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens.
- [13] J. M. Urquiza, D. N'Dri, A. Garon, M. C. Delfour. *Coupling Stokes and Darcy equations*, Applied Numerical Mathematics, **58**(5) :525-538, 2008.