

# Méthode d'homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue

G. Puel<sup>1</sup>, D. Aubry<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MSSMat, Ecole Centrale Paris / CNRS UMR 8579, France, {guillaume.puel,denis.aubry}@ecp.fr

**Résumé** — On considère ici la simulation numérique de la fatigue à cycles combinés, caractérisée par deux chargements périodiques de fréquences très différentes. Plutôt que d'utiliser les méthodes classiques de calcul de durée de vie, on souhaite utiliser un modèle temporel d'évolution dont l'exploitation numérique est rendue possible par une méthode d'homogénéisation périodique en temps. Cette méthode repose sur une hypothèse de séparation des échelles de temps liées aux deux chargements périodiques. Différents résultats sur des exemples académiques et industriels sont présentés.

**Mots clés** — homogénéisation périodique, multiéchelles en temps, fatigue à cycles combinés, dynamique.

## 1 Objectif

L'objectif est de mettre en œuvre la simulation numérique de la fatigue à cycles combinés, dans laquelle la pièce ou la structure considérée est soumise à deux chargements périodiques dont les fréquences diffèrent généralement de plusieurs ordres de grandeur. Comme les méthodes classiques de calcul de durée de vie ne tiennent généralement pas compte de la chronologie des différents cycles de sollicitation, ou des effets d'inertie associés aux cycles rapides, on souhaite plutôt utiliser un modèle temporel d'évolution qui permette de calculer au cours du temps l'évolution de variables internes au sein de la structure (typiquement le champ de déformation viscoplastique). Comme ce calcul numérique serait trop coûteux à mettre en œuvre tel quel, une méthode d'homogénéisation périodique en temps est proposée [1].

## 2 Principes de la méthode d'homogénéisation périodique en temps

### 2.1 Échelles de temps

On suppose que l'on peut définir deux échelles de temps :

- une échelle de temps lente, notée  $t$ , associée au chargement basse fréquence  $F$  ;
- une échelle de temps rapide, notée  $\tau$ , associée au chargement haute fréquence  $F/\xi$ .

Cette hypothèse repose sur le fait que le ratio  $\xi = \frac{t}{\tau}$  est suffisamment petit pour que l'on puisse supposer que ces deux échelles de temps sont indépendantes. Ainsi, toute variable temporelle  $\alpha$  dépend des deux échelles de temps précédemment définies, et sa dérivation temporelle conduit à la relation suivante :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial\alpha}{\partial\tau} = \dot{\alpha} + \frac{1}{\xi} \alpha' \quad (1)$$

On fait de plus l'hypothèse (d'autant plus justifiée que le ratio  $\xi$  est petit) que chaque variable temporelle  $\alpha(t, \tau)$  est périodique par rapport à la variable de temps rapide :

$$\alpha(t, \tau) = \alpha\left(t, \tau + \frac{\xi}{F}\right) \quad \forall t \quad (2)$$

### 2.2 Développement asymptotique des équations du problème

On suppose que chaque champ à déterminer (déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \tau)$ , contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \tau)$ , déformations totales  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t, \tau)$ , déformations viscoplastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t, \tau)$ ) peut s'exprimer sous la forme d'un

développement asymptotique en  $\xi$ , par exemple pour le champ des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \tau) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}, t, \tau) + \xi \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{x}, t, \tau) + O(\xi^2) \quad (3)$$

Les équations à satisfaire sont les suivantes (avec des conditions limites et initiales adaptées) :

$$\mathbf{Div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_x \mathbf{u} + \mathbf{D}_x \mathbf{u}^T) \quad (6)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} = a(\boldsymbol{\sigma}) \quad (7)$$

où  $a$  désigne un opérateur (non linéaire) caractérisant la loi d'évolution du matériau.

En introduisant dans les équations précédentes (4)-(5)-(6)-(7) les développements asymptotiques (3) de chaque champ à déterminer, et en utilisant la relation (1), on obtient en séparant les différents ordres en  $\xi$  les équations (8)-(9)-(10)-(11) du problème homogénéisé.

### 2.3 Équations du problème homogénéisé en temps

L'équation en  $1/\xi$  permet de conclure que l'ordre zéro de la déformation viscoplastique ne dépend pas du temps rapide :  $\boldsymbol{\varepsilon}_0^p(\mathbf{x}, t, \tau) = \boldsymbol{\varepsilon}_0^p(\mathbf{x}, t)$ .

En posant  $\langle \alpha \rangle = \frac{F}{\xi} \int_0^{\frac{\xi}{F}} \alpha(t, \tau) d\tau$  pour désigner la moyenne sur le temps rapide de  $\alpha$ , et en supposant que l'inverse du ratio  $\xi$  est inférieur à la vitesse de propagation des ondes dans le matériau, les équations d'ordre zéro sont alors les suivantes :

$$\mathbf{Div}_x \langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle + \langle \mathbf{f}_v \rangle = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle = \mathcal{C} (\langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle - \boldsymbol{\varepsilon}_0^p) \quad (9)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_x \langle \mathbf{u}_0 \rangle + \mathbf{D}_x \langle \mathbf{u}_0 \rangle^T) \quad (10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^p = \langle a(\boldsymbol{\sigma}_0) \rangle \quad (11)$$

On a utilisé pour cela la propriété de périodicité (2) qui s'exprime aussi comme :  $\langle \alpha' \rangle = 0$ . Le calcul de l'équation (11) nécessite la résolution préalable d'un problème de dynamique correspondant au chargement haute fréquence : ce problème est élastique et linéaire et n'est donc résolu qu'une seule fois.

## 3 Applications

La méthode d'homogénéisation périodique en temps a été validée sur des exemples académiques aussi bien dans le cas quasi-statique [2] que dynamique [3]. L'objectif ici est de l'appliquer sur des géométries d'éprouvettes utilisées dans le cadre du projet européen PREMECCY [4]. Une fois la loi d'évolution du matériau identifiée, il sera possible de confronter les durées de vie prédites par le calcul avec celles effectivement obtenues lors des essais. On aura alors à disposition un outil de prédiction de la tenue à la fatigue de pièces ou de structures dans leur environnement mécanique réel.

### Références

- [1] T. Guennoui et D. Aubry. *Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargement cyclique*, CR Académie des Sciences 303(20), Elsevier, 1765-1767, 1986.
- [2] D. Aubry et G. Puel. *CCF modelling with use of a two-timescale homogenization model*, Procedia Engineering 2, Elsevier, 787-796, 2010.
- [3] D. Aubry et G. Puel. *Two-timescale homogenization method for the modeling of material fatigue*, IOP Conferences Series : Materials Science and Engineering 10, IOP Publishing, 012113, 2010.
- [4] PREdictive MEthods for Combined CYcle fatigue in gas turbines (PREMECCY), EU Project (6th RTD Framework Programme), <http://premeccy.mecc.polimi.it>