HAL
open science

Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques

Olivier Thomas, Arnaud Lazarus

To cite this version:

Olivier Thomas, Arnaud Lazarus. Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592723

HAL Id: hal-00592723

https://hal.science/hal-00592723v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques

O. Thomas[1], A. Lazarus[1,2]

[1] *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Système Couplés, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, olivier.thomas@cnam.fr*
[2] *Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA, alazarus@mit.edu*

Résumé — Ce travail concerne une méthode numérique fréquentielle pour déterminer la stabilité des solutions périodiques d'un système dynamique. La méthode, basée sur la théorie de Floquet et le calcul d'un problème au valeurs propre de Hill, consiste à trier les valeurs propres du système étendu dans le domaine fréquentiel pour ne conserver que celles qui permettent la meilleur estimation de la stabilité. Plusieurs validations numériques de la méthode, sur des cas pratiques, sont proposées dans ce travail.
Mots clés — stabilité, périodique, vibrations, non linéaire, continuation

1 Introduction

Lorsqu'on s'intéresse au comportement de structures mécaniques, la stabilité est une notion centrale, intimement liée aux éventuelles non-linéarités. En statique, la stabilité permet de prédire les valeurs limites des efforts aux delà desquels un flambage de la structure apparaît. En post-flambement, plusieurs configurations de la structure coexistent, certaines étant stables et d'autres instables, et ce sont les non-linéarités géométriques qui permettent d'expliquer et prédire leur géométrie et leur stabilité. En dynamique, les non-linéarités sont à l'origine d'une grande richesse de comportements : dépendance des fréquences d'oscillation avec l'amplitude, hystérésis, phénomènes de sauts entre plusieurs régimes vibratoires, transferts d'énergie entre modes et donc entre bandes fréquentielles, instabilités, bifurcations, vibrations quasi-périodiques et chaotiques... Toute cette phénoménologie est liée à des successions de régimes vibratoires périodiques stables et instables, séparés par des bifurcations.

Une méthode largement utilisée pour calculer la stabilité d'une solution périodique consiste à calculer la matrice de monodromie $\mathbf{\Phi}$. C'est alors la valeur du module de ses valeurs propres (les multiplicateurs de Floquet), comparée à un, qui permet de statuer sur la stabilité. Trois techniques sont communément utilisées pour calculer $\mathbf{\Phi}$: soit une intégration, sur une période, du Jacobien du système dynamique [1] ; soit $\mathbf{\Phi}$ est un sous-produit de certaines méthodes de continuation [2] ; soit, enfin, une méthode numérique spécifique, qui évite le calcul de la matrice de monodromie, est utilisée [3]. Ces méthode de calcul de $\mathbf{\Phi}$ sont efficaces et éprouvées, mais sont liées à des méthodes *temporelles* de calcul des solutions périodiques.

Il existe une alternative dans le domaine *fréquentiel*, parfaitement adaptée lorsque le calcul de la solution périodique est fondé sur sa décomposition en série de Fourier (Méthode d'équilibrage harmonique (HBM) [4]). Il s'agit de la méthode de Hill [5], initialement proposée il y a plus d'un siècle pour le calcul du périgée lunaire. Cette méthode a été étendue plus récemment au calcul numérique de systèmes vibrants [6, 7], mais les auteurs s'accordent pour dire qu'elle n'est pas fiable et qu'elle peut conduire à des résultats faux. Le problème, bien connu des mathématiciens [8, 9], provient de la troncature, inévitable en pratique, du problème aux valeurs propres de Hill. Nous proposons ici une stratégie numérique simple qui permet de choisir dans le spectre des $N(2H+1)$ valeurs propres calculées les N les « mieux calculées » (N est la dimension du système dynamique et H le nombre d'harmoniques des séries de Fourier) [10]. En pratique, l'algorithme proposé a été implanté dans le logiciel de continuation Manab[11], basé sur l'HBM et la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). On obtient ainsi un code complet de suivi de solutions périodiques de systèmes dynamiques.

2 Principe de la méthode

2.1 Théorie de Floquet et stabilité

On considère que le comportement dynamique du système étudié est régie par :

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}\left(t\right),t,\lambda\big) \tag{1}$$

où $\boldsymbol{x}$ est le vecteur d'état (de dimension N) et $\boldsymbol{f}$ est un champ de vecteur non linéaire (de dimensions N), qui dépend du paramètre de contrôle λ. Dans la suite, $\boldsymbol{f}$ peut dépendre implicitement (cas des systèmes autonomes) ou explicitement (cas des système non-autonomes) du temps.

On considère une solution périodique $\boldsymbol{x}_0\left(t\right)$ de (1), de période minimale T, pour la valeur particulière $\lambda=\lambda_0$ du paramètre de contrôle. La stabilité de cette solution est étudiée en imposant une perturbation $\boldsymbol{y}\left(t\right)$:

$$\boldsymbol{x}\left(t\right)=\boldsymbol{x}_0\left(t\right)+\boldsymbol{y}\left(t\right). \tag{2}$$

In introduisant (2) dans (1) et en effectuant un développement de Taylor, on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{y}}\left(t\right)=\boldsymbol{J}\left(t\right)\boldsymbol{y}\left(t\right) \tag{3}$$

avec

$$\boldsymbol{J}\left(t\right)=\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{x}_0\left(t\right),t,\lambda_0\big)=\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\big(\boldsymbol{x}_0\left(t\right),t,\lambda_0\big). \tag{4}$$

$\boldsymbol{J}\left(t\right)$ est la matrice Jacobienne (de taille $N\times N$) de $\boldsymbol{f}$, pour $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ et $\lambda=\lambda_0$. L'étude de stabilité de la solution périodique $\boldsymbol{x}_0$ consiste alors à déterminer si la perturbation $\boldsymbol{y}(t)$, solution de (3), diminue ou augment en fonction du temps. Puisque $\boldsymbol{x}_0(t)$ est T-périodique en temps, $\boldsymbol{J}(t)$ est aussi T-périodique.

Le système (3) est linéaire à coefficients périodiques, ce qui suggère d'utiliser la théorie de Floquet [12, 13]. Les développement qui suivent sont classique et sont issus de [1, 14]. Le système (3) possède N solutions linéairement indépendantes $\boldsymbol{y}_n(t)$, de sorte que toute solution $\boldsymbol{y}(t)$ de (3) s'écrit :

$$\boldsymbol{y}\left(t\right)=\sum_{n=1}^{N}c_n\boldsymbol{y}_n\left(t\right) \tag{5}$$

où c_n sont N constantes qui dépendent des conditions initiales. En regroupant ces solutions fondamentales dans la matrice $\boldsymbol{Y}(t)=[\boldsymbol{y}_1(t)\,\boldsymbol{y}_2(t)\,\ldots\,\boldsymbol{y}_N(t)]$, on peut montrer qu'il existe une matrice constante, la matrice de monodromie $\boldsymbol{\Phi}$, telle que :

$$\boldsymbol{Y}(t+T)=\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{\Phi}. \tag{6}$$

Cette matrice peut être utilisée pour étudier la stabilité de la solution périodique $\boldsymbol{x}_0(t)$, puisqu'elle fait correspondre à un ensemble de solutions fondamentales $\boldsymbol{Y}(t)$ à la date t leur valeur une période plus tard, à la date $t+T$, définissant ainsi la classique application de Poincaré. L'étude de stabilité est conduite en considérant les valeurs propres ρ_n de $\boldsymbol{\Phi}$, les *multiplicateurs de Floquet*.

En considérant de nouveau les solutions fondamentales, chaque $\boldsymbol{y}_n\left(t\right)$, pour tout $n=1,\ldots,N$, peut s'écrire sous sa forme de Floquet :

$$\boldsymbol{y}_n(t)=\boldsymbol{p}_n\left(t\right)e^{\alpha_n t} \tag{7}$$

où $\boldsymbol{p}_n\left(t+T\right)=\boldsymbol{p}_n\left(t\right)$ est un vecteur complexe T-périodique de dimension N et α_n est un nombre complexe. Par suite, l'équation (7) et la T-périodicité de $\boldsymbol{p}_n$ montrent que

$$\boldsymbol{y}_n(t+T)=\boldsymbol{p}_n\left(t+T\right)e^{\alpha_n(t+T)}=\boldsymbol{y}_n\left(t\right)e^{\alpha_n T}. \tag{8}$$

L'équation ci-dessus, comparée à (6), prouve que les α_n sont liés aux multiplicateurs de Floquet ρ_n par, pour tout $n=1,\ldots,N$:

$$\rho_n=e^{\alpha_n T}\quad\Leftrightarrow\quad\alpha_n=\frac{1}{T}\ln\rho_n+\frac{2\pi k}{T}i,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{9}$$

Les α_n sont connus comme les *exposants de Floquet*, définis à la constante additive $2i\pi/T$ prêt [13]. Ils sont au cœur du présent travail.

Finalement, en considérant les équations (6) ou (8), la stabilité de la solution périodique s'obtient de manière équivalente, soit par les multiplicateurs de Floquet ρ_n, soit par les exposants de Floquet α_n :

– Si $\Re(\alpha_n) < 0$ (ou $|\rho_n| < 1$) pour tout n, toutes les solutions fondamentales $\boldsymbol{y}_n$ tendent vers zéro en fonction du temps et la solution périodique $\boldsymbol{x}_0(t)$ est dite asymptotiquement stable.
– Si il existe un n tel que $\Re(\alpha_n) > 0$ (ou $|\rho_n| > 1$), la solution fondamentale $\boldsymbol{y}_n$ augmente de manière exponentielle et la solution périodique $\boldsymbol{x}_0(t)$ est dite instable.

Les considérations ci-dessus sont valable pour tout système (1), qu'il soit autonome ou non-autonome. Dans le premier cas, l'un des multiplicateurs de Floquet est toujours égal à l'unité $\rho_n = 1$. Dans ce cas, ce sont les autres multiplicateurs qui permettent de statuer sur la stabilité de la solution périodique

2.2 La méthode de Hill

La méthode de Hill permet de déterminer les solutions de systèmes linéaires à coefficients périodiques comme (3). Elle est ici utilisée pour calculer les exposants de Floquet α_n. La première étape consiste à étendre en série de Fourier les inconnues $\boldsymbol{p}_n(t)$ et $J(t)$, ce qui s'écrit :

$$\{\boldsymbol{p}_n(t), J(t)\} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{\boldsymbol{p}_n^h, \boldsymbol{J}^h\right\} e^{ih\omega t}, \tag{10}$$

où $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation du mouvement, $\boldsymbol{p}_n^h$ sont des vecteurs complexes de dimension N et les $\boldsymbol{J}^h$ sont des matrice de taille $N \times N$. En remplaçant (10) dans (7) puis dans (3), on obtient l'équation vectorielle suivante, pour tout $n = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + ik\omega)\boldsymbol{p}_n^k e^{(\alpha_n + ik\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{J}^h \boldsymbol{p}_n^k e^{[\alpha_n + i(k+h)\omega]t}. \tag{11}$$

Comme les sommes sont infinies, on peut remplacer k par $k - h$ dans le membre de gauche sans changer le résultat. Cela s'écrit alors, pour tout $n = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{J}^h \boldsymbol{p}_n^{k-h} - (\alpha_n + ik\omega)\, \boldsymbol{p}_n^k \right] e^{(\alpha_n + ik\omega)t} = \boldsymbol{0}. \tag{12}$$

En appliquant la méthode de l'équilibrage harmonique (HBM) à l'équation précédente, celle-ci peut s'écrire sous la forme du problème aux valeurs propres, de taille infinie, suivant :

$$(\boldsymbol{H} - s\boldsymbol{I})\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

où $\boldsymbol{H}$ est la matric infinie de Hill :

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \boldsymbol{J}^0 + i\omega\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J}^{-1} & \boldsymbol{J}^{-2} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{J}^1 & \boldsymbol{J}^0 & \boldsymbol{J}^{-1} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{J}^2 & \boldsymbol{J}^1 & \boldsymbol{J}^0 - i\omega\boldsymbol{I} & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{14}$$

et où s est un nombre complexe, $\boldsymbol{q}$ est un vecteur de dimension infinie et $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité.

2.2.1 Troncature et méthode de tri

En comparant les équations (13) et (12), les valeurs propres et vecteurs propres s et $\boldsymbol{q}$ sont liés aux α_n et $\boldsymbol{p}_n$ par la relation suivante :

$$s_n^l = \alpha_n + il\omega \quad \text{and} \quad \boldsymbol{q}_n^{lT} = \left[\ldots\ \boldsymbol{p}_n^{-1-l}\ \boldsymbol{p}_n^{0-l}\ \boldsymbol{p}_n^{1-l}\ \ldots\right], \tag{15}$$

qui est valide pour tout $l = 0, \pm 1, \ldots \pm\infty$ et $n = 1, \ldots, N$. On a noté $\bullet^T$ le transposé de $\bullet$. La relation précédente montre que chaque exposant de Floquet α_n, pour un n donné, est associé à un nombre infini de valeurs propres s_n^l, obtenues en faisant varier $l = 0, \pm 1, \ldots \pm\infty$. Par conséquent, la connaissance de une, au moins, des s_n^l pour un n donné pourrait permettre de calculer α_n.

Cependant, en pratique, le problème (12-14) est tronqué à une dimension finie, soit à H harmoniques, de sorte que la matrice $\boldsymbol{H}$ est de dimension $N(2H+1) \times N(2H+1)$ ($l = 0, \pm 1, \ldots, \pm H$ dans (15)). Soit $\hat{s}_n^l$ et $\hat{\boldsymbol{q}}_n^l$ les $N(2H+1)$ solutions propres de (13) calculées avec $\boldsymbol{H}$ tronquée. Si on se propose de déterminer les α_n, deux questions se posent : (1) est ce que les $(\hat{s}_n^l, \hat{\boldsymbol{q}}_n^l)$ tendent bien vers les $(s_n^l, \boldsymbol{q}_n^l)$ lorsque H tend vers l'infini ? et (2) pour un n donné, parmi tous les $\hat{s}_n^l$ calculés, lesquels, lorsque l varie, doivent être utilisés pour calculer les α_n. Étudiées en premier par Poincaré [15] il y a plus d'un siècle, ces questions sont toujours d'actualité, notamment en liaison avec l'équation de Schrödinger [16]. Des papiers récents basés sur la théorie de Fredholm proposent une preuve rigoureuse de la convergence [8, 9], répondant ainsi à la première question.

La seconde question reste néanmoins délicate dans un cadre numérique. La première idée consisterait à considérer *toutes* les valeurs propres issues du calcul tronqué de (13) et à statuer sur la stabilité en observant le signe des parties réelles des $\hat{s}_n^l$ par rapport à zero, puisque $\alpha_n = \Re(s_n^l) \simeq \Re(\hat{s}_n^l)$. Les exemples numériques proposés plus loin ainsi que certaines études de la littérature [6] montrent que cela conduit à des résultats erronés, principalement parce que toutes les valeurs approchées $\hat{s}_n^l$, pour un n donnée, n'ont pas la même partie réelle, et donc que certaines conduisent à une meilleur approximation de α_n. La procédure suivante permet de répondre à ce problème et de trier les $\hat{s}_n^l$.

À partir de (15), on peut supposer que les vecteurs propres du problème tronqué s'écrivent $\hat{\boldsymbol{q}}_n^{lT} = \left[\hat{\boldsymbol{p}}_n^{-H-l} \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{0-l} \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{H-l}\right]^T$, et, en particulier, ceux associés à $l = 0$ sont :

$$\hat{\boldsymbol{q}}_n^{0T} = \left[\hat{\boldsymbol{p}}_n^{-H} \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{-1} \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{0} \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{1} \ \ldots \ \hat{\boldsymbol{p}}_n^{H}\right], \tag{16}$$

où $\hat{\boldsymbol{p}}_n^k$ est une estimation de $\boldsymbol{p}_n^k$. Ainsi, parmi tous les vecteurs propres calculés pour un n donné, c'est celui associé à $l = 0$ qui fait intervenir les composantes de Fourier de $p_n(t)$ de plus bas ordre, et notamment celles pour lesquelles $|k| < H$. C'est donc celui-ci qui fournira la meilleur approximation de $p_n(t)$ et donc de α_n. Comme tous les développements précédents sont basés sur l'hypothèse que les séries de Fourier (10) sont convergentes, les $\boldsymbol{p}_n^k$ tendent vers zero lorsque k tend vers l'infini, et c'est $\hat{\boldsymbol{q}}_n^0$ (pour $l = 0$) qui a la forme la plus symétrique, par rapport aux autres $\hat{\boldsymbol{q}}_n^l$, pour $l \neq 0$.

Ainsi, à partir des constatation précédentes, la procédure de tri automatique pour calculer des N exposants de Floquet α_n est la suivante. La matrice de Hill, tronquée à l'ordre H, est assemblée et ses $N(2H+1)$ solutions propres $(\hat{s}_n^l, \hat{\boldsymbol{q}}_n^l)$ sont calculées. Parmi celles-ci, les N associées à $l = 0$ sont associées aux N vecteurs propres dont la forme est la plus symétrique. Les parties réelles des N valeurs propres associées sont alors désignées comme les meilleurs approximations des exposants de Floquet : $\alpha_n = \hat{s}_n^0$, $n = 1, \ldots, N$. En pratique, la sélection des N vecteurs propres $\boldsymbol{q}_n^0$ parmi les $N(2H+1)$ calculés à partir de (13) est obtenue en calculant pour chaque $\boldsymbol{q}_n^l$, $l = -H, \ldots, H$, $n = 1, \ldots, N$, la valeur médiane du module de ses composantes. Si q_i est la i^{e}composante de $\boldsymbol{q}$, de dimension $Q = N(2H+1)$, la valeur médiane est $\sum_i i|q_i| / \sum_i |q_i|$. Les $\boldsymbol{q}_n^0$ sélectionnés sont les N dont la médiane est la plus proche de $Q/2$ et qui sont supposés avoir la forme la plus symétrique.

2.3 Un algorithme complet de continuation : HBM/MAN/Hill

Un point crucial de la procédure numérique décrite ci-dessus est le calcul des coefficients de Fourier du Jacobien $\boldsymbol{J}(t)$ (Eq. (10)), qui entrent dans l'assemblage de la matrice de Hill. Dans le cas le plus général d'une non-linéarité quelconque dans l'équation (1), ce calcul peut être complexe.

Cependant, dans le cas particulier pratique où l'HBM est combinée à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) pour calculer les coefficients de Fourier de la solution périodique $\boldsymbol{x}_0$, le calcul des $\boldsymbol{J}^h$ est simple. L'idée est d'écrire le système dynamique (1) sous forme quadratique en ajoutant des inconnues additionnelles. Cette procédure est expliquée dans [17], qui montre aussi que cette écriture quadratique peut être appliquée à une très large classe de non-linéarités régulières. Dans ce cas, l'écriture de (1) sous forme quadratique est :

$$m\left(\dot{\boldsymbol{z}}\right) = c\left(\lambda, t\right) + l\left(\boldsymbol{z}, t, \lambda\right) + q\left(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}, t, \lambda\right) \tag{17}$$

où c, $l\left(\cdot\right)$, $m\left(\cdot\right)$ et $q\left(\cdot,\cdot\right)$ sont des opérateurs respectivement constant, linéaire, linéaire et quadratique en $\boldsymbol{z}$. Le vecteur inconnu $\boldsymbol{z}$ contient les composantes du vecteur inconnu d'origine $\boldsymbol{x}$ et des nouvelles variables ajoutées pour obtenir la forme quadratique. On peut alors montrer que le Jacobien $\boldsymbol{J}\left(t\right)$, défini

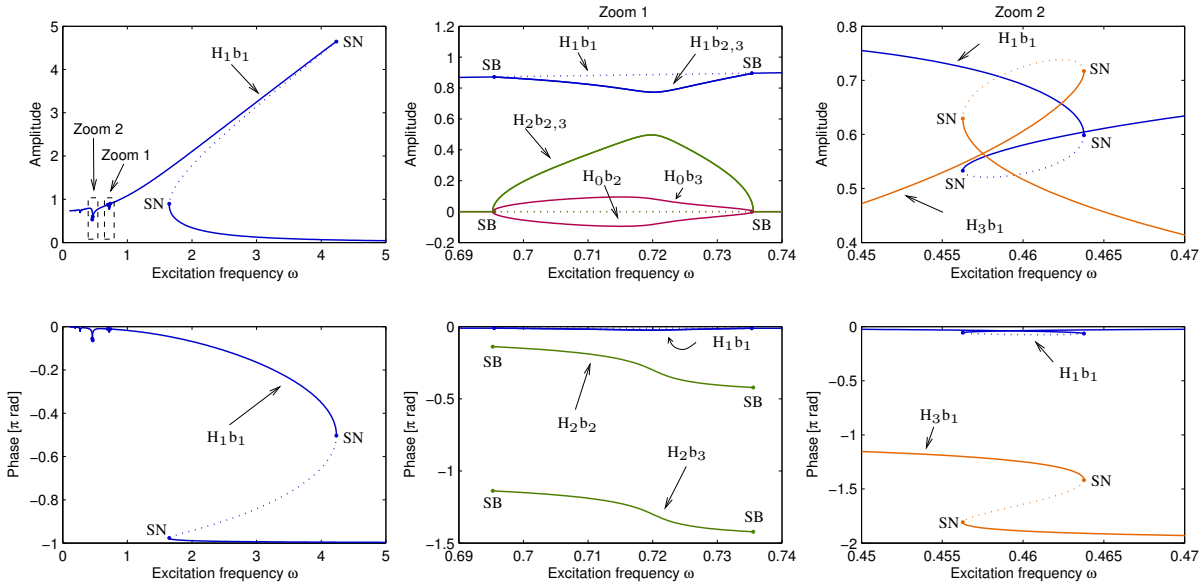

FIG. 1 – Résonance de l'oscillateur de Duffing pour $\omega_0 = 1$, $\Gamma = 1$, $F = 1$, $\mu = 0.05$: amplitude des trois première harmonique en fonction de Ω. Simulations avec la méthode HBM-MAN et stabilité avec la présente méthode de Hill, avec $H = 12$ harmoniques. '—' : branches stables ; '$\cdots$' : branches instables. 'SN' : bifurcations nœud col ; 'SB' : bifurcations fourches avec brisure de symétrie. '$\mathrm{H}_i\mathrm{b}_j$' : i^{e}harmonique, j^{e}branche (gauche) : vue générale ; (milieu), (droite) : détails des résonances superharmoniques d'ordre 2 et 3.

par (4), s'exprime de la façon suivante :

$$\boldsymbol{J}(t) = \boldsymbol{J}_C(\lambda_0, t) + \boldsymbol{J}_L(\boldsymbol{z}_0(t), t, \lambda_0) + \boldsymbol{J}_Q(\boldsymbol{z}_0(t), \boldsymbol{z}_0(t), t, \lambda_0) \tag{18}$$

où $\boldsymbol{J}_C$, $\boldsymbol{J}_L(\cdot)$ et $\boldsymbol{J}_Q(\cdot,\cdot)$ sont des matrices de taille $N \times N$ respectivement constante, linéaire et quadratique en $\boldsymbol{z}_0$. À partir d'ici, il est aisé de calculer les coefficients de Fourier $\boldsymbol{J}^h$ de $\boldsymbol{J}(t)$ en fonction de ceux de la solution périodique $\boldsymbol{z}_0(t)$ de $z(t)$. La présente méthode de tri est incluse dans la version 2.0 du logiciel Manlab [11].

3 Exemples de validation

3.1 L'oscillateur de Duffing

La procédure de tri des fonctions propres du problème aux valeurs propres de Hill est tout d'abord testé sur les solutions périodiques de l'équation de Duffing :

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + \omega_0^2 u + \Gamma u^3 = F\cos(\Omega t), \tag{19}$$

où $u(t)$ est la fonction inconnue et μ, ω_0, Γ et F sont des paramètres. La fréquence d'excitation Ω est utilisée ici comme paramètre de contrôle et les harmoniques 1, 2 et 3 sont tracées en fonction de Ω sur la figure 1. Ces solutions étant classiques (voir par ex. [18, 19]), on montre que l'algorithme permet d'identifier efficacement les bifurcations « nœud-col » (qui apparaissent exactement avec une tangente verticale dans le plan amplitude / paramètre de bifurcation) ainsi qu'un couple de bifurcation « fourche » avec brisure de symétrie, qui donne naissance à la résonance superharmonique d'ordre 2.

La figure 2 montre les parties réelles et imaginaires de toutes les valeurs propres $\hat{s}_n^l$ en fonction de Ω, superposées aux $\hat{s}_n^0$ $(n = 1, \ldots, N)$ triés pour calculer les α_n. Sur la figure de gauche, on voit clairement que considérer tous les $\hat{s}_n^l$ pour la détermination de la stabilité conduirait à identifier la bifurcation « nœud-col » proche de la résonance du système à une mauvaise position (précisément à $\Omega \simeq 2.5$ au lieu de $\Omega \simeq 4.3$), ce qui valide la présente approche.

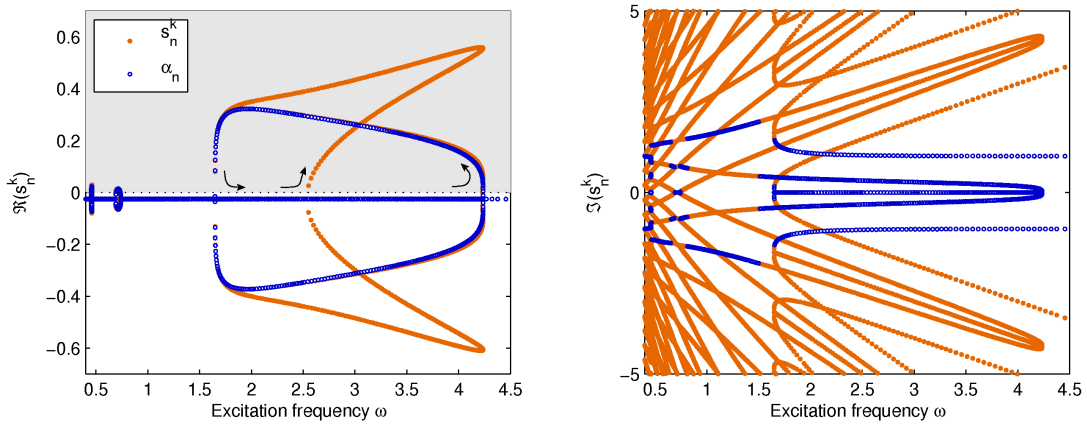

FIG. 2 – Valeurs propres de $\boldsymbol{H}$ en fonction de Ω, correspondant à la simulation de la Fig. 1. '•' : tous les $\hat{s}_n^k$, pour $n = 1, 2$ et $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm H$; '∘' : α_n, $n = 1, 2$ triés avec la présente méthode. (gauche) : partie réelle ; (droite) : partie imaginaire. La région grise correspond à des solutions périodiques instables.

3.2 Résonance interne 1:1 dans une corde

On considère ici une corde, modélisée par une poutre droite précontrainte, sujette à des vibrations non linéaire géométriques. Si les conditions aux limites sont parfaites, les modes apparaissent par paires de modes dit compagnons : chaque fréquence propre est double et associée à deux déformées modales identiques, l'une vibrant dans le plan vertical et l'autre dans le plan horizontal. Lorsqu'une excitation ponctuelle harmonique est appliquée à la corde dans le plan vertical au voisinage d'une résonance, les non-linéarités peuvent conduire à des couplage avec les modes dans le plan horizontal, si bien qu'un mouvement tridimensionnel de la corde est observé.

Le système sans dimension vérifié par les modes propres de la corde est (pour plus de détails, se référer à [20]) :

$$\begin{cases} \ddot{p}_k + 2\mu_k \dot{p}_k + \omega_k^2 p_k + N \sum_{n=1}^{K} n^2 \pi^2 p_n = F_k \cos \Omega t, \\ \ddot{q}_k + 2\tilde{\mu}_k \dot{q}_k + \tilde{\omega}_k^2 q_k + N \sum_{n=1}^{K} n^2 \pi^2 q_n = 0, \\ N = \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{n=1}^{K} n^2 \pi^2 (p_n^2 + q_n^2). \end{cases} \tag{20}$$

où les inconnues sont : $p_k(t)$, $q_k(t)$, les coordonnées modales des modes verticaux et horizontaux, respectivement, et $N(t)$, la partie non-linéaire de l'effort axial. Les fréquences propres sont telles que $\tilde{\omega}_k \simeq \omega_k$.

La figure 3 représente l'harmonique 1 des coordonnées modales $p_1(t)$ et $q_1(t)$ des premiers modes compagnons de vibration de la corde, excités aux voisinage de leur résonance. Pour $\Omega \simeq \omega_1 \simeq 3.15$, le mouvement dans le plan vertical d'excitation devient instable au profit d'un mouvement couplé entre les modes verticaux et horizontaux. Les phases se calant exactement en quadrature, un mouvement elliptique d'un point de la corde est obtenu. La bifurcation fourche (PF), qui donne naissance à ce mouvement couplé, ainsi que toutes les bifurcation nœud-col (SN), sont ici parfaitement identifiée par la méthode de tri.

3.3 Résonance interne 1:2

Pour terminer, le couplage entre deux modes de vibration en résonance 1 : 2 est étudié. En pratique, ce cas de figure est observé dans le cadre d'oscillations non linéaires de pendules élastiques, d'objets flottants, d'ondes de surfaces et de structures minces élastiques [18, 21]. Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \mu_1 \dot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + \beta_1 u_1 u_2 = F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{u}_2 + \mu_2 \dot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + \beta_2 u_1^2 = F_2 \cos \Omega t \end{cases} \tag{21}$$

où u_1 et u_2 sont les coordonnées modales des deux modes considérés, $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ sont leurs fréquences propres et β_1, β_2 sont deux coefficients de couplage non linéaires. En pratique, lorsque le mode 1 (u_1) est excité proche de sa pulsation propre ω_1 ($F_2 = 0$, $\Omega \simeq \omega_1$), un couplage où le mode 2 (u_2) vibre à 2Ω apparaît. Les deux bifurcations « Neimark-Sacker » où la solution périodique se transforme en

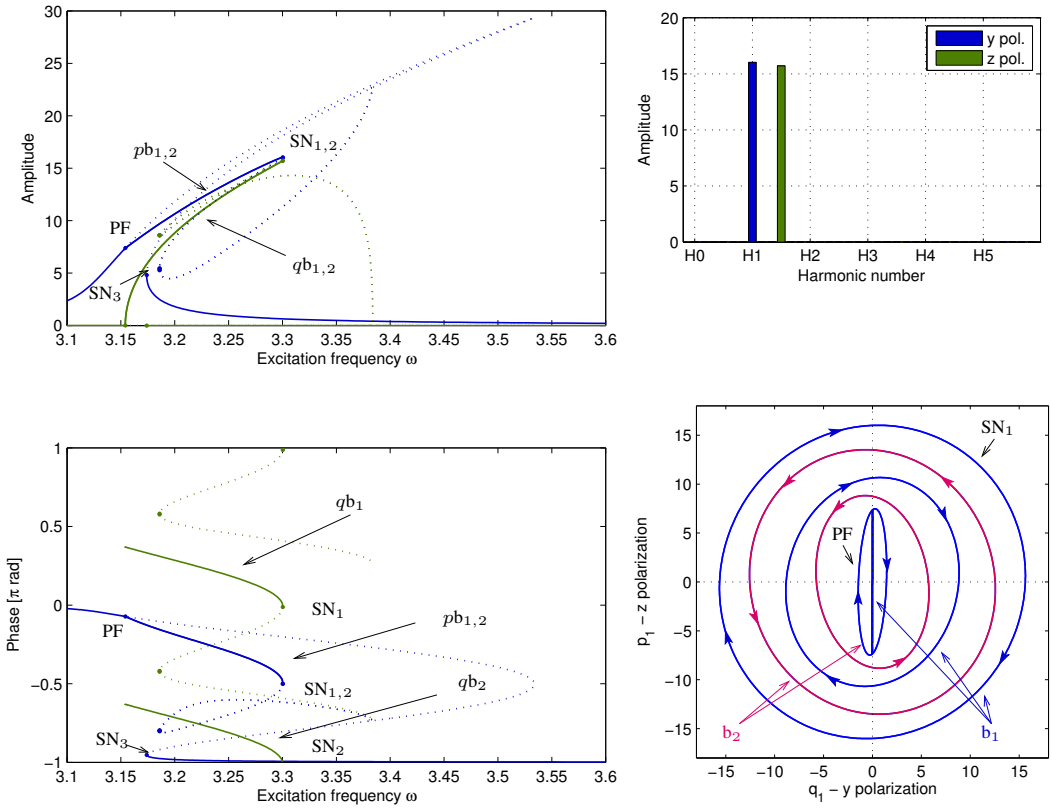

FIG. 3 – Courbe de résonance de la corde. Amplitude et phase de la première harmonique des deux coordonnées modales $p_1(t)$ et $q_1(t)$ en fonction de la pulsation d'excitation Ω. Mouvement d'un point de la corde dans un plan orthogonale à son axe. Simulations avec la méthode HBM-MAN et stabilité avec la présente méthode de Hill, avec $H = 5$ harmoniques. '—' : branches stables ; '$\cdots$' : branches instables. 'SN' : bifurcations nœud col ; 'PF' : bifurcations fourches.

une solution quasi-périodique, sont alors parfaitement identifiées par l'algorithme de calcul de stabilité (Fig. 4(gauche)). Dans le cas où c'est le mode 2 qui est excité proche de sa résonance ($F_1 = 0, \Omega \simeq \omega_2$), les deux bifurcations « doublement de période » donnant naissance au régime couplé de période double sont là encore parfaitement identifiées (Fig. 4(droite)).

Références

[1] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : Analytical, Computationnal and Experimental Methods*. Wiley series in nonlinear science, 1995.

[2] M. Peeters, R. Viguié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.

[3] T. F. Fairgrieve and A. D. Jepson. O.k. floquet multipliers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(5) :1446–1462, 1991.

[4] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 324(1-2) :243–262, 2009.

[5] G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1) :1–36, 1886.

[6] C. Villa, J.-J. Sinou, and F. Thouverez. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13 :804–821, 2008.

[7] A. Lazarus, D. Combescure, and B. Prabel. A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :3780–3797, 2010.

[8] J. Zhou, T. Hagiwara, and M. Araki. Spectral analysis and eigenvalues computation of the harmonic state operators in continuous-time periodic systems. *Systems & control letters*, 53 :141–155, 2004.

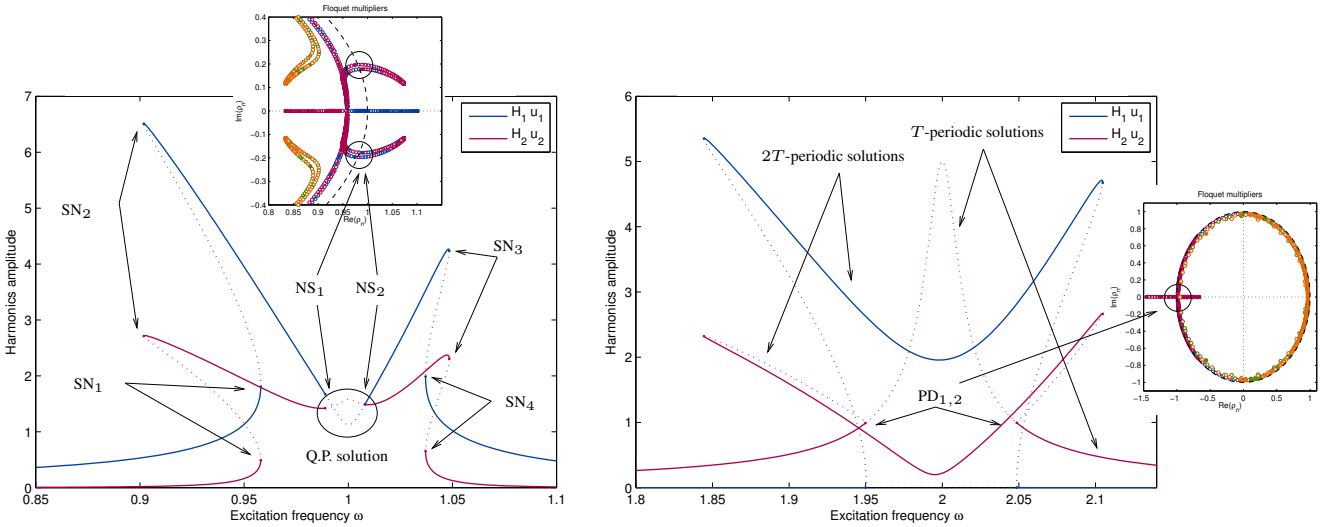

FIG. 4 – Courbes de résonance du système dynamique (21). (gauche) Cas d'excitation en basse fréquence où $F_2 = 0$ et $\Omega \simeq \omega_1 = 1$; (droite) Cas d'excitation en haute fréquence où $F_1 = 0$ et $\Omega \simeq \omega_2 = 2$. Simulations avec la méthode HBM-MAN et stabilité avec la présente méthode de Hill, avec $H = 10$ harmoniques. '—' : branches stables ; '$\cdots$' : branches instables. 'NS' : bifurcations Neimark-Sacker ; 'PD' : bifurcations doublement de période.

[9] C. W. Curtis and B. Deconinck. On the convergence of Hill's method. *Mathematics of computation*, 79 :169–187, 2010.

[10] A. Lazarus and O. Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517, 2010.

[11] S. Karkar, R. Arquier, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas, and A. Lazarus. Manlab 2.0, an interactive continuation software, November 2010. http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr.

[12] G. Floquet. Sur la théorie des équations différentielles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 8 :3–132, 1879.

[13] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[14] J. Argyris, G. Faust, and M. Haase. *An exploration of chaos*, volume VII of *Texts on computational mechanics*. North-Holland, 1994.

[15] H. Poincaré. Sur les déterminants d'ordre infini. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 14 :77–90, 1886.

[16] J. Killingbeck. On the Hill determinant method. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 19 :2903–2906, 1986.

[17] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :243–262, 2009.

[18] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. Wiley, 1979.

[19] W. Szemplinska-Stupnicka. *The Behavior of Nonlinear Vibrating Systems : Fundamental Concepts and Methods : Applications to Single-Degree-of-Freedom Systems*, volume 1. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[20] O. Thomas, A. Lazarus, and C. Touzé. A harmonic-based method for computing the stability of periodic oscillations of non-linear structural systems. In *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2010*, Montreal, Canada, August 2010.

[21] O. Thomas, C. Touzé, and É. Luminais. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1 :1 :2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 49(1-2) :259–284, 2006.