



**HAL**  
open science

## Glissement intermatériaux lors de simulations ALE en grandes déformations et grandes vitesses

Gauthier Folzan, Patrick Le Tallec, Jean-Philippe Perlat

► **To cite this version:**

Gauthier Folzan, Patrick Le Tallec, Jean-Philippe Perlat. Glissement intermatériaux lors de simulations ALE en grandes déformations et grandes vitesses. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 7 p. ; Clé USB. hal-00592708

**HAL Id: hal-00592708**

**<https://hal.science/hal-00592708>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Glissement intermatériaux lors de simulations ALE en grandes déformations et grandes vitesses

Gauthier Folzan<sup>1, 2</sup>, Patrick Le Tallec<sup>2</sup>, Jean-Philippe Perlat<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France, gauthier.folzan@cea.fr, jean-philippe.perlat@cea.fr

<sup>2</sup> Ecole Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR7649, F-91128 Palaiseau Cedex, France, patrick.letallec@polytechnique.edu

**Résumé** — Lors de simulations de milieux multimatériaux en grandes déformations avec une méthode ALE, l'interface entre les matériaux peut se retrouver à l'intérieur des mailles de calcul. Il faut donc mettre en place une stratégie spécifique dans ces mailles mixtes. La méthode proposée, basée sur les éléments finis enrichis permet d'avoir un champ de vitesse propre à chaque matériau y compris dans les mailles mixtes. La réunion des différents champs de vitesse peut présenter une discontinuité sur l'interface ce qui donne la liberté nécessaire à la simulation du glissement entre les matériaux.

**Mots clés** — ALE, Mailles mixtes, Hydrodynamique rapide, Glissement.

## Introduction

Lors de simulations de milieux en grandes déformations, les méthodes purement lagrangiennes atteignent leurs limites. En effet, dans ces méthodes, le maillage se déforme avec la matière, sa qualité est alors insuffisante pour pouvoir effectuer des simulations fiables. Ceci est particulièrement critique pour les problèmes multimatériaux qui peuvent présenter de forts gradients de vitesse.

Les méthodes arbitrairement lagrangiennes euleriennes (ALE) permettent de pallier ce problème. Dans ce formalisme, le maillage se déplace à une vitesse définie arbitrairement et pouvant être différente de la vitesse de la matière. Lors de la simulation d'un système contenant plusieurs milieux différents avec ce type de méthode, l'interface entre les matériaux peut se retrouver à l'intérieur des mailles de calcul. Il faut donc mettre en place une stratégie spécifique dans les mailles mixtes pour prendre en compte les interactions entre les différents matériaux au sein de ces mailles ainsi que le glissement possible voire le frottement entre les matériaux.

La méthode présentée, basée sur les éléments finis enrichis [1], permet d'avoir un champ de vitesse propre à chaque matériau. La réunion des différents champs de vitesses forme un champ de vitesse enrichi qui peut présenter une discontinuité sur l'interface ce qui donne la liberté nécessaire à la simulation du glissement entre les matériaux. Cette méthode est utilisée dans le cadre d'une simulation ALE qui décompose chaque pas de temps en une phase lagrange suivi d'une phase de transport.

Lors de la phase lagrangienne, la méthode présentée permet de calculer le comportement des mailles mixtes alors que le schéma de calcul des mailles pures n'est pas affecté. Ces dernières sont toujours calculées par le schéma explicite classique de Wilkins [2] largement utilisé dans les codes hydrodynamiques industriels.

La phase d'advection du schéma ALE est écrite sous la forme d'une projection par intersection de volume sur un maillage régularisé et permet d'assurer la qualité du maillage lors de la simulation.

## 1 Présentation du problème

### Systeme continu

Soit  $\mathcal{D}$ , un domaine de frontière  $\partial\mathcal{D}$  (voir figure 1) composé de deux matériaux  $\alpha$  et  $\beta$ . On appelle  $\mathcal{D}_\alpha$  la partie du domaine occupée par le matériau  $\alpha$  et  $\mathcal{D}_\beta$  la partie du domaine occupée par le matériau  $\beta$ . L'interface entre les deux matériaux est appelée  $\Gamma$ .

Lors de simulation de ce type de problème, il faut résoudre les trois équations classiques de conser-

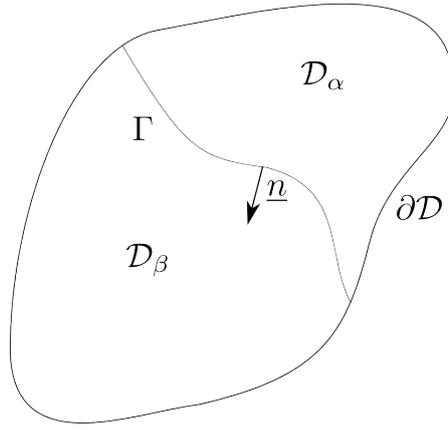


FIGURE 1 – Domaines

vation du mouvement, de la masse et de l'énergie pour chaque matériau  $\alpha$

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} + \rho_\alpha \nabla \cdot \underline{u}_\alpha = 0, \quad (1)$$

$$\rho_\alpha \frac{d\underline{u}_\alpha}{dt} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}_\alpha = 0, \quad (2)$$

$$\rho_\alpha \frac{de_\alpha}{dt} - \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} \frac{d\rho_\alpha}{dt} - \underline{\underline{S}}_\alpha : \underline{\underline{d}}_\alpha = 0. \quad (3)$$

Il faut ajouter à ces équations une loi de comportement spécifique à chaque matériau. Cette loi de comportement peut être hydrodynamique pure avec un déviateur des contraintes nul ou bien élastoplastique en ajoutant une loi sur le déviateur des contraintes ou sa dérivée.

Enfin, ce système est complété par deux équations écrites sur l'interface et traduisant les interactions entre les matériaux.

La première est l'écriture de l'égalité des contraintes normales entre les deux matériaux. Dans le cas de glissement sans frottement, les contraintes normales entre les matériaux à l'interface sont uniquement dans la direction normale à la surface de contact. Le frottement peut ajouter une composante tangentielle à ces contraintes, généralement dépendant de la pression normale et des caractéristiques des matériaux. La condition d'équilibre des contraintes entre les matériaux prend la forme forte

$$\underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n} = \underline{\underline{\sigma}}_\beta \cdot \underline{n} = \underline{p}_\Gamma \quad \forall x \in \Gamma \quad (4)$$

où les indices  $\alpha$  et  $\beta$  dénote à quel matériau se réfère le champ. La normale  $\underline{n}$  est sortante pour le domaine  $\mathcal{D}_\alpha$  mais entrante pour le domaine  $\mathcal{D}_\beta$ .

La seconde équation traduit l'hypothèse que les matériaux restent en contact et ne s'interpénètrent pas. Cette condition est assurée en imposant la continuité des vitesses normales à l'interface et peut s'écrire

$$\underline{u}_\alpha \cdot \underline{n} = \underline{u}_\beta \cdot \underline{n} \quad \forall x \in \Gamma. \quad (5)$$

On ajoute sur le bord du domaine des conditions limites par exemple homogène du type

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} &= \underline{0} & \text{sur } \partial\mathcal{D}_n, \\ \underline{u} &= \underline{0} & \text{sur } \partial\mathcal{D}_d \end{aligned}$$

avec  $\partial\mathcal{D}_d$  et  $\partial\mathcal{D}_n$  deux parties de  $\partial\mathcal{D}$  telle que  $\partial\mathcal{D}_d \cup \partial\mathcal{D}_n = \partial\mathcal{D}$  et  $\partial\mathcal{D}_d \cap \partial\mathcal{D}_n = \emptyset$ .

## Forme faible

Écrit au sens faible, les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_\alpha} \rho_\alpha \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\mathcal{D}_\alpha} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_\alpha : \nabla \hat{\mathbf{u}} dV &= \int_\Gamma \underline{p}_{\alpha,\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}, \\ \int_{\mathcal{D}_\beta} \rho_\beta \frac{d\mathbf{u}_\beta}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\mathcal{D}_\beta} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_\beta : \nabla \hat{\mathbf{u}} dV &= \int_\Gamma \underline{p}_{\beta,\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

On complète ces relations en écrivant l'équilibre des contraintes entre les deux matériaux à l'interface sous forme faible

$$\int_\Gamma \underline{p}_{\alpha,\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS = - \int_\Gamma \underline{p}_{\beta,\Gamma} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS = \int_\Gamma \underline{p}_\Gamma \cdot \hat{\mathbf{u}} dS, \quad \forall \hat{\mathbf{u}}$$

ainsi que l'égalité des vitesses normales

$$\int_\Gamma (\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_\beta \cdot \mathbf{n}) \hat{p} dS = 0, \quad \forall \hat{p}.$$

On cherche alors les solutions respectant ce système quelque soit le champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}}$  et le champ de pression virtuelle  $\hat{p}$ .

## 2 Discrétisation

### 2.1 Discrétisation spatiale

On discrétise le système précédent en partant de la discrétisation du schéma de Wilkins classique. Les quantités thermodynamiques sont discrétisées par des champs constants par élément et la vitesse est discrétisée par un champ linéaire par morceaux, défini aux noeuds du maillage et interpolé dans les éléments par des fonctions de formes linéaires.

La discrétisation du champ de vitesse est cependant modifiée par rapport au schéma de Wilkins pour pouvoir rendre compte de la discontinuité de vitesse et le glissement possible sur l'interface. Pour cela, on double les degrés de liberté des vitesses des noeuds des mailles mixtes. Ces mailles possèdent donc deux champs de vitesse, ce qui permet d'écrire une équation de conservation de la quantité de mouvement par noeud et par matériau sur ces mailles.

Les champs des deux matériaux se chevauchent et leur intersection est constituée de l'ensemble des mailles mixtes, c'est à dire l'ensemble des mailles contenant plusieurs matériaux (en vert sur la figure 2). Certains noeuds du champ de vitesse d'un matériau se situent donc à l'extérieur du domaine de ce matériau. Ces noeuds externes contribuent tout de même au champ de vitesse du matériau car le support de la fonction de forme de ces noeuds intersecte l'interface. Les champs de vitesse peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha(x) &= \sum_{i \in N_\alpha} \underline{u}_{\alpha i} \Psi_i(x) + \sum_{i \in N_\alpha^+} \underline{u}_{\alpha i} \Psi_i(x), \\ \mathbf{u}_\beta(x) &= \sum_{i \in N_\beta} \underline{u}_{\beta i} \Psi_i(x) + \sum_{i \in N_\beta^+} \underline{u}_{\beta i} \Psi_i(x). \end{aligned}$$

avec  $N_\alpha$  l'ensemble des noeuds du domaine  $\mathcal{D}_\alpha$ ,  $N_\alpha^+$  l'ensemble des noeuds externes du matériau  $\alpha$  et  $\Psi_i(x)$  la fonction de forme associée au noeud  $i$ .

La pression d'interface est une nouvelle inconnue du système. Elle est discrétisée constante par maille. Les champs de pression virtuelle et vitesse virtuelle sont discrétisés de la même manière que le champ de vitesse enrichi et de pression d'interface.

En adoptant cette définition des champs, la discrétisation des équations de conservation de la masse et de l'énergie n'est pas différente de celle du schéma de Wilkins classique écrit une fois pour chaque matériau dans les mailles mixtes.

Le schéma de Wilkins fait une approximation dans la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement en condensant la masse sur les noeuds ce qui revient à approcher le champ de densité par

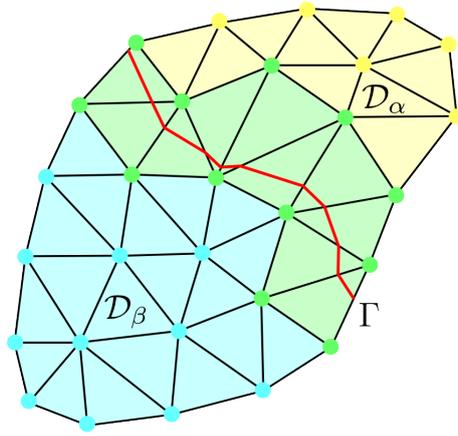


FIGURE 2 – Maillage enrichi

$\rho(x) = m_i \delta_i(x)$ . Nous faisons la même approximation en agrégeant la masse des noeuds externes sur celle des noeuds internes à proximité de l'interface (voir l'illustration figure 3).

La discrétisation de la quantité de mouvement est inchangée pour les noeuds dont le support de la fonction de forme n'intersecte pas l'interface mais cette agrégation de la masse modifie les formes discrétisées des équations des noeuds à proximité de l'interface. Les noeuds situés à l'intérieur du domaine ont leur masse augmentée par celle des noeuds externes alors que le terme d'accélération disparaît dans l'équation de quantité de mouvement des noeuds externes. L'intérêt est double :

- cela évite d'avoir des masses très faibles sur les noeuds externes, avec tous les problèmes de stabilité dynamique associés ;
- l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée aux noeuds externes se réduit à l'équation d'équilibre statique (3) de l'interface écrite au sens faible.

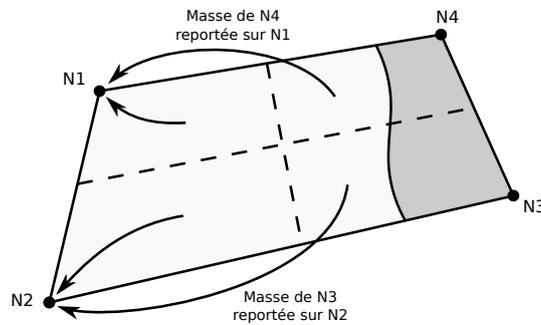


FIGURE 3 – Condensation de la masse

## 2.2 Discrétisation en temps

### 2.2.1 Phase lagrangienne

La phase lagrangienne modifie les contraintes et la dynamique des points dans les mailles mixtes en ajoutant une équation supplémentaire associée aux noeuds externes et l'équation de continuité (5). L'équilibre des pressions et la continuité des vitesses à l'interface rendent inadéquat le schéma explicite utilisé dans les mailles pures car un tel schéma ne permet pas de traiter la dynamique des noeuds externes ni la condition de continuité en fin de pas temps.

Le calcul des mailles mixtes se fera donc de manière implicite ce qui permet d'assurer les conditions de sauts de champs sur l'interface et de s'affranchir de la condition CFL au prix de la résolution d'un système d'équations couplant les mailles mixtes entre elles.

La discrétisation de la conservation de la masse et de l'énergie sont toujours inchangées par rapport à un schéma explicite classique ainsi que la forme discrétisée en temps de la quantité de mouvement des noeuds avoisinés uniquement de mailles pures.

Cependant, on modifie la discrétisation en temps des contraintes dans les mailles mixtes. Elles sont approchées par un schéma trapèze pour l'équation de mouvement des noeuds internes à proximité de l'interface ce qui permet de rendre le système implicite et de coupler les contraintes en fin de pas de temps avec les vitesses des noeuds. Ces mêmes contraintes sont discrétisées de manière totalement implicite dans l'équilibre statique venant de l'équation de conservation de mouvement des noeuds externes. Cette discrétisation permet d'assurer l'équilibre des contraintes pour le pas de temps suivant et réduit les discontinuités de pressions qui peuvent apparaître après la phase de projection du schéma ALE.

### 2.2.2 Phase de projection

Le schéma présenté précédemment permet de résoudre le système lagrangien multimatériaux mais en complément de ce schéma, il faut ajouter la phase de transport et de projection. En effet, nous n'avons plus un maillage lagrangien unique à la fin du pas de temps puisque chaque matériau se déforme avec sa vitesse propre différente de celle du maillage.

Pour éviter la diffusion des quantités à travers l'interface, la projection est réalisée matériau par matériau à partir de l'intersection du maillage déformé par la phase lagrange avec les matériaux vers un maillage régularisé moyen. Enfin, les champs de vitesses de chaque matériau sont également projeté et non pas uniquement le champ de vitesse moyenne. La projection de champ de vitesse matériau se fait en partant de la définition complète du champ de vitesse en incluant les noeuds externes et non pas de l'intersection du champ avec le matériau ce qui permet de diminuer les erreurs de projection de vitesse que l'on peut trouver sur les bords du maillage.

## 3 Résolution

Le système à résoudre fait intervenir les lois de comportement des matériaux à travers la discrétisation implicite des contraintes. On peut utiliser une loi de comportement linéarisé de type  $dp = d\rho c^2$  pour n'avoir qu'un système linéaire à résoudre ce qui fonctionne si l'interface se situe dans les zones régulières de la solution mais cette méthode n'est pas stable lors du passage de chocs sur l'interface.

L'utilisation de la loi non-linéaire complète est alors nécessaire pour assurer la stabilité du schéma numérique. La résolution de ce système non-linéaire se fait par un processus itératif. Ces itérations se décomposent en deux étapes :

- une prédiction par résolution d'un système linéarisé qui permet de fixer la déformation totale de la maille en respectant la loi trapèze de la dynamique des noeuds internes. Le système à résoudre est alors le système complet dans lequel on aura remplacé la loi de comportement non-linéaire par une loi linéarisé autour de l'état actuel ;
- une correction par équilibrage non-linéaire qui modifie la répartition des déformations entre les différents matériaux pour assurer l'équilibre des contraintes à la fin du pas de temps. Cet équilibre vient de l'équation de quantité de mouvement des noeuds externes. En sortie de cette phase, les contraintes en fin de pas de temps dans la maille mixte ont été modifiée et la dynamique des noeuds internes n'est alors plus en adéquation avec l'approximation trapèze des contraintes. Il faut donc refaire la première étape en linéarisant autour du nouvel état calculé. La méthode aura convergé lorsque l'équilibrage ne modifie rien au système ce qui signifie que la maille est déjà équilibrée en sortie du système linéaire et que toutes les conditions sont respectées.

La phase de projection au voisinage des chocs peut faire apparaître une discontinuité de pressions dans la maille en début de pas de temps alors que la résolution précédente avait équilibré ces pressions. Cette discontinuité peut, dans certains cas, aboutir à un retournement de la maille en faisant sortir l'interface de la maille de calcul lors de la résolution du système linéarisé.

Pour éviter cela, on assure l'équilibre des contraintes entre les matériaux en début de pas de temps par une phase de relaxation des contraintes dans les mailles mixtes. La résolution du système non-linéaire débute ensuite à partir d'un état équilibré ce qui assure que les matériaux subissent tous les deux le même type de déformation, compression ou détente, et ce qui empêche tout retournement de la maille.

### 3.1 Cas 1D

En une dimension, l'interface entre deux matériaux se résume à un point. On peut remarquer que dans ce cas, la condition de continuité des vitesses et d'égalité des pressions sont équivalentes sous forme faible et sous forme forte.

L'implantation de la méthode a été réalisée dans un code industriel du CEA. Cette implantation, faite pour l'instant en 1D, a permis de mettre au point les détails algorithmiques de la méthode et vérifier la stabilité de la méthode de résolution. Plusieurs tests ont été réalisés et les résultats comparés avec les résultats du schéma de Wilkins purement lagrangien.

Un cas test réalisé consiste à la simulation d'un tube de Sod et l'arrivée du choc sur une interface entre deux matériaux de densités différentes. Ce test permet de tester la stabilité du comportement de l'interface lors du passage d'un choc. La figure 4 présente les résultats de ce cas. Les résultats obtenus sont cohérents avec le schéma de Wilkins classique. Lors de l'arrivée du choc à la frontière entre les deux matériaux, on peut observer la transmission du choc à travers l'interface ainsi que la réflexion d'une partie de celui-ci. Dans les cas où les matériaux sont identiques, on vérifie également que l'interface n'influe pas le comportement.

Le cas présenté figure 5 simule un choc de plaque avec une discontinuité de vitesse initiale entre deux matériaux en contact. Encore une fois, le schéma présente des résultats cohérents avec les méthodes pré-existantes. Dans ces simulations, nous avons un maillage unique de tout le système et l'interface se situe à l'intérieur d'une des mailles de calcul.

Dans le cas général, pour tous les cas testés, le schéma est stable et présente de bon résultat, que la solution soit régulière ou non autour de l'interface et quelles que soient les lois de comportement choisies.

Dans ces simulations, on peut ajouter une vitesse dans la direction tangentielle à l'interface mais il sort des équations qu'elle n'intervient pas dans la dynamique des mailles et est simplement transportée par le maillage dans le cas de glissement pur. Cette vitesse permet toutefois de vérifier les résultats de la phase d'advection et que la projection des champs de vitesse matériau par matériau évite toute diffusion de cette vitesse à travers l'interface.

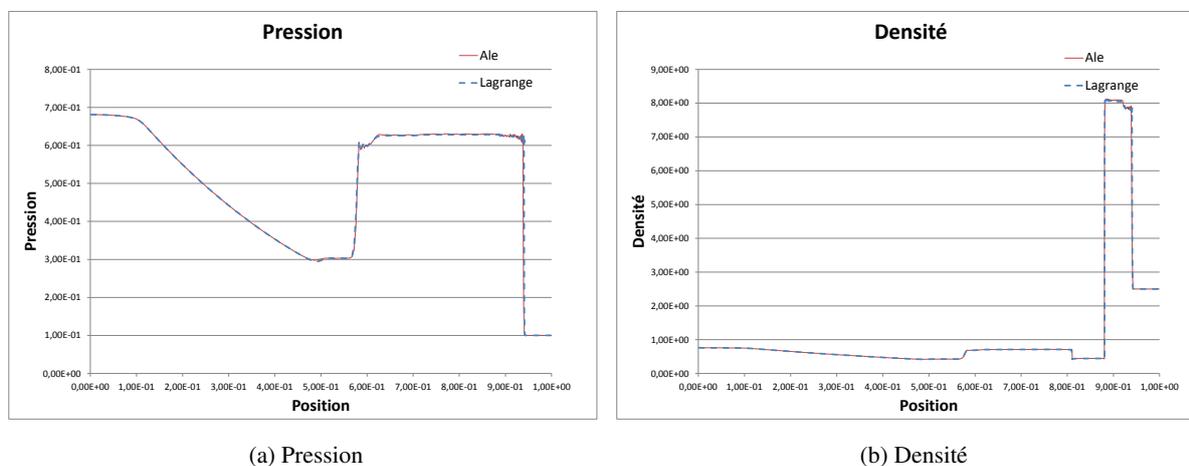
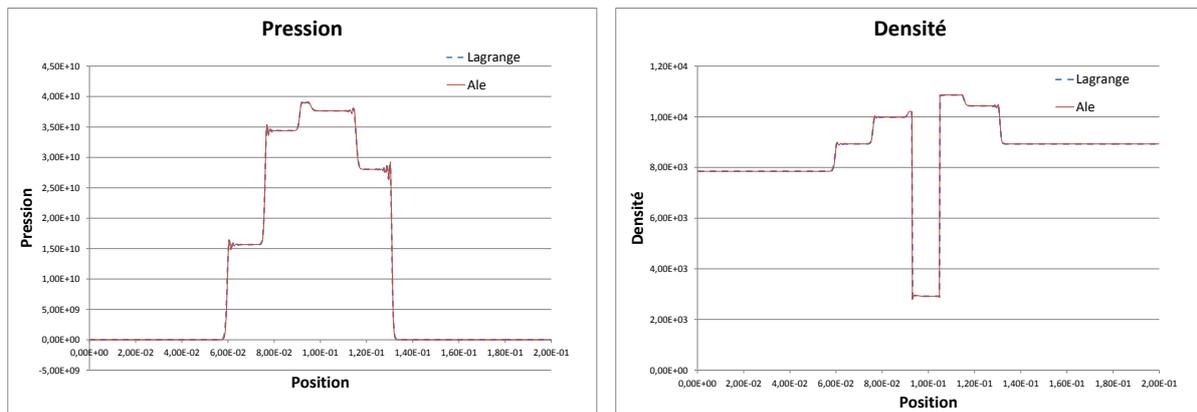


FIGURE 4 – Arrivée d'un choc sur l'interface

### 3.2 Cas 2D

La méthode révèle tout son intérêt avec le passage au 2D où il sera alors possible de faire glisser des matériaux entre eux avec une position arbitraire de leur interface ce qui n'est pas possible avec une méthode lagrangienne et un champ de vitesse unique.

Contrairement au cas 1D, on ne peut plus imposer de manière forte la continuité des vitesses ou l'égalité des pressions et le choix des éléments finis pour la discrétisation des conditions d'équilibre d'interface et de continuité des vitesses normales est moins immédiat. Un choix naturel d'espace conduit en général à des instabilités numériques. Plusieurs techniques peuvent pallier ce problème. Parmi elles,



(a) Pression

(b) Densité

FIGURE 5 – Simulation d'un choc de plaque en 1D

l'ajout de fonctions bulles au champ de vitesse permettent de stabiliser le système en enrichissant les vitesses des mailles mixtes. On peut montrer une similitude entre cette méthode et la stabilisation par la méthode de Nitsche.

Les fonctions bulles sont des fonctions de forme associées à des noeuds supplémentaires aux centres des mailles mixtes. Ces fonctions valent 1 sur le noeud ajouté au centre de la maille et sont nulles sur la frontière de la maille si bien qu'elle n'ont pas d'influence sur les mailles voisines.

L'équation de conservation de quantité de mouvement des noeuds bulles devient, avec l'agrégation de la masse sur les noeuds internes, une condition d'équilibre entre les matériaux et la vitesse des noeuds bulles permettent d'assurer la continuité des vitesses normales que l'on écrit en moyenne sur chaque maille mixte. La discrétisation implicite fait apparaître un couplage entre la vitesse d'un noeud et les contraintes dans les mailles voisines. Le système fait donc intervenir toutes les mailles mixtes et tous les noeuds de l'interface et sa résolution doit se faire maille par maille. Le comportement de l'interface dans son intégralité est calculée avec la résolution du système.

## Conclusion

Une nouvelle méthode, basée sur les éléments finis enrichis, a été proposée. Son écriture ainsi que son intégration dans un schéma de Wilkins ont été réalisées. Elle ne modifie le schéma de Wilkins que dans la zone à proximité de l'interface. La stratégie de résolution du schéma implicite non-linéaire a été développée en 1D ainsi que son implémentation dans un code industriel du CEA. Les résultats ont été comparés avec ceux du schéma de Wilkins classique et sont en adéquation. La généralisation en 2D est en cours. Des modifications seront nécessaires pour assurer la stabilité de l'algorithme comme l'ajout de fonction bulle pour enrichir le champ de vitesse dans les mailles mixtes. L'implantation de la méthode dans un code hydrodynamique industriel du CEA et sa validation devraient suivre.

## Références

- [1] J. Dolbow, I. Harari. *An efficient finite element method for embedded interface problems*, International journal for numerical methods in engineering, 78, 229–252, 2009.
- [2] M. Wilkins. *Calculation of elastoplastic flows*, Methods of computational physics, 3, 211–263, 1964.
- [3] H.M. Mourad, J. Dolbow, I. Harari. *A bubble-stabilized finite element method for Dirichlet constraints on embedded interfaces*, International journal for numerical methods in engineering, 69, 772-793, 2007.