Méthode d homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue

Guillaume Puel, Denis Aubry

▶ **To cite this version:**

Guillaume Puel, Denis Aubry. Méthode d homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592734

HAL Id: hal-00592734
https://hal.science/hal-00592734

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode d'homogénéisation temporelle : application à la simulation numérique de la fatigue

G. Puel[1], D. Aubry[1]

[1] *MSSMat, Ecole Centrale Paris / CNRS UMR 8579, France, {guillaume.puel,denis.aubry}@ecp.fr*

Résumé — On considère ici la simulation numérique de la fatigue à cycles combinés (CCF), caractérisée par deux chargements périodiques de fréquences très différentes. Plutôt que d'utiliser les méthodes classiques de calcul de durée de vie, on souhaite utiliser un modèle temporel d'évolution dont l'exploitation numérique est rendue possible par une méthode d'homogénéisation périodique en temps. Cette méthode repose sur une hypothèse de séparation des échelles de temps liées aux deux chargements périodiques. Différents résultats sur des exemples académiques et industriels sont présentés.
Mots clés — homogénéisation périodique, multiéchelles en temps, fatigue à cycles combinés, dynamique.

1 Introduction

L'objectif est de mettre en œuvre la simulation numérique de la fatigue à cycles combinées (CCF), pour laquelle la pièce ou la structure considérée est soumise à deux chargements périodiques dont les fréquences diffèrent généralement de plusieurs ordres de grandeur. Comme les méthodes classiques de calcul de durée de vie ne tiennent généralement pas compte de la chronologie des différents cycles de sollicitation, ou des effets d'inertie associés aux cycles rapides, on souhaite plutôt utiliser un modèle temporel d'évolution qui permette de calculer au cours du temps l'évolution de variables internes au sein de la structure (typiquement le champ de déformation plastique). Comme ce calcul numérique serait trop coûteux à mettre en œuvre tel quel, une méthode d'homogénéisation périodique en temps est proposée [1]. Cette méthode a depuis été validée sur des exemples académiques aussi bien dans le cas quasi-statique [2] que dynamique [3]. Une extension à la prévision de l'évolution de l'endommagement plutôt que la plasticité a également été proposée dans [4] et [5]. L'objectif ici est de l'appliquer sur des géométries d'éprouvettes utilisées dans le cadre du projet européen PREMECCY [6] qui s'intéresse à la fatigue CCF des aubes de turbines de turboréacteurs.

2 Principes de la méthode d'homogénéisation temporelle

Le but de la méthode est de pouvoir simuler numériquement le comportement d'une pièce soumise à un grand nombre de cycles de sollicitation, pour un type de comportement matériau spécifique et décrit par un modèle temporel. On présente ici une version résumée de la méthode telle qu'elle a été initiée dans [1] et complétée dans [3], dans le cas d'un comportement viscoplastique générique en régime dynamique.

2.1 Échelles de temps

La pièce étudiée est soumise à un chargement de fatigue de type CCF : typiquement, deux chargements périodiques, de fréquences très différentes, sont appliqués simultanément. On suppose que l'on peut alors définir deux échelles de temps :

- une échelle de temps lente, notée t, associée au chargement basse fréquence F ;
- une échelle de temps rapide, notée τ, associée au chargement haute fréquence F/ξ.

Cette hypothèse repose sur le fait que le ratio $\xi = \frac{t}{\tau}$ est suffisamment petit pour que l'on puisse supposer que ces deux échelles de temps sont indépendantes. Ainsi, toute variable temporelle α dépend des deux

échelles de temps précédemment définies, et sa dérivation temporelle conduit à la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\alpha}{\partial\tau} = \dot{\alpha} + \frac{1}{\xi}\alpha' \tag{1}$$

où $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$, $\dot{\alpha}$ et α' désignent respectivement la dérivation temporelle totale, la dérivation partielle par rapport à l'échelle de temps lente t et la dérivation partielle par rapport à l'échelle de temps rapide τ.

On fait de plus l'hypothèse (là encore d'autant plus justifiée que le ratio ξ est petit) que chaque variable temporelle $\alpha(t,\tau)$ du problème est périodique par rapport à la variable de temps rapide (hypothèse de « quasipériodicité ») :

$$\alpha(t,\tau) = \alpha\left(t, \tau + \frac{\xi}{F}\right) \quad \forall t \tag{2}$$

Enfin, afin de pouvoir passer de l'échelle rapide à l'échelle lente par homogénéisation, on introduit la moyenne par rapport à l'échelle de temps rapide de la variable temporelle $\alpha(t,\tau)$ de la façon suivante :

$$<\alpha> = \frac{F}{\xi}\int_0^{\frac{\xi}{F}} \alpha(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

La quantité homogénéisée $<\alpha>$ ainsi obtenue est alors une fonction de la variable de temps lente t seulement, et on note $\alpha^* = \alpha - <\alpha>$ le résidu associé à cette homogénéisation, qui dépend donc des deux échelles de temps t et τ. Avec les notations précédentes, il est possible de reformuler l'hypothèse de quasipériodicité (2) de façon équivalente comme :

$$<\alpha'> = 0 \tag{3}$$

2.2 Développement asymptotique des équations du problème

On suppose que chaque champ à déterminer (déplacements $\mathbf{u}(\mathbf{x},t,\tau)$, contraintes $\sigma(\mathbf{x},t,\tau)$, déformations totales $\varepsilon(\mathbf{x},t,\tau)$, déformations plastiques $\varepsilon^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},t,\tau)$) peut s'exprimer sous la forme d'un développement asymptotique en ξ ; par exemple, on peut écrire pour le champ des contraintes :

$$\sigma(\mathbf{x},t,\tau) = \sigma_0(\mathbf{x},t,\tau) + \xi\sigma_1(\mathbf{x},t,\tau) + O(\xi^2) \tag{4}$$

Les équations que les champs précédents doivent satisfaire dans le domaine Ω associé à la pièce étudiée sont les suivantes (avec des conditions initiales imposées nulles) :

$$\mathbf{Div_x}\,\sigma + \mathbf{f}_{\mathrm{v}} = \rho\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

$$\sigma = \mathcal{C}\,(\varepsilon - \varepsilon^{\mathrm{p}}) \tag{6}$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathrm{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = a(\sigma) \tag{8}$$

où ρ, $\mathcal{C}$ et a désignent respectivement la masse volumique, le tenseur d'élasticité (linéaire) et un opérateur (non linéaire) caractérisant la loi d'évolution du matériau. Le domaine Ω est soumis à une densité volumique d'efforts $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},t,\tau)$ connue tandis que sa frontière $\partial\Omega$ est soumise à une densité surfacique d'efforts $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}(\mathbf{x},t,\tau)$ elle aussi connue :

$$\sigma\,\mathbf{n} = \mathbf{f}_{\mathrm{s}} \tag{9}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure en chaque point de $\partial\Omega$. Sans modifier les résultats qui suivent, il est bien sûr possible de considérer qu'une partie de la frontière est soumise à un déplacement imposé.

On introduit dans les équations précédentes (5)-(6)-(7)-(8)-(9) les développements asymptotiques de type (4) de chaque champ à déterminer. En utilisant de plus la relation de dérivation totale (1), on obtient au final des équations faisant intervenir les différentes puissances de ξ. Par exemple, l'équation d'évolution devient, en se limitant à l'ordre un :

$$\frac{1}{\xi}\varepsilon_0^{\mathrm{p}\,\prime} + \left(\dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} + \varepsilon_1^{\mathrm{p}\,\prime}\right) + \xi\left(\dot{\varepsilon}_1^{\mathrm{p}} + \varepsilon_2^{\mathrm{p}\,\prime}\right) + O(\xi^2) = a(\sigma_0) + \xi\mathrm{D}_\sigma a(\sigma_0)\sigma_1 + O(\xi^2) \tag{10}$$

avec $\mathrm{D}_\sigma a(\sigma_0)$ le gradient de a exprimé en σ_0. L'hypothèse de séparation des échelles ($\xi \ll 1$) nous permet alors d'affirmer que, dans les équations ainsi obtenues, les égalités doivent être valables pour chaque ordre de ξ pris séparément. On obtient alors les équations détaillées dans les paragraphes 2.4 et 2.5.

2.3 Développement asymptotique de l'équation dynamique

Avant d'établir les équations homogénéisées, on étudie plus précisément ici le développement asymptotique de l'équation dynamique. En appliquant la relation de dérivation totale (1), on obtient pour le terme d'accélération le développement à l'ordre un suivant :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\xi^2}\mathbf{u}_0'' + \frac{1}{\xi}\left(2\dot{\mathbf{u}}_0' + \mathbf{u}_1''\right) + \left(\ddot{\mathbf{u}}_0 + 2\dot{\mathbf{u}}_1' + \mathbf{u}_2''\right) + \xi\left(\ddot{\mathbf{u}}_1 + 2\dot{\mathbf{u}}_2' + \mathbf{u}_3''\right) + O(\xi^2)$$

Cependant, avant d'utiliser cette expression dans (5), il faut étudier au préalable l'ordre de grandeur des termes d'inertie, et donc analyser l'ordre de grandeur du rapport de la masse volumique par une norme du tenseur d'élasticité. Pour la plupart des matériaux usuels, on peut supposer que :

$$\frac{\rho}{||C||} = \beta\xi^2 \tag{11}$$

avec $\beta = o(1/\xi)$. Cette hypothèse est valide si le ratio ξ est supérieur à l'inverse de la vitesse de propagation des ondes de pression dans le matériau. La proposition de telles hypothèses est d'ailleurs courante en homogénéisation spatiale périodique [7]. Dans ce cas, le membre de droite de l'équation (5) s'écrit, à l'ordre un :

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \beta||C||\mathbf{u}_0'' + \xi\beta||C||\left(2\dot{\mathbf{u}}_0' + \mathbf{u}_1''\right) + O(\xi^2) \tag{12}$$

2.4 Équations d'ordre $1/\xi$

Lorsqu'on écrit les développements asymptotiques des différentes équations du problème, la première relation obtenue provient de l'ordre $1/\xi$ présent dans l'équation d'évolution (10) :

$$\varepsilon_0^{\mathrm{p}\,\prime} = 0$$

qui traduit que le terme d'ordre zéro de la déformation plastique ne peut dépendre que de la variable de temps lente t :

$$\varepsilon_0^{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t, \tau) = \varepsilon_0^{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t) \tag{13}$$

Ceci peut s'interpréter comme le fait que le comportement viscoplastique est majoritairement (c'est-à-dire à l'ordre zéro) un phénomène qui évolue lentement, lorsqu'on compare cette évolution à la période des cycles rapides.

2.5 Équations d'ordre zéro

La relation suivante provenant de l'équation d'évolution (10) correspond à l'ordre zéro, et fait intervenir à la fois l'ordre zéro et l'ordre un de la déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} + \varepsilon_1^{\mathrm{p}\,\prime} = a(\sigma_0) \tag{14}$$

Afin de séparer les deux ordres en présence dans l'équation précédente, on utilise la relation de quasipériodicité (3), qui fait disparaître le terme d'ordre un de la déformation plastique :

$$\dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} = < a(\sigma_0) > \tag{15}$$

où l'on a notamment $< \dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} > = \dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}}$ d'après l'équation (13). Ainsi, l'évolution (lente) de l'ordre zéro de la déformation plastique est donnée comme la moyenne sur un cycle rapide de la loi d'évolution faisant intervenir l'ordre zéro du champ de contraintes. Il est à noter que ces dernières sont des quantités « instantanées », dépendant à la fois des deux variables de temps : $\sigma_0(\mathbf{x}, t, \tau)$, et que, la loi d'évolution n'étant pas linéaire, la détermination du champ de contraintes « instantanées » est requise.

Pour cela, une première étape est de formuler les équations homogénéisées à l'ordre zéro provenant des équations (5)-(6)-(7)-(9). On procède de la même façon que pour la loi d'évolution (8), ce qui permet

d'obtenir au final, en utilisant le résultat (13) :

$$\mathbf{Div_x} < \sigma_0 > + < \mathbf{f}_v > = \mathbf{0} \tag{16}$$

$$< \sigma_0 > = \mathcal{C} \left(< \varepsilon_0 > - \varepsilon_0^p \right) \tag{17}$$

$$< \varepsilon_0 > = \frac{1}{2} (\mathrm{D}_\mathbf{x} < \mathbf{u}_0 > + \mathrm{D}_\mathbf{x} < \mathbf{u}_0 >^T) \tag{18}$$

$$< \sigma_0 > \mathbf{n} = < \mathbf{f}_s > \tag{19}$$

Il est intéressant de noter que l'équation d'équilibre homogénéisée à l'ordre zéro se traduit par un problème quasistatique, qui ne fait pas intervenir les termes d'inertie du problème initial.

La seconde étape consiste à résoudre les équations résiduelles de l'homogénéisation que l'on vient d'effectuer : on soustrait pour cela les équations (16)-(17)-(18)-(19) aux équations d'ordre zéro associées à (5)-(6)-(7)-(9) :

$$\mathbf{Div_x}\, \sigma_0^* + \mathbf{f}_v^* = \beta ||\mathcal{C}|| \mathbf{u}_0^{*\prime\prime} \tag{20}$$

$$\sigma_0^* = \mathcal{C}\, \varepsilon_0^* \tag{21}$$

$$\varepsilon_0^* = \frac{1}{2} (\mathrm{D}_\mathbf{x} \mathbf{u}_0^* + \mathrm{D}_\mathbf{x} \mathbf{u}_0^{*T}) \tag{22}$$

$$\sigma_0^* \mathbf{n} = \mathbf{f}_s^* \tag{23}$$

Les équations précédentes correspondent à la définition d'un problème élastique linéaire dynamique, dont la résolution est d'ailleurs totalement découplée de la résolution du système d'équations (16)-(17)-(18)-(19), et permet d'obtenir notamment le résidu du champ de contraintes à l'ordre zéro $\sigma_0^*(\mathbf{x}, t, \tau)$.

Au final, le système d'équations (16)-(17)-(18)-(19) est résolu avec l'équation d'évolution (15), qui utilise $\sigma_0(\mathbf{x}, t, \tau) = < \sigma_0 > (\mathbf{x}, t) + \sigma_0^*(\mathbf{x}, t, \tau)$. Les étapes décrites dans les paragraphes précédents peuvent naturellement être reprises pour traiter les équations d'ordres suivants s'ils s'avèrent nécessaires.

3 Application de la méthode d'homogénéisation temporelle à un exemple simple

Afin de prouver la validité et l'efficacité de la méthode, on étudie l'exemple d'une barre cylindrique droite de longueur L soumise à des efforts normaux qui sont la somme d'une sollicitation lente de fréquence F et d'une sollicitation rapide de fréquence F/ξ. Le matériau considéré a un comportement viscoplastique à deux écrouissages de type Lemaître-Chaboche comme défini dans [8].

3.1 Problème de référence

Le problème de référence est composé des équations temporelles non homogénéisées. L'équation dynamique vérifiée par la barre est scalaire, et fait intervenir le déplacement longitudinal $u(x, t, \tau)$ de la ligne moyenne de la barre d'une part, et la contrainte normale $\sigma(x, t, \tau)$ dans la barre d'autre part :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x} = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \tag{24}$$

où $x \in [0; L]$. On suppose ici qu'il n'y a pas de densité volumique d'efforts au sein de la barre, et que la seule sollicitation est la densité surfacique d'efforts $f_s(t, \tau)$ appliquée à l'extrémité $x = L$, tandis que la barre est encastrée à un bâti fixe en $x = 0$. La relation de comportement élastique est donnée par :

$$\sigma = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^p \right) \tag{25}$$

où E et $\varepsilon^p(x, t, \tau)$ sont respectivement le module de Young du matériau et la déformation plastique longitudinale le long de la barre.

La loi d'évolution non linéaire du matériau est de type viscoplastique à deux écrouissages, proposé sous une forme uniaxiale dans [8] avec les équations suivantes (avec des conditions initiales nulles) :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - k}{K} \right\rangle_+^n \\
\frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \mathrm{sign}(\sigma - X) \\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \frac{2}{3} C \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} - \gamma_0 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} X \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= b(Q - R) \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

où $< \alpha >_+ = (1 + \mathrm{sign}\,\alpha)\alpha/2$ est la partie positive de $\alpha(t,\tau)$. $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(x,t,\tau)$, $X(x,t,\tau)$ et $R(x,t,\tau)$ désignent respectivement le taux de déformation plastique équivalent, la variable (uniaxiale) d'écrouissage cinématique et la variable (uniaxiale) d'écrouissage isotrope. k, K, n, C, γ_0, b et Q sont des paramètres matériau qui sont des constantes à température fixée.

3.2 Équations homogénéisées d'ordre zéro

En utilisant le même type de développement asymptotique et la relation de dérivation totale (1), on obtient tout d'abord le même résultat remarquable que dans le paragraphe 2.4, à savoir que la viscoplasticité (à l'ordre zéro) est un phénomène qui ne peut dépendre que de la variable de temps lente t :

$$p_0(x,t,\tau) = p_0(x,t) \quad \varepsilon_0^{\mathrm{p}}(x,t,\tau) = \varepsilon_0^{\mathrm{p}}(x,t) \quad X_0(x,t,\tau) = X_0(x,t) \quad R_0(x,t,\tau) = R_0(x,t)$$

En reprenant ensuite les hypothèses du paragraphe 2.5, on obtient les équations dynamiques suivantes pour le problème d'ordre zéro :

$$E\left(\frac{\partial < u_0 >}{\partial x} - \varepsilon_0^{\mathrm{p}}\right) = 0 \tag{26}$$

$$E\frac{\partial u_0^*}{\partial x} = \beta E u_0^{*\prime\prime} \tag{27}$$

ainsi que les conditions limites en $x = 0$:

$$< u_0 > = 0 \tag{28}$$

$$u_0^* = 0 \tag{29}$$

et en $x = L$:

$$E\left(\frac{\partial < u_0 >}{\partial x} - \varepsilon_0^{\mathrm{p}}\right) = < f_{\mathrm{s}} > \tag{30}$$

$$E\frac{\partial u_0^*}{\partial x} = f_{\mathrm{s}}^* \tag{31}$$

Enfin, les équations homogénéisées d'ordre zéro pour la loi d'évolution viscoplastique peuvent s'écrire comme :

$$\dot{p}_0 = \left\langle \left\langle \frac{|\sigma_0 - X_0| - R_0 - k}{K} \right\rangle_+^n \right\rangle \tag{32}$$

$$\dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} = \left\langle \left\langle \frac{|\sigma_0 - X_0| - R_0 - k}{K} \right\rangle_+^n \mathrm{sign}(\sigma_0 - X_0) \right\rangle \tag{33}$$

$$\dot{X}_0 = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_0^{\mathrm{p}} - \gamma_0 \dot{p}_0 X_0 \tag{34}$$

$$\dot{R}_0 = b(Q - R_0)\dot{p}_0 \tag{35}$$

où la contrainte « instantanée » d'ordre zéro peut s'exprimer comme :

$$\sigma_0(x,t,\tau) = E\left(\frac{\partial < u_0 >}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial u_0^*}{\partial x}(x,t,\tau) - \varepsilon_0^{\mathrm{p}}(x,t)\right)$$

3.3 Résultats numériques

On résout numériquement le système d'équations (26)-(27)-(28)-(29)-(30)-(31)-(32)-(33)-(34)-(35) par rapport à la variable de temps lente t à l'aide d'une simulation Éléments Finis temporelle de barres. On suppose que les efforts appliqués en $x = L$ sont de la forme suivante :

$$< f_s > (t) = f_0 + f_1 \cos 2\pi F t$$
$$f_s^*(\tau) = f_2 \cos 2\pi F \tau$$

où la fréquence lente vaut $F = 0,05$Hz et la fréquence rapide $F/\xi = 500$Hz. Ce cas, qui correspond à la pratique des essais CCF, permet d'écrire que u_0^* est une fonction de x et τ seulement. Le problème dynamique élastique (27)-(29)-(31) peut donc être résolu indépendamment du système d'équations (26)-(28)-(30)-(32)-(33)-(34)-(35), c'est-à-dire une seule fois, en pré-traitement.

Les simulations sont effectuées pour une barre en alliage de titane TA6V, dont les propriétés matériau à 350°C sont données dans [8]. Afin de valider la méthode d'homogénéisation temporelle, un calcul de référence, qui consiste à résoudre directement les équations temporelles du paragraphe 3.1, est mené sur l'intervalle de temps $[0;20]$s, qui correspond à une période de la sollicitation lente. La précision de ce calcul est assurée par le choix d'un pas de temps très fin (10^{-4}s), qui représente un vingtième de la période de la sollicitation rapide. Par ailleurs, un calcul des variables homogénéisées d'ordre zéro est mené sur le même intervalle de temps, avec un pas de temps de $0,04$s, ce qui représente un gain de 400 en termes de nombre d'itérations.

Les résultats de ces simulations sont donnés sur les figures 1 et 2. L'évolution de la déformation plastique de référence est représentée en tirets rouges et doit être comparée avec l'évolution de la déformation plastique homogénéisée d'ordre zéro, en pointillés bleus. Les deux courbes sont très proches l'une de l'autre, comme peut aussi en témoigner la table 1. Afin d'étudier l'influence de la prise en compte des termes d'inertie dans l'équation dynamique, des simulations ont également été réalisées dans le cas quasistatique, qui revient ici à supposer que $\rho = 0$ dans l'équation (24) ou encore que $\beta = 0$ dans l'équation (27). Les figures 1 et 2, ainsi que la table 1, montrent l'importance des termes d'inertie dans l'évaluation de la déformation plastique pour ces valeurs de fréquences de sollicitation, ainsi qu'encore une fois le bon accord entre les résultats du calcul de référence (ligne continue rouge) et ceux du calcul homogénéisé (ligne mixte bleue).

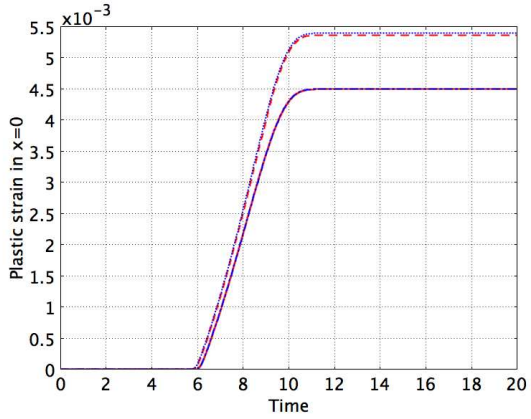

FIGURE 1 – Déformation plastique en $x = 0$: solution de référence et solutions homogénéisées d'ordre zéro (dynamique et quasistatique).

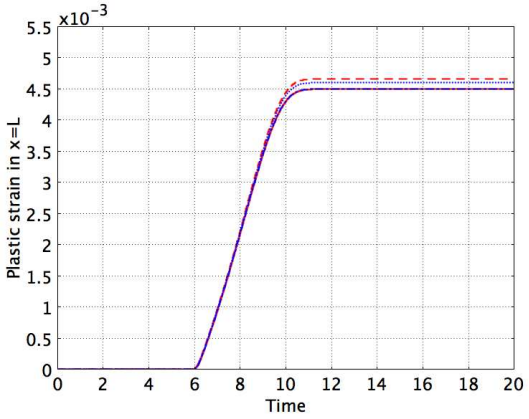

FIGURE 2 – Déformation plastique en $x = L$: solution de référence et solutions homogénéisées d'ordre zéro (dynamique et quasistatique).

Ces résultats montrent l'efficacité de la méthode d'homogénéisation qui permet ici d'envisager 400 fois moins d'itérations que le calcul de référence. Il devient donc possible de réaliser des simulations qui seraient inaccessibles par la résolution directe du problème de référence : ainsi la figure 3 montre l'évolution de la déformation plastique homogénéisée d'ordre zéro pour un intervalle d'une heure, ce qui revient à appliquer simultanément 180 cycles lents et 1 800 000 cycles rapides. En utilisant la méthode d'homogénéisation temporelle et un pas de temps de $0,04$s, 90 000 pas de temps doivent être traités, au lieu des 36 millions qui seraient requis pour un calcul de référence avec un pas de temps de 10^{-4}s.

TABLE 1 – Comparaison entre les différentes estimations de la déformation plastique à $t = 20$s.

Simulations	$x = 0$	$x = L$
Dynamique de référence	$5,361 \cdot 10^{-3}$	$4,654 \cdot 10^{-3}$
Dynamique homogénéisée (ordre 0)	$5,389 \cdot 10^{-3}$	$4,595 \cdot 10^{-3}$
Quasistatique de référence	$4,491 \cdot 10^{-3}$	$4,491 \cdot 10^{-3}$
Quasistatique homogénéisée (ordre 0)	$4,493 \cdot 10^{-3}$	$4,493 \cdot 10^{-3}$

Il est important également de noter qu'il n'y a pas de restriction sur l'amplitude de la sollicitation rapide comparativement à celle de la sollicitation lente : les simulations précédentes ont été obtenues quand le rapport de la première sur la seconde était d'un quart exactement. Il est même possible d'envisager le cas « extrême » où il n'y a pas de sollicitation lente, ce qui revient à étudier le cas de la fatigue à grand nombre de cycles (HCF). Là encore, l'accord entre calcul homogénéisé et calcul de référence est excellent, comme le montre la figure 4 dans le cas quasistatique pour des fréquences de sollicitation de $0,001$Hz et 10Hz.

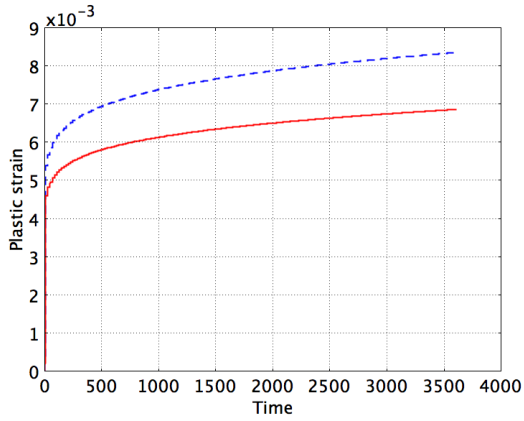

FIGURE 3 – Déformation plastique homogénéisée d'ordre zéro en $x = 0$ (tirets bleus) et en $x = L$ (ligne continue rouge).

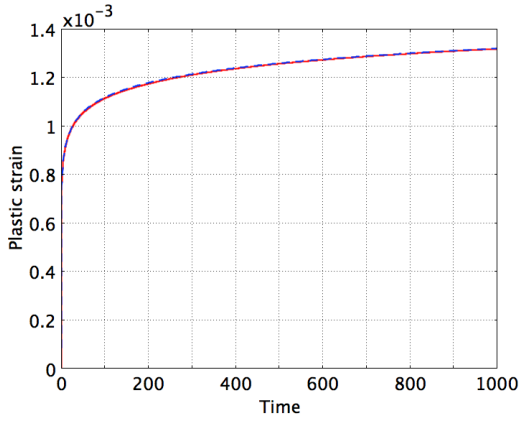

FIGURE 4 – Déformation plastique pour la solution de référence (ligne continue rouge) et la solution homogénéisée (tirets bleus) (cas HCF).

Avec l'aide de cette méthode d'homogénéisation, il devient possible d'évaluer un critère de fatigue associé à l'évolution de la déformation plastique : si l'on considère que la rupture survient quand la déformation plastique dépasse en un point un certain seuil $\varepsilon_m^{\mathrm{p}}$, on peut estimer le nombre de cycles à rupture en calculant le temps t_m vérifiant :

$$\varepsilon_m^{\mathrm{p}} = \int_0^{t_m} \left\langle \left\langle \frac{|\sigma_0 - X_0| - R_0 - k}{K} \right\rangle_+^n \mathrm{sign}(\sigma_0 - X_0) \right\rangle \mathrm{d}t$$

4 Application à une pièce réelle

Il est question maintenant de transposer la démarche précédente à l'étude d'une pièce réelle. L'exemple proposé est une éprouvette en alliage de titane, de géométrie complexe représentée sur la figure 5. Cette éprouvette est étudiée dans le cadre du projet européen PREMECCY [6], dont l'objectif est de caractériser la fatigue CCF des aubes de turbines dans les turboréacteurs. Ici, cette éprouvette est soumise à l'une de ses extrémités à une sollicitation normale ($0,001$Hz) associée à une sollicitation transverse (10Hz), et est encastrée à son autre extrémité. Les équations considérées sont les relations (5)-(6)-(7)-(9) ainsi que le modèle viscoplastique à deux écrouissages de [8] dans son expression tridimensionnelle. Elles sont résolues sur $[0;10\,000]$s avec un pas de temps de 2s. La figure 6 montre l'évolution de la déformation plastique longitudinale après homogénéisation à l'ordre zéro à l'extrémité de l'éprouvette qui est soumise aux deux sollicitations.

FIGURE 5 – Géométrie d'éprouvette utilisée dans le projet européen PREMECCY [6]

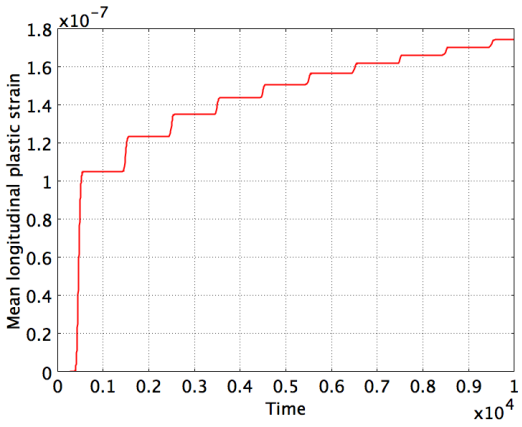

FIGURE 6 – Évolution de la déformation plastique longitudinale homogénéisée (ordre 0) à l'extrémité de l'éprouvette

5 Conclusion et perspectives

L'efficacité de la méthode d'homogénéisation temporelle est montrée ici aussi bien dans le cas d'exemples académiques que d'exemples industriels. Elle permet de n'effectuer les résolutions d'équations qu'à l'échelle de temps lente seulement, en introduisant l'effet moyenné des cycles à haute fréquence dans les équations vérifiées par les quantités homogénéisées à l'ordre zéro. Il devient alors possible d'évaluer la durée de vie de structures soumises à deux sollicitations périodiques de fréquences très différentes, pour peu que l'on ait pu identifier le seuil de plasticité menant à la rupture. Comme on a vu sur la figure 4 que la méthode d'homogénéisation est applicable dans le cas d'une seule sollicitation haute fréquence (HCF), il est envisageable de réaliser l'identification des paramètres de la loi d'évolution à partir des résultats de fatigue HCF sur les éprouvettes étudiées. Il sera alors possible pour ces mêmes éprouvettes de prédire des durées de vie dans le cas de la fatigue CCF, et de les comparer avec les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de la campagne d'essais du projet européen PREMECCY [6].

Références

[1] T. Guennouni, D. Aubry. *Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargement cyclique*, CR Académie des Sciences Paris (Série II) 303(20), Elsevier, pp. 1765-1768, 1986.

[2] D. Aubry, G. Puel. *CCF modelling with use of a two-timescale homogenization model*, Procedia Engineering 2(1), Elsevier, pp. 787-796, 2010.

[3] D. Aubry, G. Puel. *Two-timescale homogenization method for the modeling of material fatigue*, IOP Conferences Series : Materials Science and Engineering 10, IOP Publishing, 012113, 2010.

[4] C. Oskay, J. Fish. *Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 61, Wiley, pp. 329-359, 2004.

[5] A. Devulder, D. Aubry, G. Puel. *Two-time scale fatigue modelling : application to damage*, Computational Mechanics 45(6), Springer, pp. 637-646, 2010.

[6] PREdictive MEthods for Combined CYcle fatigue in gas turbines (PREMECCY), EU Project (6th RTD Framework Programme), http ://premeccy.mecc.polimi.it/

[7] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, 1980.

[8] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.