



**HAL**  
open science

# Prévision du Comportement Vibratoire des Redresseurs Sectorisés Monobloc de Turbomachines Aéronautiques

Amadou Ciré Sall, Fabrice Thouverez, Laurent Blanc, Pierrick Jean

## ► To cite this version:

Amadou Ciré Sall, Fabrice Thouverez, Laurent Blanc, Pierrick Jean. Prévision du Comportement Vibratoire des Redresseurs Sectorisés Monobloc de Turbomachines Aéronautiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592730

**HAL Id: hal-00592730**

**<https://hal.science/hal-00592730>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Comportements Dynamique et Stochastique des Redresseurs Monobloc de Turbomachines Aéronautiques

A. C. Sall<sup>1,2</sup>, F. Thouverez<sup>1</sup>, L. Blanc<sup>1</sup>, P. Jean<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LTDS, Ecole Centrale de Lyon, France, {amadou.sall, fabrice.thouverez, laurent.blanc}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> Snecma Groupe SAFRAN, Site de Villaroche, France, pierrick.jean@sneema.fr

---

### Résumé —

Les redresseurs de compresseur de turbomachine axiale sont soumis à de la fatigue vibratoire. Or leur réalisation par assemblage de secteurs monobloc rend la prédiction du comportement vibratoire de chaque secteur difficile par les méthodes déterministes du fait de l'absence de symétrie cyclique et de la sensibilité au désaccordage. Le but est de présenter une stratégie de calcul robuste basée sur une modélisation stochastique de la structure. La méthodologie a été développée sur un modèle académique puis appliquée sur un cas industriel.

**Mots clés** — Vibrations des aubes, Désaccordage, Incertitudes, Chaos polynomial.

---

### Introduction

Le dimensionnement en fatigue des composants de turbomachines aéronautiques tels que les roues aubagées passe nécessairement par leur analyse dynamique. En faisant l'hypothèse de symétrie cyclique, l'étude dynamique d'un seul secteur suffit pour connaître le comportement de la roue complète moyennant une décomposition de la réponse en séries de Fourier [1, 2, 3, 4]. Cette technique assure un gain en temps de calcul considérable mais également en précision car il est possible d'utiliser des maillages très fins. Cependant, les dispersions géométriques et matérielles dues à la fabrication, sources de désaccordage, font que l'hypothèse de symétrie cyclique est éloignée de la réalité.

En effet, le désaccordage influe de façon non négligeable sur le comportement vibratoire des roues aubagées en localisant une bonne partie de l'énergie sur un nombre restreint d'aubes pouvant conduire à une fatigue vibratoire prématurée de la pièce [5, 6, 7, 8]. Ce phénomène de localisation modale est conditionné d'une part, par la raideur de couplage entre les aubes et le disque et d'autre part, par le taux de désaccordage.

Les redresseurs correspondent aux différents stators situés dans les étages de turbomachines aéronautiques. Ils ont pour rôle de redresser le flux d'air provenant des rotors situés en amont en vue d'obtenir une poussée maximale en sortie de la turbomachine. Le passage à une technologie de redresseurs sectorisés monobloc amène à construire des modèles de secteurs de redresseur indépendants ce qui prive des conditions de symétrie cyclique même dans le cas accordé. Le comportement vibratoire d'un secteur de redresseur accordé est caractérisé par une forte densité modale dans certaines plages de fréquences, correspondant principalement à des modes de flexion ou de torsion de pale. Il en résulte une forte sensibilité de ces modes au désaccordage présent dans le redresseur réel.

L'objet de ces travaux est de développer une stratégie robuste de prédiction du comportement vibratoire des redresseurs sectorisés afin d'aider au dimensionnement et au contrôle. En effet, en déterminant les zones les plus "sensibles" du secteur de redresseur avec une précision maximale, les BE pourront optimiser le positionnement de jauges d'extensométrie sur les redresseurs prototypes.

Dans une première partie, des résultats généraux relatifs au comportement dynamique des redresseurs sectorisés et à leur sensibilité au désaccordage seront présentés. Le détail de ces résultats peut être trouvé dans [9]. La deuxième partie traitera de la méthode stochastique qui a été mise en place et de son application sur un modèle académique. Dans la dernière partie, la méthodologie est validée sur un cas industriel de secteur de redresseur.

# 1 Comportement dynamique des redresseurs sectorisés

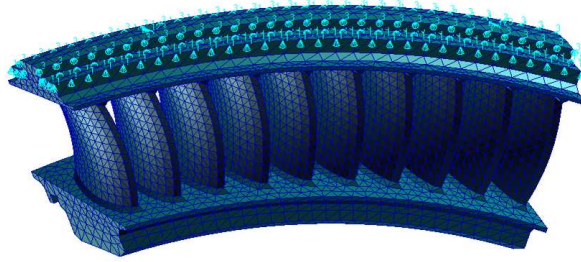


FIG. 1 – Modèle numérique du secteur de redresseur étudié

La figure 1 représente le modèle numérique qui a servi pour les différentes simulations et qui est situé sur le premier étage du compresseur de recherches CREATE. CREATE (Compresseur de Recherche pour l'Étude des effets Aérodynamiques et TEchnologiques) est un compresseur de recherche tri-étage spécialement conçu pour la validation de méthodes de simulation [10]. Le redresseur complet est composé de plusieurs secteurs indépendants et possédant des nombres de pales différents. Le secteur étudié, nommé RD1 dans la suite, comporte 10 pales. En condition de fonctionnement moteur, la virole supérieure du RD1 est encastree sur le carter du compresseur, cette condition limite a donc été retenue dans tous les calculs.

Un calcul de modes propres a été fait sur la version accordée du modèle de la figure 1. Suite au tracé de l'évolution de la fréquence propre vis-à-vis du numéro du mode, la courbe de la figure 2 est obtenue.

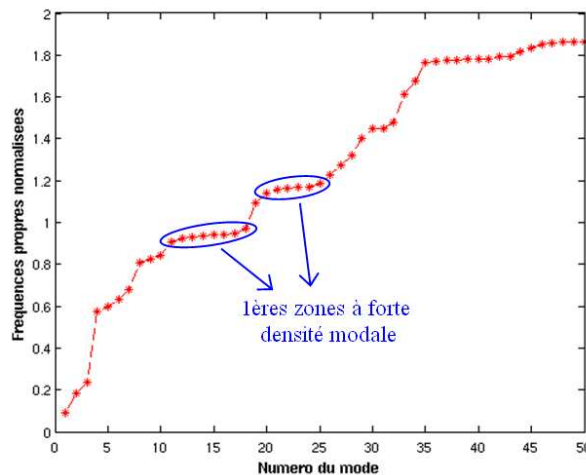


FIG. 2 – Evolution de la fréquence propre en fonction du numéro du mode

Il apparaît des zones à forte densité modale qui se caractérisent par la présence de paliers principalement constitués de modes de flexion (1F) et de torsion (1T) de pale. Les modes présents dans les paliers sont très proches d'un point de vue fréquentiel et en terme de déformée propre ; ils sont donc susceptibles d'être davantage sensibles au désaccordage. En effet, des calculs de modes propres ont été faits pour différents motifs de désaccordage et les résultats obtenus ont été comparés au modèle accordé via un critère de MAC [11]. Les résultats obtenus disponibles dans [9] ont montré effectivement que les modes situés dans les paliers sont sensibles au désaccordage. La réponse forcée d'un secteur de redresseur désaccordé est de ce fait difficile à prédire étant donné que la forme propre de certains modes change radicalement. C'est là que réside tout l'intérêt de s'appuyer sur une méthode stochastique qui permettrait de déterminer statistiquement les zones du secteur les plus critiques.

## 2 Méthode de projection des modes propres sur une base stochastique

Le but de cette méthode est, par la résolution d'un problème aux valeurs propres avec des paramètres stochastiques, d'obtenir une expression polynomiale en  $\xi$  des modes propres aléatoires [12], où  $\xi$  est la variable aléatoire qui pilotera le désaccordage d'un ou plusieurs paramètres. La méthode sera ensuite appliquée à un modèle de treillis de poutres de type Euler-Bernoulli, puis appliquée à un cas industriel.

### 2.1 Mise en équation

Le chaos polynomial de dimension  $Q$  et d'ordre  $C$  est défini comme l'ensemble des polynômes d'Hermite multidimensionnels en  $\{\xi_1, \dots, \xi_Q\}$  et de degré inférieur ou égal à  $C$ ; les  $\xi_i$  étant des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites [13]. Pour plus de simplicité, seul le chaos polynomial unidimensionnel en  $\xi$  sera présenté. Les polynômes d'Hermite unidimensionnels sont obtenus par la formule :

$$\Psi_n(\xi) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad n = \{0, \dots, C\} \quad (1)$$

C'est sur cette base de polynômes orthogonaux que tous les paramètres aléatoires du système seront décomposés. Pour simplifier le problème davantage, seul le module d'Young a été considéré comme étant aléatoire, la masse restant déterministe.

Le problème aléatoire aux valeurs propres s'écrit [12] :

$$\left( [K] + [\widetilde{K}] - \widetilde{\omega}_k^2 [M] \right) \{\widetilde{\phi}_k\} = 0 \quad (2)$$

où  $[\widetilde{K}]$  désigne la partie aléatoire de la matrice de raideur et  $\widetilde{\omega}_k$  et  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  sont respectivement les pulsations propres aléatoires et les vecteurs propres aléatoires à déterminer.

Les  $\widetilde{\omega}_k^2$  sont décomposés sur la base des polynômes d'Hermite  $\Psi_n(\xi)$  :

$$\widetilde{\omega}_k^2 = \omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n(\xi) \quad (3)$$

où  $N$  correspond au nombre de polynômes d'Hermite qui interviennent dans la décomposition.

On décompose  $\{\widetilde{\phi}_k\}$  sur la base modale déterministe en faisant l'hypothèse qu'elle ne contient aucun mode propre de multiplicité supérieure à un :

$$\{\widetilde{\phi}_k\} = \sum_{p=1}^P \widetilde{\lambda}_p \{\phi_p\} \quad (4)$$

où  $P$  correspond au nombre de modes de la base modale déterministe retenus pour la projection et  $\widetilde{\lambda}_p$  est projeté sur la base du chaos polynomial :

$$\widetilde{\lambda}_p = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \quad (5)$$

Suite à la double projection, les vecteurs propres aléatoires s'écrivent :

$$\{\widetilde{\phi}_k\} = \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \{\phi_p\} \quad (6)$$

Enfin, par le biais d'une décomposition de type Karhunen-Loève, la partie aléatoire  $[\widetilde{K}]$  de la matrice de raideur globale s'exprime de la manière suivante :

$$[\widetilde{K}] = [K_1] \Psi_1(\xi) = [K_1] \xi \quad (7)$$

où  $[K_1]$  est la partie de la matrice  $[K]$  où s'applique l'aléa.

Tous les paramètres ayant été définis, le problème aléatoire aux valeurs propres à résoudre peut s'écrire :

$$\left( ([K] + [K_1]\xi) - \omega_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Psi_n(\xi) [M] \right) \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_p^n \Psi_n(\xi) \{\phi_p\} = 0 \quad (8)$$

Les coefficients à déterminer sont les  $a_n$  et les  $\lambda_p^n$ . Ils sont calculés grâce à un algorithme de résolution itératif de type Newton-Raphson.

## 2.2 Application

Le modèle simplifié étudié est le modèle poutres présenté sur la figure 3. Sa structure tend à se rapprocher de celle d'un secteur de redresseur à deux pales. Les viroles qui assurent le transfert vibratoire entre les deux pales ont été définies comme étant plus raides que celles-ci pour plus de réalisme.

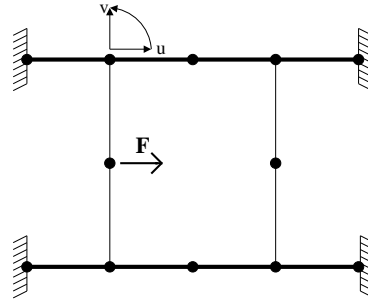


FIG. 3 – Modèle poutres étudié

Seuls les modules d'Young des pales ont été considérés comme étant aléatoires. Deux variables aléatoires ont été considérées afin que chacune des pales soit désaccordée indépendamment de sa voisine. La méthode stochastique présentée pour le cas d'une variable aléatoire a été étendue au cas de deux variables. Le module d'Young aléatoire de chacune des pales s'écrit :

$$\tilde{E}_i = \bar{E} \left( 1 + \frac{\sigma_E}{\bar{E}} \xi_i \right) = \bar{E} (1 + \delta \xi_i) \quad (9)$$

où  $\bar{E}$  est le module d'Young moyen,  $\sigma_E$  est l'écart-type et  $\xi_i$  est la variable aléatoire gaussienne centrée réduite (v.a.g.c.r.) relative à la pale  $i$ .

### 2.2.1 Calcul des modes propres aléatoires

Les figures 4 et 5 représentent les surfaces de réponses qui permettent de suivre l'évolution de la pulsation propre et du vecteur propre du ddl de flexion de la pale 1 pour différents tirages de modules d'Young des pales. L'intérêt est de comparer les surfaces de réponses obtenues par la méthode de Monte Carlo classique et par la méthode du chaos présentée précédemment.

Il y a globalement un effet de convergence lorsque le chaos passe de l'ordre 3 à l'ordre 5. En effet, tant dans le cas de l'évolution des pulsations propres (qui est la conséquence première du désaccordage en module d'Young) que dans celui de l'évolution des déplacements propres, la convergence est plutôt satisfaisante étant donné que les champs de points obtenus par la méthode de Monte Carlo et par la méthode du chaos sont très proches. Il est donc possible de suivre de manière assez fine l'évolution d'un mode propre donné en fonction du désaccordage.

### 2.2.2 Calcul des premiers moments de la réponse forcée aléatoire

L'obtention des modes propres aléatoires par la méthode qui vient d'être présentée a permis de déterminer les premiers moments (moyenne et écart-type) de la réponse forcée du modèle. Le déplacement est donné par l'expression :

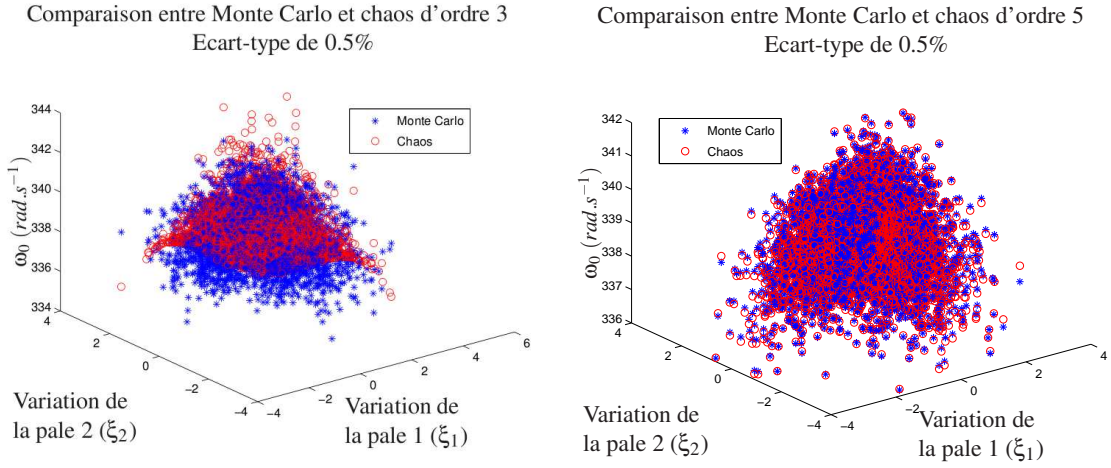


FIG. 4 – Surface de réponses des pulsations propres - Influence de l'ordre du chaos polynomial

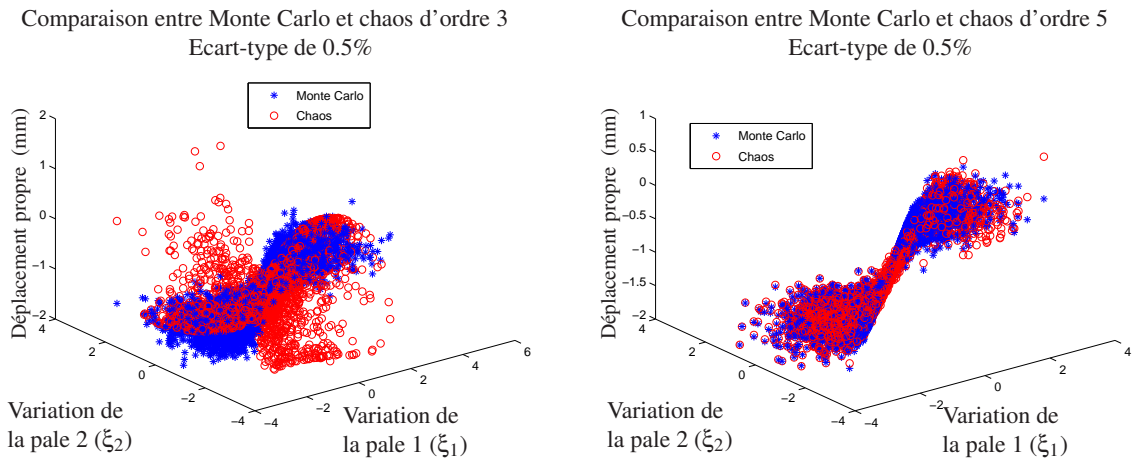


FIG. 5 – Surface de réponses des vecteurs propres - Influence de l'ordre du chaos polynomial

$$\{U\} = \sum_j \frac{\{\widetilde{\Phi}_j\} \left( \{\widetilde{\Phi}_j\}^T \{F\} \right)}{-\omega^2 + \widetilde{\omega}_j^2 (1 + i\eta)} \quad (10)$$

où  $j$  correspond aux différents modes retenus lors de la détermination des modes propres aléatoires,  $\{F\}$  est le vecteur force et  $\eta$  est l'amortissement modal. Les modes propres aléatoires  $\{\widetilde{\Phi}_i\}$  sont projetés sur la base du chaos polynomial, ce qui permet de déterminer le vecteur propre correspondant à un tirage donné. Ainsi, pour un grand nombre de tirages et en utilisant la méthode de Monte Carlo sur l'équation 10, il est possible de déterminer les premiers moments statistiques de la réponse sans effectuer de calculs matriciels coûteux. Pour valider les résultats, la moyenne du déplacement obtenue par la méthode présentée a été comparée à celle obtenue par la méthode de Monte Carlo directement appliquée au modèle déterministe ce qui correspond à la résolution de :

$$\left( (1 + i\eta) \sum_{q=0}^Q [K_q] \Psi_q - \omega^2 [M] \right) \{U\} = \{F\} \quad (11)$$

où  $Q$  correspond au nombre total de variables aléatoires.

L'étude a été faite sur le modèle de la figure 3 avec les conditions suivantes :

- Force unitaire appliquée sur le ddl de flexion de la première pale
- Ecart-type relatif  $\delta$  de 0.5%
- Amortissement modal de 0.1%
- 20000 tirages

Les résultats qui sont représentés sur la figure 6 montrent la moyenne et à l'écart-type du déplacement du ddl où est appliquée la force.

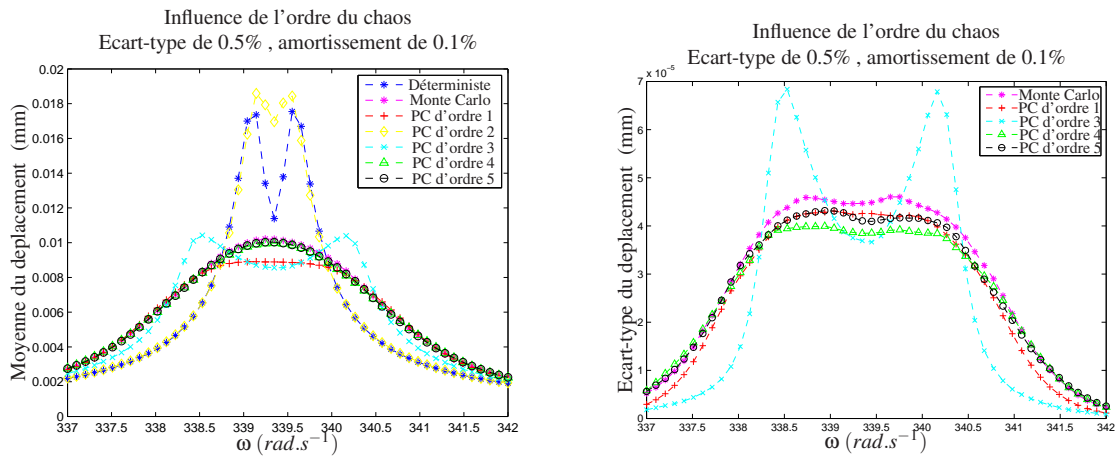


FIG. 6 – Réponse forcée : moyenne du déplacement du ddl de flexion de la 1ère pale (gauche) et erreur relative par rapport à Monte Carlo (droite) - Influence de l'ordre du chaos polynomial

La figure 6 représente d'une part, la moyenne du déplacement du ddl de flexion de la 1ère pale pour une succession de pulsations proches des deux premières pulsations propres du modèle et d'autre part, l'écart-type du déplacement du même ddl. Sur le graphe de la moyenne, la courbe déterministe fait apparaître les deux pics correspondant aux deux premiers modes propres du modèle qui sont des modes de flexion pure de pale. Cependant, selon le désaccordage introduit pour une même fréquence d'excitation, on a une amplitude qui varie fortement étant donné que le désaccordage a tendance à changer les fréquences propres. Cela explique le fait que la moyenne de Monte Carlo soit lissée contrairement à la courbe déterministe. On note que la convergence du chaos polynomial est obtenue à partir de l'ordre 4, ordre à partir duquel l'écart entre le Monte-Carlo et le chaos est globalement très faible. En effet, l'écart relatif maximal relevé est de 1.6% à l'ordre 5 ce qui est raisonnable. Au regard de l'écart-type du déplacement, la convergence est meilleure à l'ordre 5. En effet, l'ordre 1 par exemple s'écarte du Monte-Carlo à hauteur des pulsations extrêmes alors que l'ordre 5 se rapproche au mieux de la référence sur toute la plage de pulsations. L'erreur relative maximale relevée est de l'ordre de 8%. Cela reste cependant acceptable comme résultat car la configuration étudiée est plus critique à cause des viroles qui ont été considérées comme étant beaucoup plus raides que les pales. Cela a tendance à confondre les fréquences propres des deux modes étudiés. Cela a été vérifié en assouplissant davantage les viroles et une convergence de la méthode a été observée dès l'ordre 3 avec une erreur relative maximale beaucoup plus faible.

### 3 Application industrielle

Il est à présent question du modèle numérique de la figure 1 qui représente un secteur de redresseur de dix pales de la machine CREATE2-bis. Afin de déterminer les modes propres aléatoires de ce modèle par la méthodologie stochastique présentée plus haut, il est nécessaire de réduire la taille du modèle pour le rendre plus exploitable.

#### 3.1 Réduction du modèle

La première étape a été de réduire le modèle numérique par la méthode de Craig-Bampton [14]. Un super-élément a été créé à partir d'un secteur d'une pale en veillant à garder les ddls de frontière qui

allaient servir à l'assemblage des différents secteurs. La convergence du modèle réduit a été vérifiée par rapport à un modèle de référence.

### 3.2 Calcul des modes propres aléatoires

A partir du modèle 3D réduit, les 17 modes propres aléatoires (modes 10 à 26 sur la figure 2) qui composent les paliers ont été projetés sur un chaos polynomial d'ordre 3 et sur une base modale constituée des 35 premiers modes propres déterministes. Pour que le système reste de taille raisonnable, seules deux variables aléatoires ont été retenues et le désaccordage étudié est de type ABAB ( $\xi_1$  étant la variable aléatoire relative à A et  $\xi_2$  celle relative à B). Il serait évidemment très coûteux de considérer autant de variables que d'aubes, raison pour laquelle il est préférable d'étudier des motifs de désaccordage. Les déplacements propres aléatoires ont ainsi pu être calculés sur les ddls physiques pour 20000 tirages et le critère d'erreur 12 a été établi afin de juger de la convergence de la méthode. Soit  $\{\Phi_{mc}\}_k^i$  le vecteur propre aléatoire relatif au  $k$ -ième mode propre aléatoire et au  $i$ -ème tirage et  $\{\Phi_{pc}\}_k^i$  le développement de ce même mode propre aléatoire sur la base du chaos polynomial. Le critère d'erreur suivant est défini pour le  $k$ -ième mode et pour le  $i$ -ème tirage :

$$err_k^i = \frac{\|\{\Phi_{mc}\}_k^i - \{\Phi_{pc}\}_k^i\|}{\|\{\Phi_{mc}\}_k^i\|} \quad (12)$$

Ce critère permet d'avoir un estimateur global de l'erreur car pour chaque mode  $k$  et pour chaque tirage  $i$ , une valeur d'erreur globale qui tient compte de l'erreur commise sur les déplacements de chacun des noeuds est obtenue. Suite aux 20000 tirages effectués, une moyenne et un écart-type de l'erreur  $err_k^i$  peuvent être déterminés pour chaque mode. Le résultat obtenu est représenté sur la figure 7.

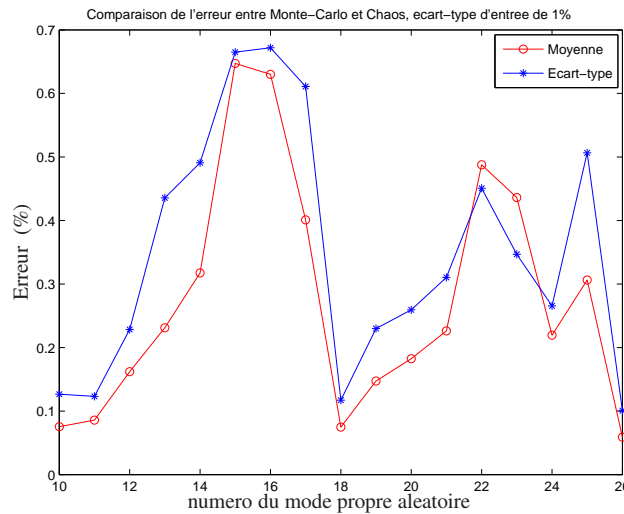


FIG. 7 – Moyenne et écart-type de l'erreur commise entre Monte-Carlo et chaos, sur chaque mode propre aléatoire, et pour un écart-type d'entrée de 1%

La moyenne de l'erreur obtenue est globalement inférieure à 1% et il en est de même pour son écart-type. Ce résultat est très satisfaisant car il montre que le chaos est suffisamment prédictif du point de vue de la prédiction des modes propres aléatoires. Etant donné que la réponse forcée est calculée par superposition modale, une bonne prédiction des modes devrait permettre d'être suffisamment prédictif sur la réponse forcée aléatoire. De plus, le gain en temps est considérable lors du calcul des modes propres aléatoires. En effet, tous les calculs ont été effectués sur la même machine composée d'un processeur double-coeur et l'on obtient un facteur 6 entre les temps de calculs par la méthode du chaos et par simulations de Monte Carlo. L'avantage de la méthode est que les modes propres aléatoires ne sont à calculer qu'une seule fois par le chaos pour ensuite obtenir toutes les réalisations voulues avec un temps de calcul faible, alors qu'avec la méthode de Monte Carlo, de nouveaux tirages nécessitent à nouveau d'effectuer autant de calculs déterministes qui sont coûteux en temps.



## Conclusion

Les problèmes liés à la prédiction du comportement dynamique des redresseurs sectorisés désaccordés ont été présentés. Une approche stochastique qui s'appuie sur une projection des modes propres sur la base du chaos polynomial a été mise en place afin de déterminer les modes propres aléatoires du système pour suivre les effets du désaccordage. Cette approche a été validée sur un modèle poutres simplifié. En effet, il y a une bonne corrélation entre la méthode de Monte Carlo et la méthode du chaos polynomial. L'approche a ensuite été appliquée à un cas industriel pour montrer son efficacité. Les modes propres aléatoires du modèle 3D ont pu être calculés par la méthodologie présentée et avec un gain de temps conséquent.

La principale perspective de ces travaux est d'effectuer un calcul de réponse forcée sur le cas industriel en considérant des efforts réalistes obtenus par un calcul instationnaire tridimensionnel du chargement fluide et en tenant compte des taux et des motifs de désaccordage. Le but sera, d'une part, d'en déduire une enveloppe des niveaux vibratoires probables exploitable pour une estimation de la durée de vie, et d'autre part, d'identifier les zones les plus susceptibles de révéler les réponses extrêmes du redresseur ; il s'agira d'y positionner des jauges d'extensométrie lors des tests de prototypes.

## Références

- [1] D. L. Thomas. Dynamics of rotationally periodic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(1) :81–102, 1979.
- [2] R. Henry. Calcul des fréquences et modes propres des structures répétitives circulaires. 4 :61–82, 1980.
- [3] R. Valid and R. Ohayon. Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques. In *La Recherche Aérospatiale*, volume 4, page 251–263, August 1985.
- [4] F. W. Williams, D. Kennedy, G. Wu, and J. Zhou. Exact calculation of natural frequencies of repetitive structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 4(5) :553–568, 1996.
- [5] D. S. Whitehead. Effect of mistuning on the vibration of turbo-machine blades induced by wakes. *ARCHIVE : Journal of Mechanical Engineering Science 1959-1982 (vols 1-23)*, 8(1) :15–21, 1966.
- [6] R. C. F. Dye and T. A. Henry. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies. *ASME Journal of Engineering for Power*, 91(3) :182–188, 1969.
- [7] E. Capiiez-Lernout and C. Soize. Specifying manufacturing tolerances for a given amplification factor : a nonparametric probabilistic methodology. 2003.
- [8] S. H. Shin, S. J. Lee, and H. H. Yoo. Statistical approach to analyze vibration localization phenomena in periodic structural systems. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 19(7) :1405–1413, 2005.
- [9] A. C. Sall, F. Thouverez, L. Blanc, P. Jean, and X. Ottavy. Prediction of the vibratory behaviour of monoblock sectorised stator vanes. Proceedings of ASME Turbo Expo 2010, June 2010.
- [10] X. Ottavy, N. Gourdain, and A. Vouillarmet. Experimental and numerical investigation of unsteady flows in a high speed three stages compressor. Proceedings of European Turbomachinery Conference, page 247–266, 2009.
- [11] R. J. Allemang. The modal assurance criterion - twenty years of use and abuse. In *Journal of Sound and Vibration*, page 14–21, August 2003.
- [12] O. Dessombz. *Analyse Dynamique de Structures comportant des Paramètres Incertains*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, FR, December 2000.
- [13] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [14] R. R. Craig and M. C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.