

Réduction de modèles éléments finis pour les vibrations non linéaires. Application à des nano-structures piézoélectriques

O. Thomas¹, S. Nezamabadi¹, J.-F. Deü¹, A. Lazarus^{1,2}

¹ Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, {olivier.thomas, saeid.nezamabadi, jean-francois.deu}@cnam.fr

² Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA, alazarus@mit.edu

Résumé — On s'intéresse dans ce travail au calcul de vibrations de structures complexes avec non-linéarités géométriques, en régime forcé permanent. Pour cela, il s'agit de calculer des régimes vibratoires périodiques, par des méthodes de suivi de branches (ou continuation), pour obtenir une cartographie du comportement du système en fonction d'un paramètre de contrôle. Pour réduire les coûts de calculs, plusieurs stratégies de réduction du modèle élément-finis sont proposées et mis en œuvre sur une nano-structure stratifiée piézoélectrique.

Mots clés — vibrations, non linéaire, piézoélectrique, stratification, périodique.

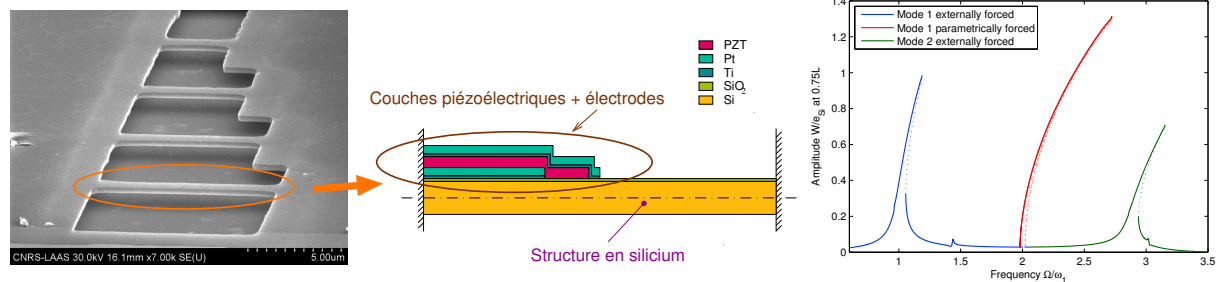


FIG. 1 – Exemple de nano-structure étudiée dans ce travail et réponse en régime forcé sinusoïdal.

L'objectif de ce travail est de fournir un outil de simulation efficace du comportement vibratoire non linéaire de structure minces stratifiées piézoélectriques. On s'intéresse en particulier à des nano-systèmes électromécaniques (NEMS en anglais) résonants, potentiellement utilisables comme capteur de masse, comme filtre électronique sélectif ultra haute fréquence ou comme cellule à mémoire binaire. Dans le premier cas, il s'agit de mesurer avec précision la fréquence de résonance d'un mode donné et de détecter une éventuelle variation de celle-ci lorsque la structure est alourdie par l'objet dont on veut détecter la présence ou mesurer la masse. Certains auteurs sont capables de descendre à des résolutions massiques de l'ordre du zeptogramme (10^{-21} grammes) [1]. Dans la seconde application, on utilise la fonction de transfert mécanique du système, au voisinage d'un mode donné de la structure, comme filtre résonant [2]. Enfin, dans le troisième cas, on tire partie de la coexistence de deux solutions stables périodiques déphasées lorsque la structure est sujette à une excitation paramétrique [3]. Pour coupler les oscillations mécaniques de ces systèmes au circuit électronique environnant (mise en vibration et détection), on utilise des couches de matériaux piézoélectriques.

Plusieurs propriétés de ces systèmes sont à considérer. En premier lieu, la géométrie stratifiée de ces structures, incluant des couches piézoélectriques, est prise en compte pour obtenir des modèles les plus prédictifs possibles (Fig. 1). Le couplage électromécanique avec le circuit électronique environnant est aussi inclus dans le modèle. Les procédés de fabrication utilisés créent des contraintes résiduelles, différentes d'une couche à l'autre, dont il s'agit d'évaluer l'influence, d'une part sur le flambage éventuel de la structure et d'autre part sur ses fréquences propres. Enfin, le cœur de cette étude est de simuler le comportement vibratoire non linéaire géométrique de ces structures. En effet, d'une part les conditions d'utilisation de ces systèmes imposent des grandes amplitudes de vibrations, suffisantes pour créer des courbes de résonance incurvées [4]. D'autre part, il s'agit de simuler ces systèmes en excitations paramétriques (Fig. 1).

On se concentre dans ce travail sur la mise en place de stratégies de simulation du comportement non linéaire vibratoire électromécanique du système, visant à être utilisées en phase de conception. On souhaite calculer le régime permanent en vibrations forcées, sous forme de solutions périodiques, pour « cartographier » le régime vibratoire non linéaire en fonction d'un paramètre de contrôle (l'amplitude ou la fréquence de l'excitation, par exemple). Après discrétisation par la méthode des éléments-finis (EF), on utilise une méthode numérique de continuation, pour calculer directement les solutions périodiques.

Ce travail expose plus particulièrement différentes stratégies de calcul des solutions périodiques du système, à partir du modèle discret EF non linéaire. Celui-ci est fondé sur une cinématique d'Euler-Bernouilli, sur des hypothèse de von Kármán pour les non-linéarités géométriques et sur une formulation électromécanique originale [5]. Plusieurs méthodes, décrites ci-après, sont testées et comparées, en terme de précision et de temps de calcul.

1. La méthode de référence est une intégration temporelle du modèle EF. Elle est coûteuse en temps de calcul et ne permet de simuler de manière standard que les solutions périodiques stables.
2. Une seconde méthode consiste à écrire les inconnues du systèmes EF sous forme de série de Fourier (méthode de l'équilibrage harmonique, HBM) et de résoudre le système algébrique non linéaire obtenu par une méthode de continuation. Ici, on utilise la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [6], dont on se propose de tester plusieurs implémentations. La première est celle du logiciel MANlab ; la seconde est dédié et s'applique directement aux non-linéarités cubiques du système. Ces stratégies sont a priori coûteuse, car les systèmes algébriques sont de grande taille. C'est pour cette raison qu'on propose de tester des méthodes de réduction.
3. Une première méthode de réduction consiste à projeter le modèle EF non linéaire sur la base des modes propres du problème linéaire associé. Ici, le choix des modes à conserver dans la base est délicat, car il faut garder un nombre suffisant de modes à mouvement axial prépondérant, pour bien représenter le couplage non linéaire axial/transverse. Ce choix est de plus rendu difficile dans le cas présent de structures stratifiées, car ce couplage existant aussi au stade linéaire, il n'existe pas de modes « purement transverses » et « purement axiaux ». Après obtention du modèle réduit, celui-ci sera simulé par l'une ou l'autre des méthodes 1 ou 2 décrites ci-dessus.
4. Enfin, on se propose de tester une seconde méthode de réduction, fondée sur la base modale précédente enrichie par des « dérivées modales », permettant de remplacer les modes axiaux [7]. Si, a priori, la taille du modèle réduit est analogue, c'est le choix des modes à conserver dans la base qui est facilité.

Références

- [1] Y. T. Yang, C. Callegari, X. L. Feng, K. L. Ekinci, and M. L. Roukes. Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing. *Nano Letters*, 6(4) :583–586, 2006.
- [2] V. Gouttenoire, T. Barois, S. Perisanu, J.-L. Leclercq, S. T. Purcell, P. Vincent, and A. Ayari. Digital and fm demodulation of a doubly clamped single-walled carbon-nanotube oscillator : Towards a nanotube cell phone. *Small*, 6(9) :1060–1065, 2010.
- [3] I. Mahboob and H. Yamaguchi. Bit storage and bit flip operations in an electromechanical oscillator. *Nature nanotechnology*, 3 :275–279, 2008.
- [4] R. B. Karabalin, M. H. Matheny, X. L. Feng, E. Defaÿ, G. Le Rhun, C. Marcoux, S. Hentz, P. Andreucci, and M. L. Roukes. Piezoelectric nanoelectromechanical resonators based on aluminum nitride thin films. *Applied Physics Letters*, 95 :103111, 2009.
- [5] O. Thomas, J.-F. Deü, and J. Ducarne. Dynamics of an elastic structure with piezoelectric patches : finite-element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 80(2) :235–268, 2009.
- [6] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.
- [7] P. M. A. Slaats, J. de Jongh, and A. A. H. J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 54(6) :1155–1171, 1995.