HAL
open science

Transition endommagement-rupture en 3D avec XFEM

Hans Minnebo, Thibaut Vanhoof, Julien Majérus, Frédéric Lani

To cite this version:

Hans Minnebo, Thibaut Vanhoof, Julien Majérus, Frédéric Lani. Transition endommagement-rupture en 3D avec XFEM. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592715

HAL Id: hal-00592715

https://hal.science/hal-00592715v1

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Transition endommagement-rupture en 3D avec XFEM

Hans MINNEBO[1], Julien MAJÉRUS[2], Thibaut VANHOOF[1], Frédéric LANI[1]

[1] *CENAERO, Gosselies, Belgique, hans.minnebo@cenaero.be*
[2] *LTAS, ULg, Liège, Belgique*

Résumé — Cette contribution porte sur l'implémentation de la transition endommagement-rupture dans le cadre de la modélisation du déchirement ductile de pièces métalliques soumises à un chargement monotone croissant. L'accent est mis ici sur la propagation d'une discontinuité existante, la macro-fissure, partant d'un critère de rupture calculé à partir de l'endommagement , via un enrichissement de l'approximation éléments finis. Cette contribution démontre la pertinence de l'approche sur un cas tridimensionnel.
Mots clés — endommagement, rupture, transition, XFEM, 3D.

La propagation d'une fissure existante dans un matériau élasto-plastique en présence d'endommagement [1] sous un chargement monotone est un problème qui commence à trouver des réponses dans des travaux récents [2, 3, 4]. Néanmoins, ces travaux se placent dans un cadre uniquement bidimensionnel. Dans ce contexte, la propagation en générant des nouvelles surfaces et le remaillage sont des opérations relativement aisées. Cependant, il n'est pas possible d'adresser des problèmes complexes par une simple modélisation bidimensionnelle. Dans le cadre de la propagation de fissure en fatigue, la méthode XFEM [5] (eXtended Finite Element Method) a déjà été utilisée pour la mécanique élastique linéaire de la rupture pour des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. La présente contribution consiste à expérimenter l'utilisation de la méthode XFEM dans un contexte élasto-plastique avec endommagement afin de réduire les contraintes de remaillage, notamment en 3D. Ainsi, après avoir rappelé les bases de la méthode XFEM ainsi que l'approche simplifiée utilisée pour la modélisation de l'endommagement avec un critère de propagation arbitraire, nous présentons un cas test pour valider l'approche proposée.

1 XFEM

Les techniques de suppression d'éléments, ou de remaillage ont leurs limites, a fortiori lorsqu'on ignore le chemin de fissure, surtout en trois dimensions. S'inspirant de travaux récents dans le domaine de la mécanique de la rupture linéaire [5], cette contribution propose de modéliser la transition de l'endommagement vers la rupture par l'incorporation de la fissure dans la formulation éléments finis étendus. *X-FEM* consiste en l'enrichissement d'un maillage existant par des fonctions de forme capables de représenter des discontinuités en champ et en gradient ainsi que des singularités.

1.1 Enrichissement pour les lèvres de la fissure

La fonction de Heaviside est utilisée pour créer les nouvelles fonctions de forme permettant de modéliser le saut de déplacements entre les lèvres de la fissure. Elle est définie de la manière suivante :

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Si les lèvres de la fissure sont en $x = 0$, les nouvelles fonctions de forme sont alors définies par $N_j^*(x) = H(x)\,.\,N_j(x)$. Les noeuds dont le support des fonctions de forme est entièrement découpé par la fissure sont enrichis avec cette méthode (voir Fig. 1).

1.2 Enrichissement pour la pointe de fissure

1.2.1 Cas élastique linéaire

En pointe de fissure, à partir de la solution asymptotique (valable uniquement dans le voisinage de la pointe), le déplacement peut être représenté par une combinaison de quatre fonctions indépendantes :

$$f_{1..4} = \{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\} \tag{2}$$

Définissons Ω l'ensemble des noeuds du domaine, par C l'ensemble des noeuds enrichis avec la fonction Heaviside, et par T l'ensemble des noeuds enrichis par ces fonctions, le champ de déplacement devient :

$$u(x) = \sum_{i\in\Omega} \lambda_i N_i(x) + \sum_{j\in C} \lambda_j^* N_j^*(x) + \sum_{j\in T}\sum_{k=1}^{4} \lambda_j^k N_j(x) f_k(r,\theta) \tag{3}$$

Comme pour l'enrichissement pour les lèvres de la fissure, la question de savoir quels noeuds il est nécessaire d'enrichir se pose. Tous les noeuds pour lequel le support des fonctions de forme est intercepté par la pointe de fissure doivent être enrichi par les fonctions f_i. La fonction f_1 présente une discontinuité sur les faces de la fissure car $f_1(\pi) \neq f_1(-\pi)$, ce qui permet d'avoir le saut de déplacements. L'enrichissement Heaviside est alors inutile sur les noeuds enrichis asymptotiquement. L'enrichissement minimal est indiqué à la Figure 1. Cependant, contrairement à l'enrichissement Heaviside, l'enrichissement de pointe de fissure peut couvrir une plus grande zone ([6], [7]).

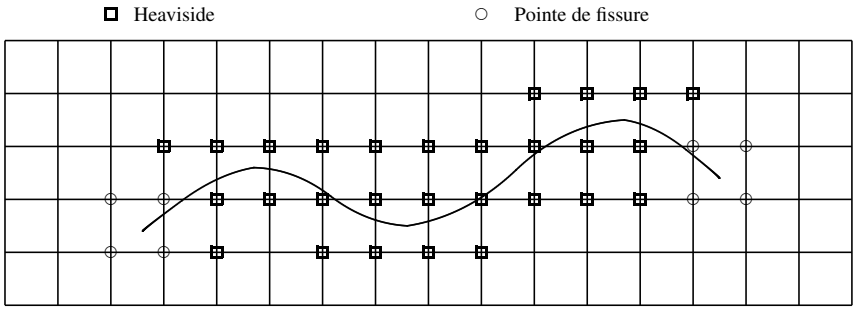

FIG. 1 – Enrichissement minimal

1.2.2 Cas non linéaire

En toute rigueur, les fonctions asymptotiques à utiliser dans le cas non linéaire devraient dépendre du matériau. Cependant, nous utiliserons les mêmes fonctions d'enrichissement que dans le cas linéaire. On pourrait vouloir se passer de l'enrichissement asymptotique puisqu'on ne connaît pas les fonctions adéquates à utiliser. On se retrouverait en présence d'enrichissement Heaviside uniquement. Le front de fissure serait restreint à se loger sur l'arête d'un élément (en 2D) ou sur une face d'élément (en 3D), ce qui conduirait à un front fortement perturbé. En présence d'enrichissement asymptotique, la fonction f_1 introduit une discontinuité en $\theta = \pm\pi$, ce qui permet de représenter le front à l'intérieur même d'un élément.

1.3 Méthode des level-sets

Il est nécessaire d'avoir un outil adapté pour évaluer les fonctions d'enrichissement. Pour ce faire, nous avons recours aux fonctions *level-sets* [8] qui permettent de décrire implicitement la géométrie de la fissure. Pour les lèvres de la fissure, on définit une fonction *level-set* normale lsn(x) qui représente la distance normale et signée par rapport à la fissure. La fonction de Heaviside s'exprime alors simplement par $H^*(x) = \text{SIGN}(lsn(x))$. On définit également la fonction *level-set* tangentielle lst(x) de manière telle que le front est représenté par l'intersection des lieux des points où les fonctions *level-set* sont nulles. Par convention, lst(x) est choisie négative du coté de la fissure. La Figure 2 donne un exemple pour la

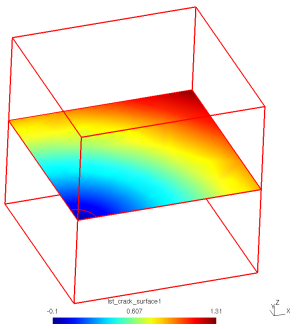

FIG. 2 – Fonction *level-set* tangentielle dans le plan de la fissure (lsn = 0)

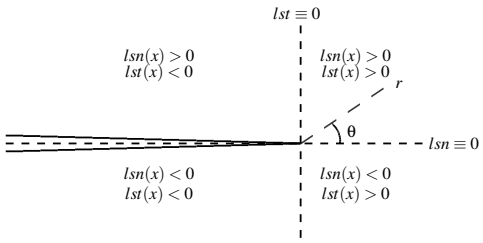

FIG. 3 – Définition des fonctions *level-sets* pour un cas simple

fonction *level-set* tangentielle, projetée sur l'iso-zéro de la fonction *level-set* normale, dans le cas d'une fissure en quart de cercle.

Les deux fonctions *level-sets* ainsi définies sont représentées à la Figure 3 et permettent de définir une base polaire pour chaque point du front : $re^{i\theta} = lst + ilsn$. Ces coordonnées sont directement utilisées pour les fonctions d'enrichissement.

2 Modèle d'endommagement

La mécanique de l'endommagement (CDM pour Continuum Damage Mechanics) [1] étudie la modélisation de la dégradation des propriétés mécaniques d'un matériau. Cette théorie ne nécessite pas la présence initiale d'un défaut macroscopique et permet d'analyser l'évolution de cette dégradation dans la structure. Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'endommagement ductile où la dégradation du matériau est causée par l'apparition de vides dans la matière. Le mécanisme d'endommagement ductile au niveau microscopique se déroule en trois étapes successives [2] (Fig. 4) :

1. La nucléation : Les déformations au voisinage d'imperfections du matériau (joints de grains, inclusions) peuvent engendrer des micro-vides.
2. La croissance : Lorsque la mise en charge se poursuit, la taille des vides augmente. La vitesse de croissance de ces vides est fortement influencée par la triaxialité des contraintes. Elle est définie comme étant le rapport de la contrainte hydrostatique à la contrainte équivalente.
3. La coalescence : Les vides grandissant ne sont plus séparés que par de minces parois de matière qui, en cédant, génèrent le phénomène de coalescence des vides, prémice de l'apparition de fissure macroscopique.

Cette description à l'aide d'un adoucissement est suffisante jusqu'à l'apparition d'un défaut. Par la suite, en sus des problèmes numériques liés à l'adoucissement (dépendance au maillage, absence de longueur caractéristique), la transition vers un défaut macroscopique, i.e. une discontinuité, et sa propagation dans un maillage de départ pose un certain nombre de difficultés. Alors que la mécanique de la rupture modélise la dégradation d'un matériau par les discontinuités franches que sont les fissures, la mécanique de l'endommagement permet de modéliser de manière continue la dégradation d'un matériau. Toujours par opposition à la mécanique de la rupture, avec un modèle d'endommagement, il n'y a pas de restriction sur la taille de la zone plastifiée. Par conséquent, ce type de modèle est particulièrement adapté aux matériaux ductiles où les phénomènes non linéaires occupent un volume du même ordre de grandeur que la taille du spécimen. Cependant, un modèle d'endommagement, de par sa continuité, est incapable de modéliser une fissure macroscopique.

2.1 Calcul simplifié de l'endommagement

En ce qui concerne le modèle d'endommagement, dans une première approche de preuve de concept, et afin de s'affranchir des problèmes de dépendance au maillage rencontrés avec un modèle local dans

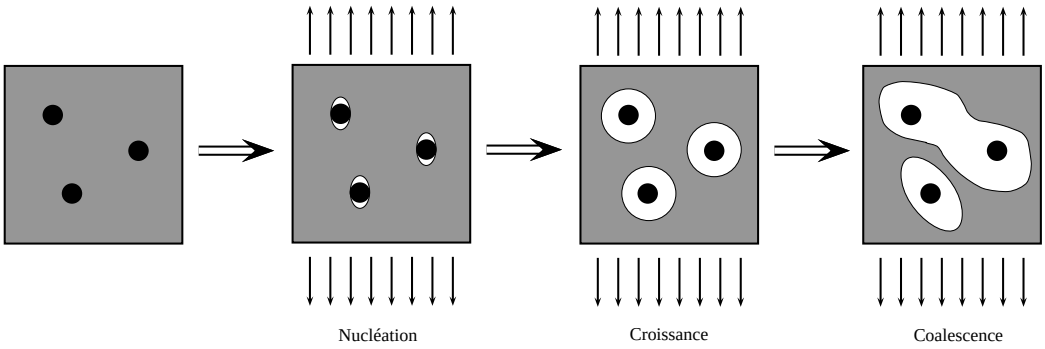

FIG. 4 – Endommagement ductile au niveau microscopique

une approche couplée, une approche découplée a été choisie. L'endommagement est déterminé en post-traitant les déformations plastiques issues d'un calcul élasto-plastique, en utilisant un modèle comme proposé dans [10]. Dans le cas d'une rupture ductile en chargement uniaxial monotone, [10] propose un modèle simple d'endomamgement basé sur une variable scalaire (D) qui augmente linéairement avec la déformation plastique équivalente. Expérimentalement, en traction uni-axiale, on obtient une loi de la forme suivante ([9]) :

$$D = D_c \left\langle \frac{\varepsilon^p - \varepsilon_D^p}{\varepsilon_R^p - \varepsilon_D^p} \right\rangle \tag{4}$$

où $\langle x \rangle = \max(x, 0)$, D_c est un l'endommagement limite à rupture (coalescence des vides) et ε^p, ε_D^p et ε_R^p sont respectivement la déformation plastique, la déformation plastique de nucléation de l'endommagement et la déformation plastique à la rupture.

Selon [9], on observe les ordres de grandeur suivants : $D_c \approx 0.5$ et $\varepsilon_D^p / \varepsilon_R^p \approx 0.5$, ce qui donne une estimation de l'endommagement caractérisé par un seul paramètre matériau :

$$D \approx \left\langle \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_R^p} - \frac{1}{2} \right\rangle \tag{5}$$

Dans le cas présent, nous faisons l'hypothèse que ce critère reste valable pour des chargements plus complexes en utilisant la déformation plastique équivalente au sens de von Mises.

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} \tag{6}$$

Dans [10], on retrouve la même expression que (4), mais pour laquelle la déformation plastique est remplacée par la déformation totale. Cela reste valide puisque, en régime ductile, la déformation élastique est négligeable devant la déformation plastique, soit $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \approx \varepsilon^p$. Par contre, l'ordre de grandeurs de D_c est plutôt de 0.25. Il semble également que le rapport $\varepsilon_D^p / \varepsilon_R^p$ soit très dispersé en fonction du matériau.

Le choix du modèle n'influence pas la façon dont l'algorithme de propagation de fissure est construit par la suite. Cela signifie que si un modèle d'endommagement plus complexe est utilisé, la procédure de propagation restera inchangée.

3 Couplage XFEM-endommagement

La transition d'un modèle à l'autre est opérée avec une méthode similaire à celle développée dans [3], pour le cas bidimensionnel. Dans la zone située en avant de la fissure tridimensionnelle existante, lorsque l'endommagement atteint une valeur critique prédéfinie, une méthode de propagation est utilisée. Un échantillonnage est réalisé avec une répartition rayonnante autour du front en avant de la fissure, sur plusieurs cylindres concentriques. La méthode consiste en une recherche de la direction de propagation en chaque point du front en fonction de la répartition de l'endommagement, la détermination de la longueur propagée peut alors se faire en fonction du niveau d'endommagement à une certaine distance dans cette direction. Le principe de l'algorithme est indiqué dans la Figure 5.

Nous nous intéressons uniquement à la propagation d'une fissure macroscopique existante, celle-ci étant insérée manuellement après une simulation sur pièce saine permettant de localiser les zones à fort endommagement. Nous étudions une pièce constituée d'un matériau élasto-plastique soumise à un chargement croissant et comportant une fissure initiale. Nous cherchons à savoir à partir de quel instant la fissure va se propager et dans quelle direction. Dès que cela est nécessaire nous propageons la fissure et poursuivons ensuite la mise en charge jusqu'à ce que la fissure doive de nouveau être propagée.

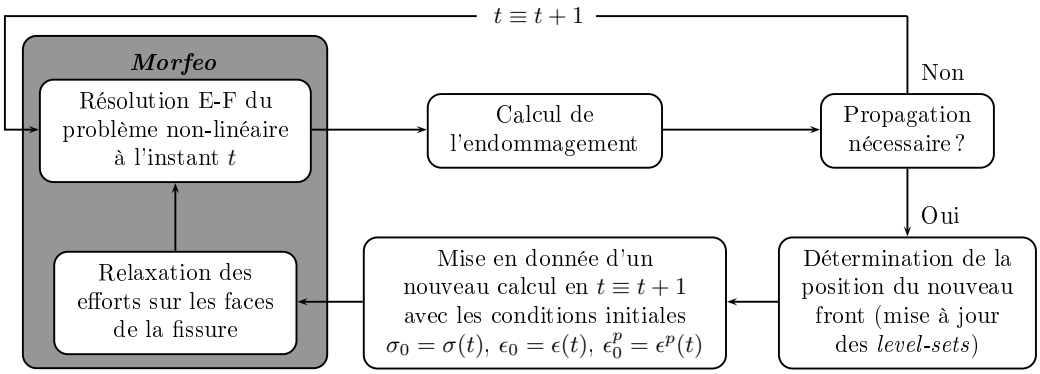

FIG. 5 – Principe général

L'algorithme général est repris à la Figure 5. Le calcul de l'endommagement est réalisé à chaque pas de temps. Si le critère de propagation est atteint, la position du nouveau front est calculée et les *level-sets* sont mises à jour. Un nouveau calcul utilisant les nouvelles *level-sets* est alors démarré en prenant comme conditions initiales les champs de contraintes, de déformations et de déformation plastique équivalente de l'instant précédent. Les efforts sur les faces du nouvel incrément de fissure sont relaxés et le chargement est poursuivi.

3.1 Zone d'intérêt

Au voisinage du front, une zone d'intérêt (Figure 6) est définie dans laquelle les contraintes et l'endommagement sont analysés. Ces données sont connues aux points d'intégration. Pour former cette zone, nous avons à notre disposition la valeur des *level-sets* en chaque noeud du domaine. Elle est formée sur base des arguments suivants :

- La fissure ne peut qu'avancer. Tous les éléments situés derrière le front, c'est-à-dire les éléments pour lesquels tous les noeuds ont une valeur de *lst* négative, sont exclus.
- De même, ce qui se passe loin du front n'influence pas les résultats. Une distance maximale au front r_{max} est définie en rapport avec le pas de propagation maximal, en utilisant les *level-sets* pour la comparaison.
- Enfin, les variables calculées dans un voisinage immédiat du front sont sujettes à de plus grandes erreurs. Une distance minimale r_{min} permet d'exclure les éléments trop proches du front.

3.2 Critère de direction

La fissure est propagée dès lors que l'endommagement est supérieur à l'unité dans au moins un élément situé dans la zone d'intérêt. À chaque pas de temps, ce critère est analysé pour réaliser une éventuelle propagation. Contrairement à [3], le problème est tridimensionnel. Le front de fissure ne se limite plus à un point et devient une courbe. Pour un point donné P de cette courbe, il faut donc restreindre (dans la direction tangentielle au front) la zone d'intérêt et en définir une sous-zone, localement au point P. Sur la Figure 7, la distance restriction dans la direction tangentielle au front vaut $2l$. De plus, les contraintes ne peuvent pas être évaluées en des points arbitraires comme des cercles puisque nous ne connaissons les contraintes qu'au point d'intégration situé au centre de gravité de chaque élément. La zone est découpée en n couches comme représenté sur la Figure 7.

Dans [3] et en accord avec les essais expérimentaux, il est constaté qu'une fissure va se propager différemment selon que le mode de mise en charge est dominé par de la tension ou par du cisaillement.

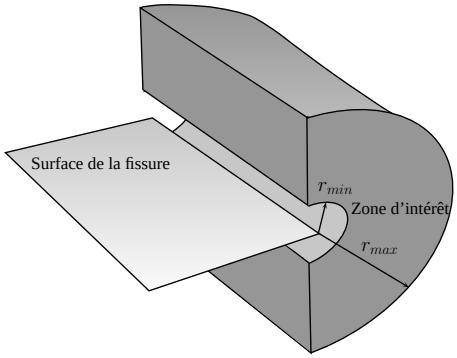

FIG. 6 – Zone d'intérêt

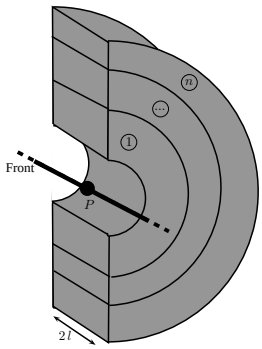

FIG. 7 – Découpage pour le calcul de la direction de propagation en 3D

Dans le premier cas, la fissure a tendance à suivre la direction de la contrainte circonférentielle maximale, alors que dans le second elle a tendance à suivre la direction de la contrainte de cisaillement maximal. L'auteur en a déduit un critère capable de reproduire ce phénomène. Selon son critère, la fissure se propage dans la direction qui maximise la contrainte équivalente τ_m définie par :

$$\tau_m = \max\left(\langle\langle(1-\alpha)\sigma_{\theta\theta}(\theta)\rangle\rangle, \alpha\|\tau_{r\theta}(\theta)\|\right) \tag{7}$$

où $\alpha \in [0,1]$ est un paramètre matériau déterminé expérimentalement qui pondère la dominance du critère de la contrainte de cisaillement maximal par rapport au critère de la contrainte tangentielle maximale. Pour chaque couche i ($i = 1,n$), on recherche tous les éléments ayant leur point d'intégration dans cette couche. Pour chacun de ces éléments dans la couche i, on calcule $\tau_m(\theta)$. Parmi toutes les valeurs obtenues, on cherche la direction θ_i qui maximise τ_m dans cette couche. Finalement, on obtient la direction de propagation du point P en faisant la moyenne des θ_i obtenus dans chaque couche. L'opération est répétée pour chaque point du front. Enfin, un lissage de la direction est réalisée en supposant que l'angle de propagation est une fonction polynomiale de l'abscisse curviligne.

3.3 Avancement du front

Dans [2, 3] où une approche découplée est suivie, la taille de l'incrément de fissure est un paramètre de discrétisation. Dans [11, 12], où une approche pseudo-XFEM et couplée est utilisée et où la fissure est introduite via une fonction de Heaviside, la fissure avance élément par élément. La taille de l'incrément est donc dictée par la taille des éléments près du front. Ces quatre auteurs travaillent en deux dimensions.

En trois dimensions, il faut tenir compte du fait que tous les points du front n'avancent pas à la même vitesse puisque l'état de contrainte et/ou d'endommagement n'est pas identique en tout point du front. Nous choisissons donc une longueur maximale d'incrément de fissure qui est un paramètre de discrétisation. On peut raisonnablement supposer qu'un point du front situé dans une zone très endommagée avancera plus qu'un point situé dans une zone moins endommagée. N'ayant pas de loi matériau à notre disposition, on fait l'hypothèse que les points du front se déplace d'une distance proportionnelle à la valeur de l'endommagement extrapolé au front, soit :

$$da(s) = da_{max}\frac{D_{front}^{smooth}(s)}{\max(D_{front}^{smooth})} \tag{8}$$

3.4 Relaxation des efforts

Une fois la fissure propagée et les conditions initiales rechargées, il est nécessaire de rétablir l'équilibre en annulant les efforts sur les faces de la fissure. Partant d'un champ de contraintes connu dans tous les éléments, les efforts internes sont déterminés sur la surface en question. Ensuite, avec une procédure incrémentale, des conditions limites de type Neumann sont créées, dont l'intensité est égale et de signe opposé aux efforts internes calculés sur la surface.

4 Validation

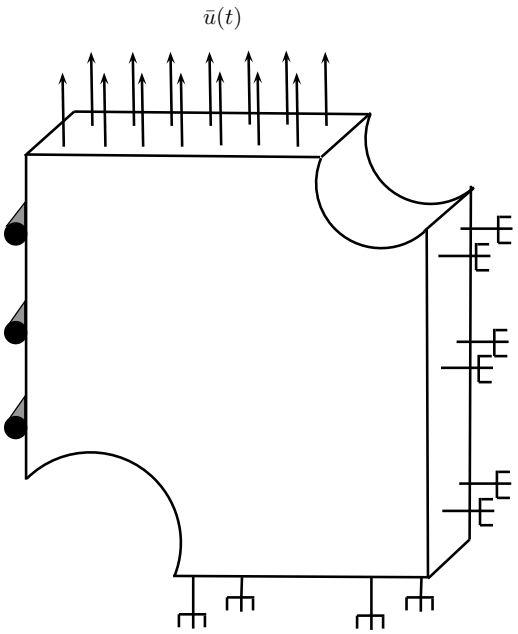

FIG. 8 – Cas test étudié

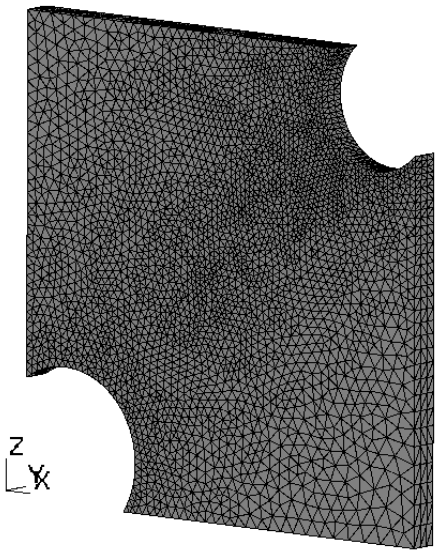

FIG. 9 – Maillage de la pièce

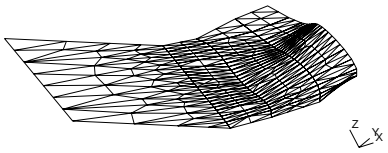

FIG. 10 – Maillage de la fissure après plusieurs pas

Le cas test étudié (Fig. 8-9) correspond à l'extrusion , avec une faible épaisseur du cas présenté dans [3]. L'allure de la fissure après plusieurs pas de propagation est indiqué à la Figure 10, l'utilisation d'un modèle tridimensionnel permet d'observer plus en détails la complexité de la propagation dans l'épaisseur, même pour une structure assez mince. La Figure 12 montre que les résultats obtenus sur le modèle tridimensionnel sont proches de ceux obtenus dans [3] pour le cas bidimensionnel (Fig. 11). L'aspect de la fissure est fort similaire et la courbe force/déplacement a une allure proche, les matériaux et épaisseurs ne sont pas identiques dans les cas. L'aspect saccadé de la courbe est dû au fait que le maillage n'est pas raffiné localement. Ce travail montre la faisabilité de la démarche d'une manière encourageante.
Toutefois, de nombreux points pourront permettre d'atteindre des résultats plus complets et précis, tels que : améliorer la stratégie d'enrichissement (fonctions asymptotiques adaptées aux matériaux non-linéaires), réaliser un raffinement local, utiliser d'autres modèles d'endommagement, initier une fissure, contrôler la taille de l'incrément, prendre en compte la triaxialité. Aussi, l'intégration des variables avec XFEM est réalisée grâce à un sous-découpage des éléments, qui évolue avec la propagation de la fissure. De la même manière que [4] dans le cas du remaillage, ceci a pour effet que le transfert des variables d'état introduit des erreurs. Afin d'y remédier, un opérateur de transfert plus précis doit être utilisé, prenant en compte la variation des variables d'état sur un élément au lieu de leur valeur moyenne. De plus, dans le cas de grandes transformations, un remaillage pourrait s'avérer nécessaire.

Références

[1] A. Pineau, T. Pardoen. *Failure of metals*, Comprehensive Structural Integrity, 2, Elsevier, chapter 6, 686-783, 2008.

[2] D. Brokken. *Numerical modelling of ductile fracture in blanking*, Thèse de doctorat, TU Eindhoven, 1999.

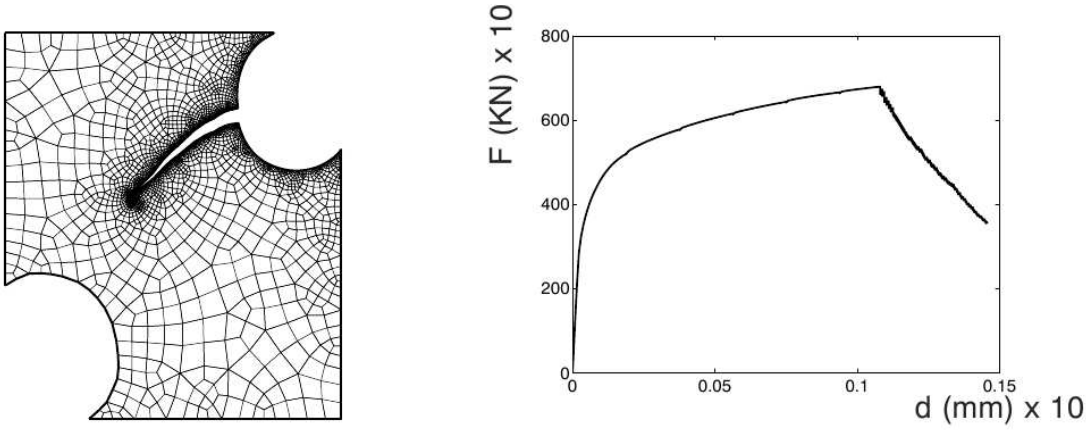

FIG. 11 – Champ de déplacement et courbe effort/déplacement en 2D, source [3]

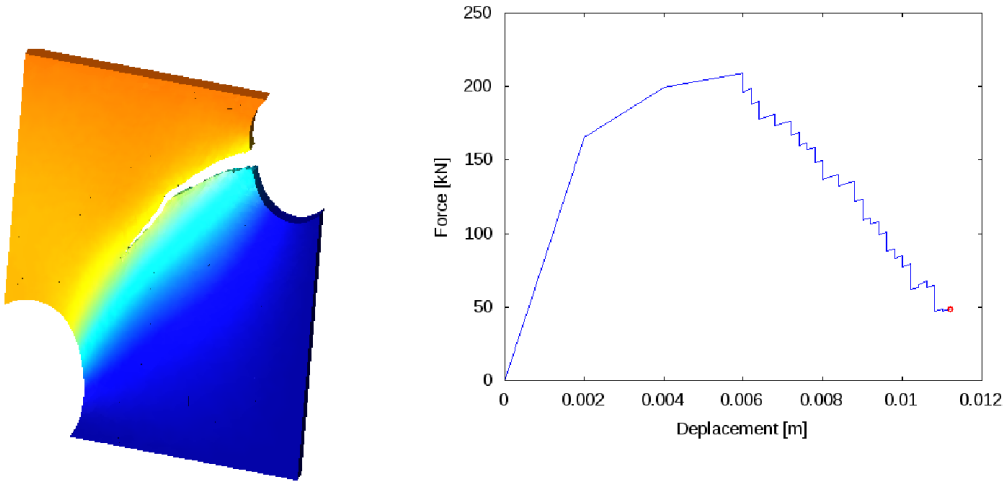

FIG. 12 – Champ de déplacement et courbe effort/déplacement en 3D

[3] J. Mediavilla Varas. *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*, Thèse de doctorat, TU Eindhoven, 2005.

[4] J. Mediavilla Varas, R. H. J. Peerlings, M. G. D. Geers. *Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 66, PP. 661-688, 2006.

[5] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 46, 1, PP. 131-150, 1999.

[6] E. Béchet and H. Minnebo and N. Moës and B. Burgardt. *Improved Implementation and Robustness Study of the X-FEM for Stress Analysis Around Cracks*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 64, PP. 1033-1056, 2005.

[7] P. Laborde and J. Pommier and Y. Renard and M. Salaün. *High-Order Extended Finite Element Method for Cracked Domains*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 64, PP. 354-381, 2005.

[8] S. Osher and J. A. Sethian. *Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*, J. Comp. Phys., vol. 79, PP. 12-49, 1988.

[9] J. Lemaitre and R. Desmorat. *Engineering damage mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures*, Springer Verlag, 2005.

[10] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.

[11] A. Simone and G. N. Wells and L. J. Sluys.*From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model* Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., vol. 192, PP. 4581-4607, 2003.

[12] G. N. Wells and L. J. Sluys and René De Borst. *Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularised strain-softening medium* Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 53, PP. 1235-1256, 2002.