HAL
open science

Réduction de modèles éléments finis pour les vibrations non linéaires. Application à des nano-structures piézoélectriques

Olivier Thomas, Saeid Nezamabadi, Jean-François Deü, Arnaud Lazarus

To cite this version:

Olivier Thomas, Saeid Nezamabadi, Jean-François Deü, Arnaud Lazarus. Réduction de modèles éléments finis pour les vibrations non linéaires. Application à des nano-structures piézoélectriques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592724

HAL Id: hal-00592724

https://hal.science/hal-00592724v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Réduction de modèles éléments finis pour les vibrations non linéaires. Application à des nano-structures piézoélectriques

O. Thomas[1], S. Nezamabadi[1], A. Lazarus[1,2], J.-F. Deü[1]

[1] *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Système Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, {olivier.thomas, saeid.nezamabadi, jean-francois.deu}@cnam.fr*
[2] *Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA, alazarus@mit.edu*

Résumé — On s'intéresse dans ce travail au calcul de vibrations de structures complexes avec non linéarités géométriques, en régime forcé permanent. Pour cela, il s'agit de calculer des régimes vibratoires périodiques, par des méthodes de suivi de branches (ou continuation), pour obtenir une cartographie du comportement du système en fonction d'un paramètre de contrôle. Pour réduire les coûts de calculs, plusieurs stratégies de réduction du modèle d'éléments finis sont proposées et mis en œuvre sur une nano-structure stratifiée piézoélectrique.
Mots clés — vibrations, non linéaire, piézoélectrique, stratification, périodique.

1 Introduction

L'objectif de ce travail est de fournir un outil de simulation efficace du comportement vibratoire non linéaire de structures minces stratifiées piézoélectriques. On s'intéresse en particulier à des nano-systèmes électromécaniques (NEMS en anglais) résonants, potentiellement utilisables comme capteur de masse, comme filtre électronique sélectif ultra haute fréquence ou comme cellule à mémoire binaire. Dans le premier cas, il s'agit de mesurer avec précision la fréquence de résonance d'un mode donné et de détecter une éventuelle variation de celle-ci lorsque la structure est alourdie par l'objet dont on veut détecter la présence ou mesurer la masse. Certains auteurs sont capables de descendre à des résolutions massiques de l'ordre du zeptogramme (10^{-21} grammes) [1]. Dans la seconde application, on utilise la fonction de transfert mécanique du système, au voisinage d'un mode donné de la structure, comme filtre résonant [2]. Enfin, dans le troisième cas, on tire partie de la coexistence de deux solutions stables périodiques déphasées lorsque la structure est sujette à une excitation paramétrique [3]. Pour coupler les oscillations mécaniques de ces systèmes au circuit électronique environnant (mise en vibration et détection), on utilise des couches de matériaux piézoélectriques.

Plusieurs propriétés de ces systèmes sont à considérer. En premier lieu, la géométrie stratifiée de ces structures, incluant des couches piézoélectriques, est prise en compte pour obtenir des modèles les plus prédictifs possibles. Le couplage électromécanique avec le circuit électronique environnant est aussi inclus dans le modèle. Les procédés de fabrication utilisés créent des contraintes résiduelles, différentes d'une couche à l'autre, dont il s'agit d'évaluer l'influence, d'une part sur le flambage éventuel de la structure et d'autre part sur ses fréquences propres. Enfin, le cœur de cette étude est de simuler le comportement vibratoire non linéaire géométrique de ces structures. En effet, d'une part les conditions d'utilisation de ces systèmes imposent de grandes amplitudes de vibrations, suffisantes pour créer des courbes de résonance incurvées [4]. D'autre part, il s'agit de simuler ces systèmes en excitations paramétriques.

On se concentre dans ce travail sur la mise en place de stratégies de simulation du comportement non linéaire vibratoire électromécanique du système, visant à être utilisées en phase de conception. On souhaite calculer le régime permanent en vibrations forcées, sous forme de solutions périodiques, pour « cartographier » le régime vibratoire non linéaire en fonction d'un paramètre de contrôle (l'amplitude ou la fréquence de l'excitation, par exemple). Après discrétisation par la méthode des éléments finis (EF), on utilise une méthode numérique de continuation, pour calculer directement les solutions périodiques.

Ce travail expose plus particulièrement deux stratégies de calcul des solutions périodiques du système, à partir du modèle discret EF non linéaire. Celui-ci est fondé sur une cinématique d'Euler-Bernouilli, sur des hypothèse de von Kármán pour les non linéarités géométriques et sur une formulation électromé-

canique originale [5].

2 Formulation non linéaire du problème électro-mécanique

On considère une poutre stratifiée piézoélectrique (Fig. 1) modélisée en utilisant la théorie classique des structures stratifiés, équivalente aux hypothèses d'Euler-Bernouilli (Fig. 2 et [6]). On limite notre étude aux vibrations dans le plan (x, z). Le champ de déplacement mécanique peut alors être écrit sous la forme :

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) + z\theta(x, t), \tag{1a}$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t), \tag{1b}$$

où u_x et u_z sont les déplacements axial et transverse de tout point de coordonnées (x, z) de la poutre ; u et w sont les déplacements axial et transverse de la ligne moyenne de la poutre et θ la rotation de la section, définie par :

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{2}$$

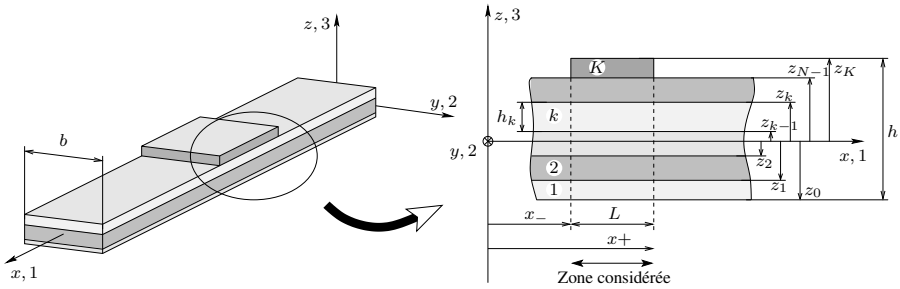

FIG. 1 – La poutre stratifiée

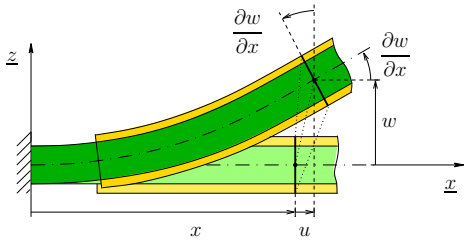

FIG. 2 – Champ de déplacement de la poutre en flexion

Les déformations généralisées de la poutre s'écrivent, avec les hypothèses de von Kármán :

$$\varepsilon_1 = e + z\kappa, \tag{3}$$

où

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad \text{et} \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Concernant les aspects électrostatiques, on considère que la poutre piézoélectrique satisfait les hypothèses exposées dans [5]. En particulier, le vecteur de champ électrique est normal aux électrodes et uniforme dans le p^{e} patch piézoélectrique. La seule composante non nulle du champ électrique est :

$$E_3^{(p)} = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \tag{5}$$

où $V^{(p)}$ est la différence de potentiel du p^{e} patch.

La relation de comportement locale des couches piézoélectriques, supposées isotrope transverse, peut s'écrire [5] :

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_{11}\varepsilon_1 - e_{31}E_3 \\ D_3 = e_{31}\varepsilon_1 + \epsilon_{33}E_3 \end{cases} \tag{6}$$

où σ_1 est la contrainte dans la direction axiale et E_3 et D_3 sont respectivement le champ électrique et le déplacement électrique dans la direction transverse. Comme nous concentrons notre étude sur l'effet piézoélectrique inverse seule, c'est-à-dire la production d'une force mécanique résultant d'un champ électrique appliqué, seule la première relation de comportement est prise en compte.

Considérant une zone axiale particulière de la poutre stratifiée (de longueur $L = x^+ - x^-$), avec un total de K couches et comprenant P patchs piézoélectriques (Fig. 1), les déplacements inconnus u_x et u_z vérifient la formulation variationnelle suivante, associée à l'équation d'équilibre local de notre système électromécanique [5] :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega^k} \rho^k \left(\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_z \delta u_z\right) \mathrm{d}\Omega + \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega^k} c_{11}^k \varepsilon_1 \delta\varepsilon_1 \, \mathrm{d}\Omega + \sum_{p=1}^{P} \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \delta\varepsilon_1 \, \mathrm{d}\Omega \\ = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_t^k} \left(t_x^k \delta u_x + t_z^k \delta u_z\right) \mathrm{d}S + \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega^k} \left(f_x^k \delta u_x + f_z^k \delta u_z\right) \mathrm{d}\Omega \quad \forall \delta u_x \text{ et } \delta u_z \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Dans l'équation précédente, ρ^k et Ω^k sont la masse volumique et le domaine occupé par la k^{e}couche et la poutre est soumise aux forces extérieures axiales et transversales aux bords de chaque couche (t_x^k, t_z^k) et aux efforts volumiques (f_x^k, f_z^k). On a noté de plus $V^{(p)}$ la différence de potentiel aux bornes du p^{e} patch.

L'utilisation d'une procédure standard éléments finis pour discrétiser la partie mécanique de l'équation (7) conduit à introduire $\mathbf{u}$, le vecteur des déplacements nodaux, de taille N. On obtient finalement la formulation éléments finis non linéaire de la poutre piézoélectrique stratifiée :

$$\mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_m \mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}) + \sum_{p=1}^{P} \left[\mathbf{f}_c^{(p)} + \mathbf{K}_c^{(p)} \mathbf{u}\right] V^{(p)} = \mathbf{f}_e, \tag{8}$$

où $\mathbf{M}_m$ et $\mathbf{K}_m$ sont les matrices de masse et de rigidité, de taille $N \times N$. Par rapport à l'hypothèse de von Kármán, la partie non linéaire de l'énergie interne est représentée par un vecteur colonne des forces non linéaire $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u})$, de dimension N. $\mathbf{f}_e$ est le vecteur colonne des forces mécaniques extérieures, de taille N. $\mathbf{f}_c^{(p)}$ et $\mathbf{K}_c^{(p)}\mathbf{u}$ sont les vecteurs de couplage électromécanique, de taille N, qui couplent les degrés de liberté mécaniques à la différence de potentiel du $p^{\text{ième}}$ patch. On peut noter que le terme $\mathbf{K}_c^{(p)}\mathbf{u}$ correspond à un forçage paramétrique de la structure. Les définitions de ces matrices et vecteurs sont données dans [7].

3 Résolution du problème

Pour résoudre le problème précédent, les inconnues du système sont écrites sous forme de séries de Fourier (méthode d'équilibrage harmonique, HBM) et on résout ensuite le système algébrique non linéaire obtenu par une méthode de continuation. Ici, on utilise la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [8].

3.1 Modèle complet

Ici, on se propose d'appliquer la méthode de continuation à tous les degrés de libertés des éléments finis. On utilise alors directement l'équation (7). En appliquant la méthode d'équilibrage harmonique à cette équation, on obtient un système algébrique de grande taille comportant des non-linéarités quadratiques et cubiques. Du fait de ce dernier type de non-linéarités, l'application de la MAN à ce système n'est pas directe, et il convient de le remplacer par un système quadratique équivalent, en introduisant des

variables supplémentaires. On obtient alors des formules de récurrence simples pour calculer les différents ordres des séries entières, qui sont solution de systèmes d'équations linéaires. C'est à ces systèmes qu'est appliquée, en dernière étape, la discrétisation éléments-finis. Il est alors possible de condenser les équations obtenus pour n'obtenir que des inconnues en déplacement et réduire au maximum la taille du système à résoudre. Pour plus de détails sur cette technique, on peut consulter [9]. Une technique analogue est utilisée dans [10] pour simuler des vibrations non linéaires de plaques rectangulaires, à la différence près que la mise sous forme quadratique des équations est réalisée en utilisant dans la formulation initiale, en plus des degrés de liberté en déplacement, des degrés de liberté en contrainte aux points de Gauss des éléments finis, qui sont ensuite condensés pour obtenir une formulation en déplacement uniquement.

3.2 Modèle réduit

Pour obtenir une formulation réduite du problème discrétisé obtenu à l'équation (8), on décompose le vecteur des inconnues de déplacement mécanique sur la base des modes propres du système en court-circuit, qui sont solutions de l'équation (8) avec $V^{(p)} = 0$ et $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Les fréquences propres ω_i et les déformées modales $\mathbf{\Phi}_i$ sont donc les N solutions propres du problème suivant :

$$\left(\mathbf{K}_m - \omega^2 \mathbf{M}_m\right) \mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

qui ne dépend que des propriétés élastiques du système et est donc facilement calculable [11].

Le vecteur des déplacements peut alors être écrit sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i q_i(t), \tag{10}$$

qui permet de réécrire l'équation (8) sous la forme d'un système d'oscillateurs couplés avec non linéarités quadratiques et cubiques, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ [7] :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \geq j}^{N} \beta_{jk}^i q_j q_k + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \geq j}^{N} \sum_{l \geq j}^{N} \gamma_{jkl}^i q_j q_k q_l + \sum_{p=1}^{P} \chi_i^{(p)} V^{(p)} + \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} \Theta_{ij}^{(p)} q_j V^{(p)} = f_i, \tag{11}$$

où

$$\chi_i^{(p)} = \mathbf{\Phi}_i{}^T \mathbf{f}_c^{(p)}, \quad f_i = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{f}_e \quad \forall i \in \{1 \ldots N\}, \forall p \in \{1 \ldots P\}, \tag{12}$$

$$\Theta_{ij}^{(p)} = \mathbf{\Phi}_i{}^T \mathbf{K}_c^{(p)} \mathbf{\Phi}_j, \quad \forall i, j \in \{1 \ldots N\}, \quad \forall p \in \{1 \ldots P\}. \tag{13}$$

et les ξ_i sont les coefficients d'amortissement modaux ajoutés à posteriori pour prendre en compte l'amortissement structural. Les coefficients modaux non linéaires β_{jk}^i et γ_{jkl}^i sont calculés avec la méthode expliquée dans [12].

On résout ce système réduit en combinant la méthode d'équilibrage harmonique et la méthode asymptotique numérique, à l'aide du logiciel Manlab (voir [8, 7, 13]).

4 Exemple numérique : nano-pont stratifié piézoélectrique

Matériau	Épaisseur [nm]	ρ [kg.m^{-3}]	E [GPa]	ν
Si	340	2500	169	0.3
SiO_2	10	2150	70	0.17
Ti	10	4510	110	0.32
Pt	80	21450	145	0.35
PZT	110	7800	96	0.45

TAB. 1 – Les propriétés mécaniques et géométriques de chaque couche du nano-pont.

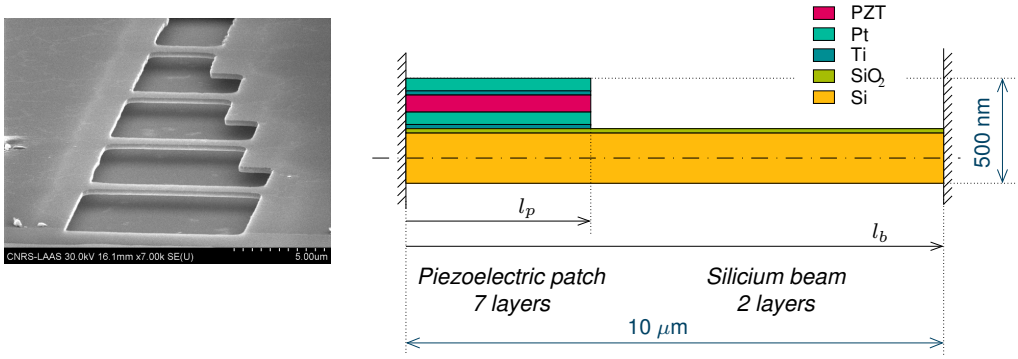

FIG. 3 – Nano-poutre stratifiée piézoélectrique. (Gauche) image au microscope électronique à balayage de plusieurs nano-ponts en silicium. Les électrodes et les couches piézoélectriques ne sont pas encore déposées (Photo LAAS, *http://spiderman-2.laas.fr/NBS/fr/#*). (droite) schéma du système étudié.

Le but de cette section est de prédire le comportement vibratoire non linéaire d'une poutre stratifiée piézoélectrique encastrée à ses deux extrémités, pour servir à la conception et au dimensionnement de nano-système électromécaniques. La figure 3 représente le système étudié, constitué d'une base en silicium sur laquelle est déposé un patch piézoélectrique, constitué d'une couche piézoélectrique (PZT) entourée de deux électrodes de Titane/Platine. La longueur de la poutre est $l_b = 10$ μm et l'épaisseur maximale du système est de l'ordre de 500 nm. La longueur du patch est notée l_p, avec, pour le cas étudié ici, $l_p/l_b = 3/4$. Le système est entraîné en vibration par une tension électrique harmonique $V(t) = V_0 \cos(\Omega t)$ imposée aux bornes de la couche piézoélectrique par les deux électrodes. On suppose les conditions aux limites parfaitement encastrées. Pour plus de détails, les propriétés mécaniques et électriques de chaque couche sont données dans le tableau 1.

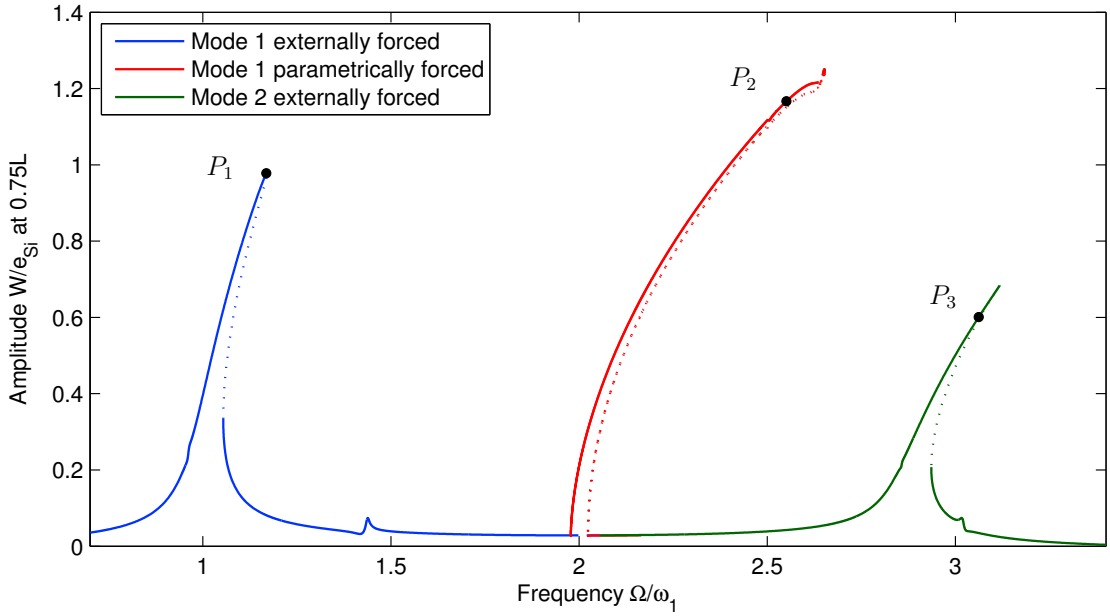

FIG. 4 – Amplitude maximale W du déplacement du nano-pont à $x = 0.75l_b$, en fonction de la pulsation d'excitation Ω, pour $V_0 = 5$ V. Les grandeurs adimensionnées W/e_{Si}, avec e_{Si} l'épaisseur de la couche de silicium, et Ω/ω_1, avec ω_1 la pulsation propre du premier mode du système, sont représentée.

La figure 4 représente l'amplitude maximal du déplacement de la poutre à $x = 0.75l_b$, lorsqu'une tension sinusoïdale d'amplitude $V_0 = 5$ V est appliquée. Le calcul est le résultat du modèle réduit (11), obtenu en conservant dans la base de projection 22 modes (6 modes à composante de flexion prépondérante et 16 modes à composante axiale prépondérante) et $H = 5$ harmoniques dans l'HBM. Le modèle complet, sans réduction, donne des résultats analogues. Cette courbe montre deux types de réponse. En

premier lieu, les résonances non linéaires des deux premiers modes de flexion sont clairement visible : elles sont du type raidissant (la fréquence de résonance est une fonction croissante de l'amplitude des vibrations). En second lieu, une excitation paramétrique du premier mode est observée, au voisinage du double de sa fréquence propre ($\Omega \simeq 2\omega_1$). Cela s'explique par l'effet mécanique de la couche piézoélectrique sur la structure. Lorsque la tension électrique est appliquée, la couche piézoélectrique s'allonge et se raccourcie, créant sur la structure à la fois un moment de flexion (qui explique les deux résonance non linéaires précédemment évoquées), mais aussi un effort de traction/compression oscillant. C'est ce dernier qui est responsable de la courbe de réponse paramétrique : le premier mode de flexion est mis en vibration par un effort de traction/compression oscillant au voisinage de deux fois sa pulsation propre. Cette courbe est obtenue par deux bifurcations de type doublement de période, c'est à dire que le système oscille à une fréquence exactement égale à la moitié de la fréquence d'excitation.

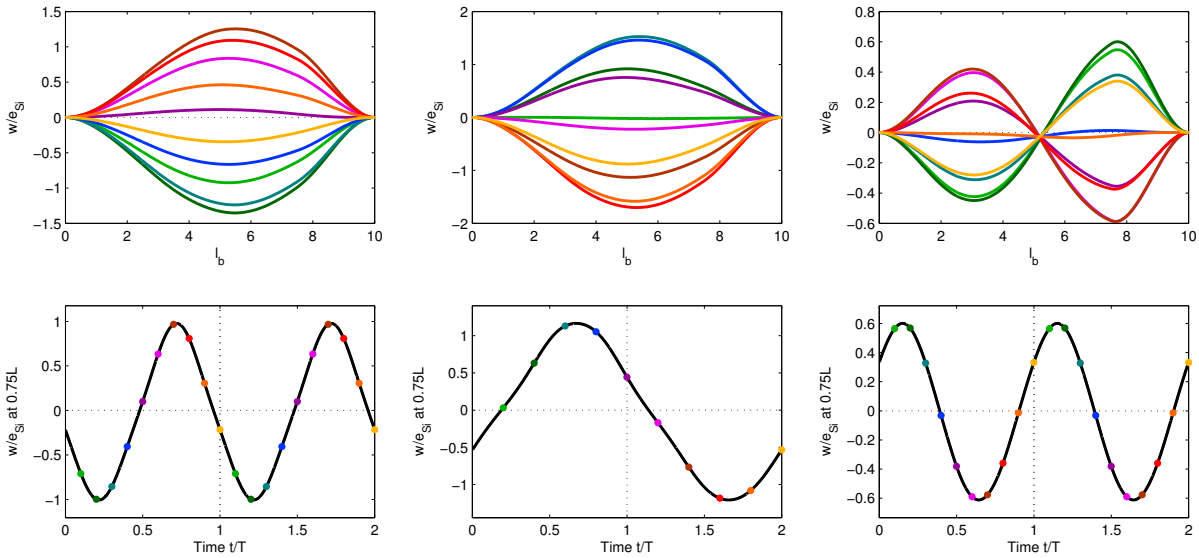

FIG. 5 – La réponse vibratoire non linéaire aux résonances de la figure 4. (Gauche) Au point P_1. (Milieu) Au point P_2. (Droite) Au point P_3. $T = 2\pi/\Omega$ est la période de l'excitation.

Une illustration du comportement vibratoire de la structure au voisinage de ses résonances est proposé sur la figure 5. On voit clairement qu'aux points P_1 et P_3, le système est forcée sur ses deux premiers modes de flexion. Au point P_2, la déformée du système est celle du premier mode de vibration, qui oscille à une période double (ou une fréquence moitié), de celle de l'excitation, caractéristique de l'excitation paramétrique du système. Cette résonance paramétrique est d'un intérêt pratique capital, soit pour réaliser des cellules à mémoire [3], soit pour augmenter artificiellement le facteur de qualité d'une résonance donnée, en mélangeant dans le signal d'excitation deux composantes fréquentielles à Ω et 2Ω, pour réaliser une excitation à la fois externe et paramétrique d'un mode de vibration donné [14].

Enfin, la figure 6 permet de valider la base modale utilisée pour construire le modèle réduit. La convergence du modèle réduit s'observe sur la résonance du premier mode de flexion, en ajoutant un nombre croissant de modes dans la base réduite. Le comportement est raidissant quel que soit le nombre de modes retenus, et c'est avec 6 modes de flexion et 16 modes axiaux que la convergence est obtenue. La solution de référence est ici le résultat d'une intégration temporelle directe du modèle éléments finis (8).

5 Conclusion

Deux méthode numérique originales ont été présentées brièvement pour l'étude des vibrations non linéaires de poutres stratifiées piézoélectriques : le modèle complet [9] et le modèle réduit [7]. Dans ces techniques, la non linéarité géométrique est prise en compte en utilisant la relation non linéaire de déplacement/déformations de von Kármán. Pour résoudre le système électromécanique obtenu, les inconnues du système sont écrites sous forme de séries de Fourier (méthode d'équilibrage harmonique, HBM) et on résout ensuite le système algébrique non linéaire obtenu par la Méthode Asymptotique

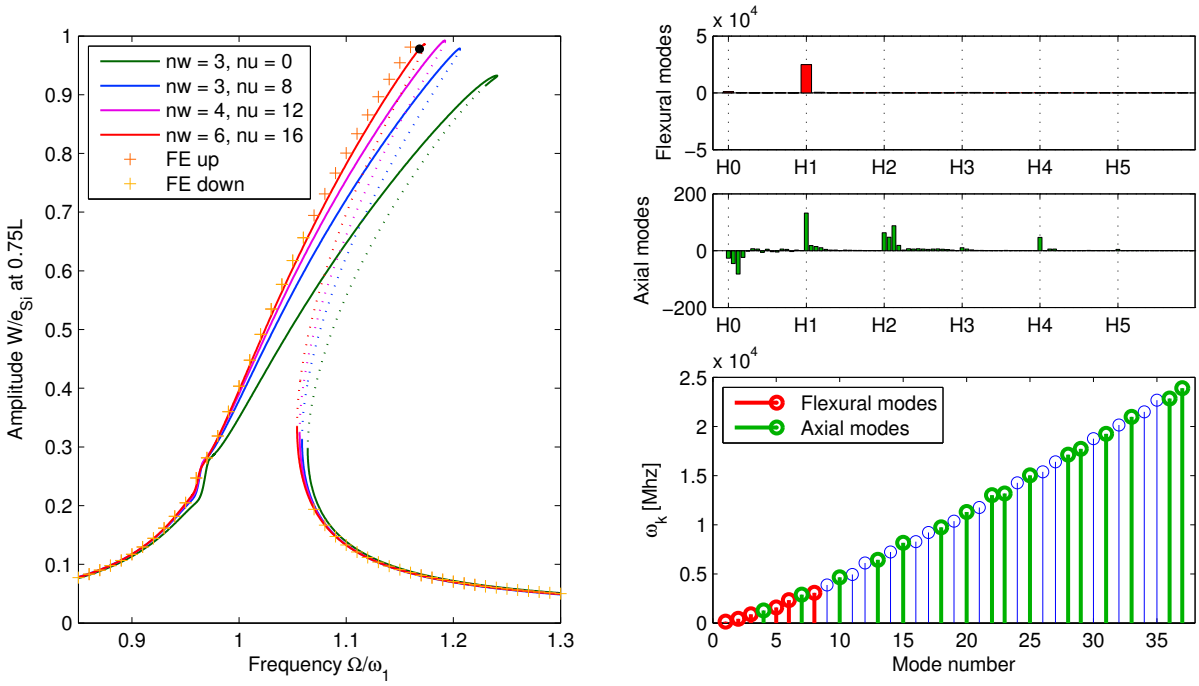

FIG. 6 – Réponse en fréquence autour de mode 1 à $x = 0,75l_b$. (Gauche) Influence de la troncature modale sur la réponse en fréquence. (Droite) Amplitude obtenu avec $H = 5$, $n_w = 6$ et $n_u = 16$ au point indiqué sur la courbe de résonance. Pulsations propres des modes retenus dans la troncature.

Numérique (MAN).

Le modèle complet est dédié et s'applique directement aux non linéarités quadratique et cubiques du système. Ces stratégies sont a priori coûteuses, car les systèmes algébriques sont de grande taille. C'est pour cette raison qu'on a proposé une méthode de réduction qui consiste à projeter le modèle EF non linéaire sur la base des modes propres du problème linéaire associé. Ici, le choix des modes à conserver dans la base est délicat, car il faut garder un nombre suffisant de modes à mouvement axial prépondérant, pour bien représenter le couplage non linéaire axial/flexion. Ce choix est de plus rendu difficile dans le cas présent de structures stratifiées, car ce couplage existant aussi au stade linéaire, il n'existe pas de modes purement transverses et purement axiaux. Enfin, comme perspective, on se propose de tester une seconde méthode de réduction, fondée sur la base modale précédente enrichie par des dérivées modales, permettant de remplacer les modes axiaux [15]. Si, a priori, la taille du modèle réduit est analogue, c'est le choix des modes à conserver dans la base qui est facilité.

Références

[1] Y. T. Yang, C. Callegari, X. L. Feng, K. L. Ekinci, and M. L. Roukes. Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing. *Nano Letters*, 6(4) :583–586, 2006.

[2] V. Gouttenoire, T. Barois, S. Perisanu, J.-L. Leclercq, S. T. Purcell, P. Vincent, and A. Ayari. Digital and fm demodulation of a doubly clamped single-walled carbon-nanotube oscillator : Towards a nanotube cell phone. *Small*, 6(9) :1060–1065, 2010.

[3] I. Mahboob and H. Yamaguchi. Bit storage and bit flip operations in an electromechanical oscillator. *Nature nanotechnology*, 3 :275–279, 2008.

[4] R. B. Karabalin, M. H. Matheny, X. L. Feng, E. Defaÿ, G. Le Rhun, C. Marcoux, S. Hentz, P. Andreucci, and M. L. Roukes. Piezoelectric nanoelectromechanical resonators based on aluminum nitride thin films. *Applied Physics Letters*, 95 :103111, 2009.

[5] O. Thomas, J.-F. Deü, and J. Ducarne. Dynamics of an elastic structure with piezoelectric patches : finite-element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 80(2) :235–268, 2009.

[6] J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates*. CRC press, 1997.

[7] A. Lazarus, O. Thomas, and J.-F. Deü. Finite elements reduced order models for nonlinear vibrations of stratified piezoelectric beams with applications to nems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011. Submitted.

[8] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.

[9] S. Nezamabadi, O. Thomas, and J.-F. Deü. Efficient computation of non-linear vibrations of piezoelectric nano-beams with a continuation technique. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011. In preparation.

[10] F. Boumediene, A. Miloudi, J. M. Cadou, L. Duigou, and E. H. Boutyour. Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, 87(23-24) :1508–1515, 2009.

[11] A. Sénéchal, O. Thomas, and J.-F. Deü. Optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction of complex structures - application to a turbojet fan blade. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2010*, Montreal, Canada, August 2010.

[12] A. A. Muravyov and S. A. Rizzi. Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures. *Computers and Structures*, 81(15) :1513–1523, 2003.

[13] S. Karkar, R. Arquier, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas, and A. Lazarus. Manlab 2.0, an interactive continuation software, November 2010. http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr.

[14] R. B. Karabalin, S. C. Masmanidis, and M. L. Roukes. Efficient parametric amplification in high and very high frequency piezoelectric nanoelectromechanical systems. *Applied Physics Letters*, 97 :183101, 2010.

[15] P. M. A. Slaats, J. de Jongh, and A. A. H. J. Sauren. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, 54(6) :1155–1171, 1995.