

Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques

O. Thomas¹, A. Lazarus^{1,2}

¹ Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, olivier.thomas@cnam.fr

² Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA, alazarus@mit.edu

Résumé — Ce travail concerne une méthode numérique fréquentielle pour déterminer la stabilité des solutions périodiques d'un système dynamique. La méthode, basée sur la théorie de Floquet et le calcul d'un problème aux valeurs propres de Hill, consiste à extraire les valeurs propres physiques de l'ensemble des valeurs propres numériques de ce système étendu dans le domaine fréquentiel. Plusieurs validations numériques de la méthode, sur des cas pratiques, sont proposées dans ce travail.

Mots clés — stabilité, périodique, vibrations, non linéaire, continuation

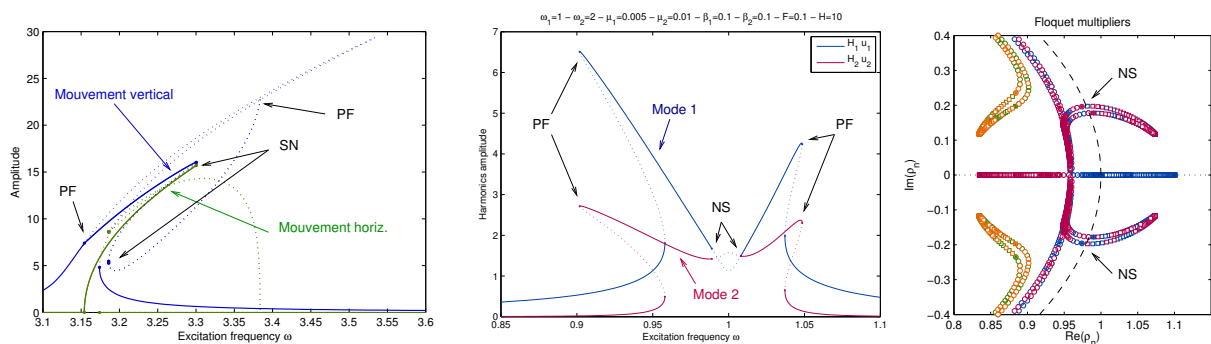


FIG. 1 – Exemple de diagrammes de bifurcations. (a) couplage entre les deux polarisations du mouvement d'une corde. (b,c) couplage entre deux modes en résonance 1:2 et lieu dans le plan complexe des multiplicateurs de Floquet. (—) : solutions stables ; (· · ·) : solutions instables. Les différentes bifurcations sont indiquées par SN (nœud-col), PF (fourche), NS (Neimark-Sacker).

Lorsqu'on s'intéresse au comportement de structures mécaniques, la stabilité est une notion centrale, intimement liée aux éventuelles non-linéarités. En statique, la stabilité permet de prédire les valeurs limites des efforts au-delà desquels un flambage de la structure apparaît. En post-flambement, plusieurs configurations de la structure coexistent, certaines étant stables et d'autres instables, et ce sont les non-linéarités géométriques qui permettent d'expliquer et prédire leur géométrie et leur stabilité. En dynamique, les non-linéarités sont à l'origine d'une grande richesse de comportements : dépendance des fréquences d'oscillation avec l'amplitude, hystérésis, phénomènes de sauts entre plusieurs régimes vibratoires, transferts d'énergie entre modes et donc entre bandes fréquentielles, instabilités, bifurcations, vibrations quasi-périodiques et chaotiques... Toute cette phénoménologie est liée à des successions de régimes vibratoires périodiques stables et instables, séparés par des bifurcations.

Une méthode largement utilisée pour calculer la stabilité d'une solution périodique consiste à calculer la matrice de monodromie Φ . C'est alors la valeur du module de ses valeurs propres (les multiplicateurs de Floquet), comparée à un, qui permet de statuer sur la stabilité. Deux techniques sont communément utilisées pour calculer Φ : soit une intégration, sur une période, du Jacobien du système dynamique [1] ; soit Φ est un sous-produit de certaines méthodes de continuation [2]. Ces méthodes de calcul de Φ sont efficaces et éprouvées, mais sont liées à des méthodes *temporelles* de calcul des solutions périodiques.

Il existe une alternative dans le domaine *fréquentiel*, parfaitement adaptée lorsque le calcul de la solution périodique est fondé sur sa décomposition en série de Fourier (Méthode d'équilibrage harmonique (HBM) [3]). Il s'agit de la méthode de Hill [4], initialement proposée il y a plus d'un siècle pour le calcul du périégée lunaire. Cette méthode a été étendue plus récemment au calcul numérique de systèmes

vibrants [5, 6], mais les auteurs s'accordent pour dire qu'elle n'est pas fiable et qu'elle peut conduire à des résultats faux. Le problème, bien connu des mathématiciens [7, 8], provient de la troncature, inévitable en pratique, du problème aux valeurs propres de Hill. Nous proposons ici une stratégie numérique simple qui permet de choisir dans le spectre des $N(2H + 1)$ valeurs propres calculées les N les « mieux calculées » (N est la dimension du système dynamique et H le nombre d'harmoniques des séries de Fourier) [9]. En pratique, l'algorithme proposé a été implanté dans le logiciel de continuation MANLab[3], basé sur l'HBM et la méthode asymptotique numérique. On obtient ainsi un code complet de suivi de solutions périodiques de systèmes dynamiques.

Dans ce travail, nous proposons plusieurs exemples de validation numérique de la méthode.

- En préliminaire, le cas classique d'un oscillateur de Duffing, très documenté dans la littérature, est étudié en détail. On montre que l'algorithme permet de retrouver efficacement les changements de stabilité, liés à des bifurcations. L'oscillateur de Duffing montre notamment plusieurs bifurcation « nœud-col » ainsi qu'une bifurcation « fourche » avec brisure de symétrie.
- Ensuite, un cas de résonance 1:1 est proposé. Il s'agit du couplage non linéaire entre deux modes de fréquences propres très proches, dans une corde. Là encore, le cas est très documenté et les bifurcations fourches, permettant de passer d'un régime de vibration où la corde oscille dans un plan à un régime de vibration hors-plan, sont parfaitement identifiées (fig. 1, gauche). Le modèle est obtenu à partir des équations aux dérivées partielles de la structure, discrétisées par projection modale non-linéaire.
- Enfin, le couplage entre deux modes en résonance 1:2 (tels qu'une fréquence propre est proche du double de l'autre) est aussi proposé. Ce couplage particulier est observé dans les structures minces courbées [10] et il permet de mettre en évidence d'autres bifurcations. Les premières sont des doublements de période, où la solution périodique de période T devient instable au profit de deux solutions périodiques stables de période $2T$. Dans ce cas, un multiplicateur de Floquet sort du cercle unité par la gauche. Les secondes sont des bifurcation de Neimark-Sacker, où la solution périodique devient instable au profit d'une solution quasi-périodique. Dans ce cas, deux multiplicateurs de Floquet complexes conjugués sortent simultanément du cercle unité (fig. 1, droite).

Dans tous les cas, nos calculs montrent que sans la procédure de tri des valeurs propres de la matrice de Hill proposée ici, des erreurs sont commises quel que soit le nombre H d'harmoniques retenues.

Références

- [1] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. Wiley series in nonlinear science, 1995.
- [2] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.
- [3] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.
- [4] G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1) :1–36, 1886.
- [5] C. Villa, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :804–821, 2008.
- [6] A. Lazarus, D. Combescure, and B. Prabel. A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :3780–3797, 2010.
- [7] J. Zhou, T. Hagiwara, and M. Araki. Spectral analysis and eigenvalues computation of the harmonic state operators in continuous-time periodic systems. *Systems & control letters*, 53 :141–155, 2004.
- [8] C. W. Curtis and B. Deconinck. On the convergence of Hill's method. *Mathematics of computation*, 79 :169–187, 2010.
- [9] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517, 2010.
- [10] O. Thomas, C. Touzé, and É. Luminais. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1 :1 :2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 49(1-2) :259–284, 2006.