



**HAL**  
open science

# Proper Generalized Decomposition (PGD) et séparation de variables spatiales pour la résolution en thermoélasticité linéaire appliquée à des plaques composites

Brice Bognet, Francisco Chinesta, Adrien Leygue, Arnaud Poitou

## ► To cite this version:

Brice Bognet, Francisco Chinesta, Adrien Leygue, Arnaud Poitou. Proper Generalized Decomposition (PGD) et séparation de variables spatiales pour la résolution en thermoélasticité linéaire appliquée à des plaques composites. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592684

**HAL Id: hal-00592684**

**<https://hal.science/hal-00592684>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Proper Generalized Decomposition (PGD) et séparation de variables spatiales pour la résolution en thermoélasticité linéaire appliquée à des plaques composites

B. Bognet<sup>1</sup>, F. Chinesta<sup>1,2</sup>, A. Leygue<sup>1</sup>, A. Poitou<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GEM, UMR CNRS - Centrale Nantes, France, {brice.bognet, francisco.chinesta, adrien.leygue, arnaud.poitou}@ec-nantes.fr

<sup>2</sup> EADS Corporate Foundation International Chair

**Résumé** — Les matériaux composites sont extrêmement utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie. En effet leur rapport masse/raideur les rendent particulièrement attractifs. Cependant leur caractère composite induit des hétérogénéités à plusieurs échelles. L'enjeu majeur aujourd'hui est de développer des méthodes de calcul permettant de prendre en compte au mieux leur caractère hétérogène tout en conservant des temps de calculs faibles. Nous présentons ici une méthode de réduction de modèle permettant d'effectuer la résolution 3D de problèmes thermoélastiques sur des plaques composites stratifiées, à coût de calcul faible par rapport à un calcul éléments finis 3D équivalent.

**Mots clés** — Réduction de modèle, PGD, plaques.

## 1 INTRODUCTION

On souhaite effectuer des simulations sur des pièces composites stratifiées afin de prévoir les distortions qui surviennent lors du refroidissement de celles-ci, et d'estimer leur état de contrainte interne.

La composition multi-matériaux des stratifiés entraîne une double hétérogénéité structurelle :

- à l'échelle de la structure, celle-ci étant composée d'un empilement de plis dans l'épaisseur
- à l'échelle d'un pli, lui-même constitué d'un renfort (fibres, tissus...) et d'une matrice.

Les plis sont renforcés avec des renforts fortement anisotrope. L'empilement des ces plis suivant différentes orientations induit des variations importantes des champs locaux (contrainte) par rapport à leur moyenne dans l'épaisseur. Il est donc important de pouvoir modéliser la structure à l'échelle la plus fine pour être en mesure de calculer ces champs locaux avec précision.

La modélisation d'une structure complète en tenant compte de la microstructure paraît irréaliste sur des cas réels avec les moyens de calcul actuels, cependant en considérant chaque pli comme un milieu continu homogénéisé, on peut envisager une simulation à l'échelle de la structure. Dans le cas du choix d'une telle représentation, deux approches de modélisation par éléments finis peuvent être formulées :

- l'approche 3D volumique [1] [2], envisageable seulement sur des pièces de dimension très réduite avec peu de plis du fait de son coût de calcul élevé
- l'approche 2D surfacique (ex : Love-Kirchhoff [3]), plus légère à mettre en oeuvre, mais peu efficace pour capturer des effets tridimensionnels tels que des effets de bords par exemple du fait de la nécessité de faire une hypothèse sur le champ de déplacement ou de contrainte dans l'épaisseur.

Dans ce travail, on utilise la méthode PGD pour calculer la solution d'un problème 3D complet, sans introduire aucune hypothèse sur la forme des champs dans l'épaisseur, tout en maintenant le coût de calcul proche de celui d'un calcul 2D. Pour cela, on utilise la capacité de la PGD à calculer des solutions de problèmes multidimensionnels via une séparation des variables [4].

On souhaite simuler le refroidissement de plaques composites stratifiées pour être capable d'anticiper l'état de déformation et de contrainte résiduel après fabrication. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte la physique de la matrice (qu'elle soit thermoplastique ou thermodurcissable). La prise en compte de la physique exacte (retrait chimique, couplage thermo-chimique, cristallisation...) conduit à la résolution de problèmes multiphysiques complexes. Ici on choisit de ne prendre en compte que l'effet du

refroidissement qui est le phénomène prépondérant dans l'apparition des contraintes résiduelles dans les stratifiés [5]. On utilisera donc ici un modèle thermoélastique linéaire.

## 2 RÉOLUTION DE PROBLEME DE THERMOELASTICITE EN VARIABLES D'ESPACE SÉPARÉES AVEC LA PGD

### 2.1 Séparation des variables d'espace

Sur des géométries de type plaques, les ordres de grandeurs des dimensions du "plan" et du "hors plan" sont importants. Il en est de même pour la forme des champs au sein de la pièce. On choisit donc de séparer les variables d'espace en deux sous espaces : un espace 2D représentant la partie du plan, et un espace 1D représentant la partie hors-plan. Ceci conduit à utiliser un maillage 2D et un maillage 1D pour représenter la géométrie (voir figure 1).

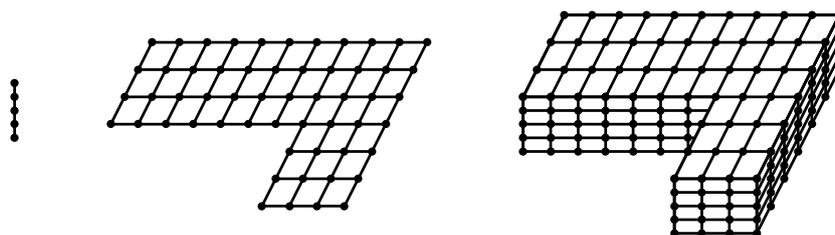


FIGURE 1 – Maillages 1D et 2D pour la résolution, et maillage 3D pour le post-traitement

Par conséquent, on exprime la solution ainsi que toutes les quantités du modèle sous forme séparée. Soit  $f$  une des grandeur du modèle, alors  $f$  est exprimée comme une somme de produits de fonctions de  $x$  et  $y$  par des fonctions de  $z$  :

$$f(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^N f_{xy}^i(x, y) \cdot f_z^i(z), \quad (1)$$

où  $f_{xy}^i(x, y)$  est une fonction du plan et  $f_z^i(z)$  une fonction de l'épaisseur. Les maillages 1D et 2D, sont respectivement les supports des fonctions 1D de l'épaisseur et des fonctions 2D du plan (figure 1).

Cette méthode peut rappeler les méthodes 2D de plaques. En effet on cherche une fonction du plan et une fonction de l'épaisseur dont le produit donne la solution volumique. Cependant de nombreuses différences existent entre ces deux méthodes :

- les fonctions de l'épaisseur ne sont pas définies a priori comme c'est le cas pour les méthodes dites de plaques pour lesquelles on impose une cinématique dans l'épaisseur
- ici, on ne se limite pas à un unique couple de fonctions pour représenter la solution, mais toutes les fonctions nécessaires pour approximer la solution 3D à une précision donnée. Ceci permet une meilleure description de la solution là où elle est purement tridimensionnelle (bords, trous, accidents géométriques, ...).

### 2.2 Application de la méthode à la thermoélasticité linéaire

Lors de la mise en forme de pièces composites, selon le procédé, on obtient d'une manière ou d'une autre une pièce constituée d'un empilement de plis, eux mêmes constitués de renforts (fibres) noyés dans une matrice (résine therm durcissable ou thermoplastique).

Du fait de l'anisotropie des plis et de la non-uniformité du champ de température au cours du refroidissement, des mécanismes de dilatation anisotropes apparaissent dans les plis et créent des contraintes internes.

Le champ de température dans la pièce est défini par l'environnement (chauffage du moule, ...) et l'histoire thermo chimique de la matrice (polymérisation, solidification, cristallisation, ...). Il évolue ensuite en fonction du profil de refroidissement imposé par le procédé jusqu'à la température ambiante.

On considère que l'état de contrainte final dans la pièce est de la forme  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{K} \cdot \underline{\alpha} \cdot \delta T$ , avec  $\underline{\sigma}_0$  les contraintes dépendantes de l'histoire thermo chimique et  $\underline{K} \cdot \underline{\alpha} \cdot \delta T$  les contraintes issues du refroidissement. Dans le cas présent, on choisit de négliger  $\underline{\sigma}_0$  dans la simulation pour simplifier le calcul.

Cette approche simple néglige l'influence de nombreux paramètres, mais elle permet d'obtenir une bonne approximation des contraintes résiduelles et de la distorsion de la pièce une fois sortie du moule.

Ceci conduit à résoudre un problème thermoélastique linéaire : on résout d'abord le problème thermique sur la configuration de référence (équation 2), puis on résout ensuite le problème mécanique en prenant en compte les chargements d'origine thermique (équation 3, équation 4) à partir du champ de température calculé précédemment.

$$\langle \hat{T} \rho c \dot{T} \rangle + \langle \nabla \hat{T} \lambda \nabla T \rangle = \langle \hat{T} h \rangle + \ll \hat{T} q \gg, \quad (2)$$

$$\langle \underline{\varepsilon}(\hat{u}) : \underline{K} : \underline{\varepsilon}(u) \rangle = \langle \hat{u} \cdot \underline{f} \rangle + \ll \hat{u} \cdot \underline{g} \gg, \quad (3)$$

où :

$$\underline{f} = \underline{K} : (\underline{\varepsilon}(u) - \underline{\alpha} \cdot \delta T_{1 \rightarrow 2}). \quad (4)$$

Les problèmes thermiques et mécaniques sont résolus en cherchant les champs solutions, respectivement  $T(x, y, z)$  et  $U(x, y, z)$  sous forme séparée (équation 5, équation 6) :

$$T(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^n T_{xy}^i(x, y) \cdot T_z^i(z), \quad (5)$$

$$\underline{U}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} u_{xy}^i(x, y) \cdot u_z^i(z) \\ v_{xy}^i(x, y) \cdot v_z^i(z) \\ w_{xy}^i(x, y) \cdot w_z^i(z) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Les paramètres matériaux (raideur et coefficients de dilatation thermique) sont aussi exprimés sous forme séparée, sous forme de produits de fonctions du plan et de l'épaisseur. (équation 7).

$$\begin{aligned} \underline{K}(z) &= \sum_{j=1}^n Z^j(z) \cdot \underline{K}^j \\ \underline{\alpha}(z) &= \sum_{j=1}^n Z^j(z) \cdot \underline{\alpha}^j \end{aligned} \quad \text{où} \quad Z^j(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \text{pli } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

Dans le cas de pièces stratifiées, les coefficients matériaux sont constants dans chaque pli, ils ne dépendent donc que de la coordonnée de l'épaisseur  $z$ .

En injectant les formes séparées des champs solutions (équation 5 et équation 6) dans les formulations faibles (équation 2 et équation 3) et en développant les équations, on obtient un problème non-linéaire en  $(x, y)$  et en  $z$  à résoudre. La non-linéarité provient du fait que les problèmes définis sur chaque set de sous espace de coordonnées apparaissent sous forme de produits entre eux.

## 2.3 Résolution avec la PGD

Les termes des équations 5 et 6 définis sur la surface et dans l'épaisseur (modes) sont ajoutés par enrichissement successifs à l'aide d'une méthode de point fixe [6]. L'ajout de modes est stoppé quand la précision souhaitée sur la solution est atteinte.

Grâce à ceci, au lieu de résoudre un problème 3D, on résout seulement un nombre limité de problèmes 1D et 2D. Cette séparation est possible dans le cas de plaques d'épaisseur constante, car le problème 1D dans l'épaisseur doit être représentatif de toute la pièce, et éventuellement pour des plaques d'épaisseur variable moyennant une transformation géométrique préalable.

Cette méthode peut rappeler les méthodes 2D de plaques. En effet on cherche une fonction du plan et une fonction de l'épaisseur dont le produit donne la solution volumique. Cependant de nombreuses différences existent entre ces deux méthodes :

- les fonctions de l'épaisseur ne sont pas définies a priori comme c'est le cas pour les méthodes dites de plaques pour lesquelles on impose une cinématique dans l'épaisseur
- ici, on ne se limite pas à un unique couple de fonctions pour représenter la solution, mais toutes les fonctions nécessaires pour approximer la solution 3D à une précision donnée. Ceci permet une meilleure description de la solution là où elle est purement tridimensionnelle (bords, trous, accidents géométriques, ...).

Considérons la résolution du problème thermique. On cherche la solution de l'équation 2 sous forme séparée comme défini par l'équation 5.

Pour résoudre ce problème :

- on suppose que l'on connaît déjà les  $n$  premiers modes (produits de fonctions), et l'on cherche le mode  $(n + 1)$  [6].

La solution s'écrit alors :  $T(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^n T_{xy}^i(x, y) \cdot T_z^i(z) + R(x, y) \cdot S(z)$ , où  $R(x, y)$  est, après convergence, la fonction  $T_{xy}^{n+1}(x, y)$  cherchée, et  $S(z)$  la fonction  $T_z^{n+1}(z)$

- en injectant ceci dans la forme faible sous forme séparée (équation 2), on obtient un problème non-linéaire en  $R(x, y)$  et  $S(z)$  On choisit de le résoudre par une méthode de point fixe à direction de recherche alternée :
  - on initialise  $R(x, y)$  et on cherche  $S(z)$
  - on fixe  $S(z)$  précédemment calculé et on cherche  $R(x, y)$
  - on continue ainsi jusqu'à atteindre la convergence. Les fonctions  $R(x, y)$  et  $S(z)$  nouvellement trouvées deviennent alors le mode  $(n + 1)$
- l'enrichissement de la solution avec de nouveaux modes continue jusqu'à atteindre la précision souhaitée.

Une fois le problème thermique résolu, on procède de la même manière pour résoudre le problème mécanique.

La technique de séparation des variables d'espace combinée à la résolution par PGD permet d'obtenir la solution tridimensionnelle à faible coût (voir figure 2), sans pour autant sacrifier la précision du calcul. En effet, la solution trouvée par la PGD est très proche de la solution éléments finis 3D (figure 3).

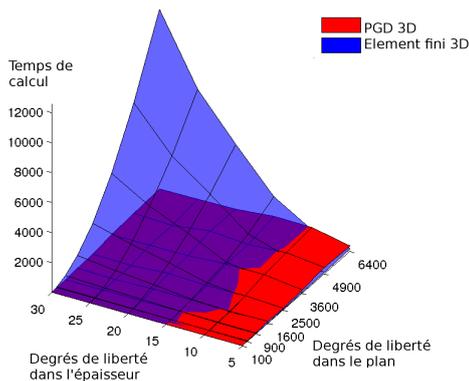


FIGURE 2 – Comparaison des temps de calcul entre la PGD 3D et les éléments finis 3D

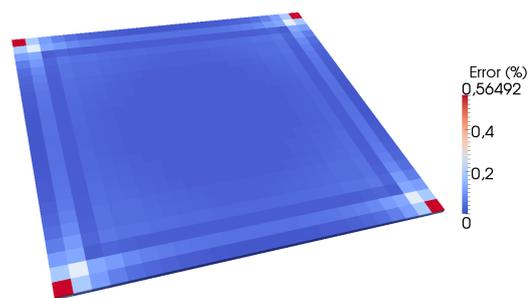


FIGURE 3 – Erreur relative en densité d'énergie de déformation entre un calcul élastique PGD 3D et un calcul éléments finis 3D sur des discrétisations équivalentes

La figure 2 montre très clairement que plus le nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur est important, plus le gain en temps de calcul de la PGD par rapport aux éléments finis 3D classiques est important. La méthode montre bien tout son potentiel dans le cas de pièces composites stratifiées pour lesquelles on souhaite avoir un grand nombre de degrés de liberté dans l'épaisseur pour décrire correctement les champs à l'échelle du pli.

### 3 MODELISATION AVANCEE DE PIECES STRATIFIEES

#### 3.1 Cas de plaques stratifiées avec paramétrage des orientations des plis

La PGD permet de traiter des problèmes en dimensionnalité élevée grâce à la séparation des variables. En particulier, elle autorise la résolution de problèmes paramétrés. La figure 4 présente une plaque stratifiée, dont certains plis sont paramétrés angulairement. La solution est alors cherchée comme une somme de produits de fonctions du plan, de l'épaisseur, et des paramètres angulaires définissant l'orientation des plis (équation 8). Il s'agit d'un problème à résoudre dans un espace de dimension 5. La PGD permet de le résoudre à faible coût. L'utilisation de méthodes classiques pour résoudre ce type de problème est proscrite du fait de son coût de calcul élevé.

$$\underline{U}(x, y, z, \theta_1, \theta_4) \approx \sum_{i=1}^N F_i(x, y) Z_i(z) \Theta_{1i}(\theta_1) \Theta_{4i}(\theta_4) \quad (8)$$

Les paramètres matériaux précédemment exprimés dans l'équation 7 sont alors exprimés en fonction de  $z$ , et de  $\theta_1$  et  $\theta_4$  :

$$\begin{aligned} \underline{K}(z, \theta_1, \theta_4) &= \sum_{j=1}^n Z^j(z) \cdot \underline{K}^j(\theta_j) \\ \underline{\alpha}(z, \theta_1, \theta_4) &= \sum_{j=1}^n Z^j(z) \cdot \underline{\alpha}^j(\theta_j) \end{aligned} \quad \text{où } Z^j(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \text{pli } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

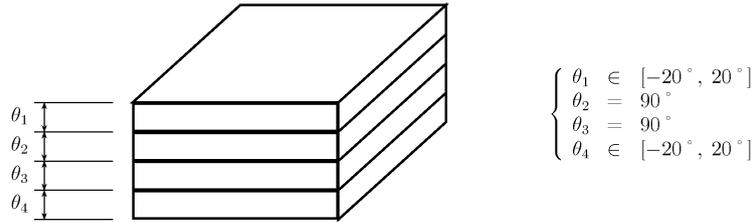


FIGURE 4 – Exemple de cas traité : plaque stratifiée paramétrée

On traite ici un problème de refroidissement uniforme de plaque (de 180°C à 20°C) représentatif du refroidissement de la pièce en fin de fabrication.

On utilise le même schéma de résolution que précédemment, avec cette fois quatre fonctions à trouver pour chaque mode : une fonction 2D (coordonnées du plan) et trois fonctions 1D (coordonnée de l'épaisseur et coordonnées de paramétrage angulaire). On obtient une solution dans un espace de dimension 5, il ne reste qu'à particulariser la solution en fixant les angles  $\theta_1$  et  $\theta_4$  aux valeurs voulues et on obtient alors par post-processing la solution 3D du problème associé (voir figure 5).

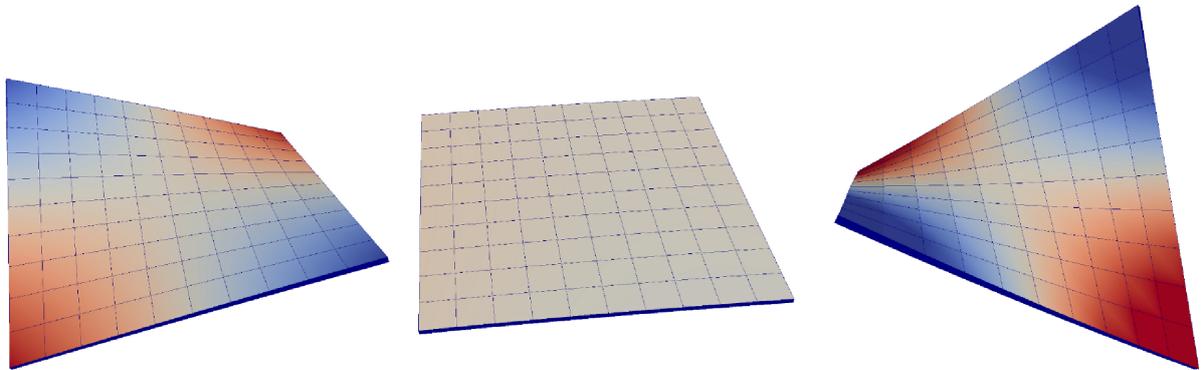


FIGURE 5 – Déformée de la pièce en fonction de l'empilement. De gauche à droite : [0,90,90,20], [0,90,90,0], [10,90,90,-20]

L'avantage de disposer de la solution globale sur l'ensemble de l'espace de paramètres, est que l'on peut par exemple regarder le déplacement d'un point de la pièce, en fonction des paramètres angulaires voir figure 6.

Cette méthode permet aussi d'obtenir l'enveloppe de déformée résiduelle d'une pièce, pour n'importe quel défaut d'orientation des plis de  $\pm\theta$ , ou encore d'optimiser un drapage pour minimiser la déformation résiduelle de la pièce. Ce type de calcul est extrêmement coûteux avec les méthodes traditionnelle, car il faut résoudre indépendamment tous les cas de figures possible, alors qu'avec un modèle paramétré comme présenté ici, le coût est extrêmement raisonnable.

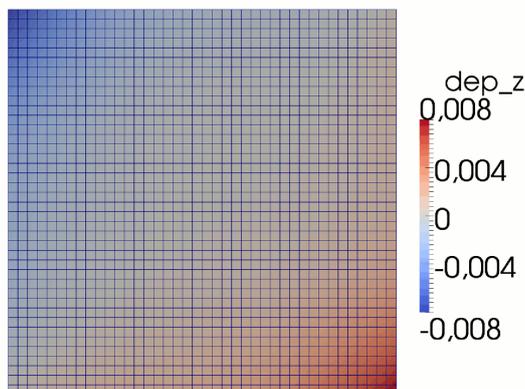


FIGURE 6 – Déplacement d’un coin de la pièce dans le plan des coordonnées  $(\theta_1, \theta_4)$

### 3.2 Coques

La séparation des variables d’espace permet de traiter des géométries planes, en effet, le volume de la pièce est décomposé en une partie du plan exprimée avec seulement deux coordonnées, et une partie hors plan exprimée avec la troisième coordonnée de l’espace. On souhaite généraliser cette méthode à des géométries non planes. En effet, même si un grand nombre de pièces composites ont des parties planes, une grande partie d’entre elles ont des parties courbes (cornières, carters, fuselages...).

Il n’est pas possible d’effectuer une séparation directe des variables d’espace sur de telles géométries. En effet, la normale à la surface moyenne de la pièce est locale dans le cas d’une pièce avec courbure. Le problème 1D ne peut alors plus être représentatif de l’épaisseur dans l’intégralité de la pièce. De plus le problème 2D sur les variables spatiales de la surface moyenne est défini avec seulement deux coordonnées, il est donc impossible d’avoir un maillage qui sort du plan. La solution pour traiter ce type de problème est de définir un domaine de type “plaque plane” représentatif du domaine réel et d’effectuer la résolution dans cette configuration. La solution est ensuite reconstruite en appliquant la transformation menant du domaine parent utilisé pour le calcul à l’espace réel (voir figure 7).

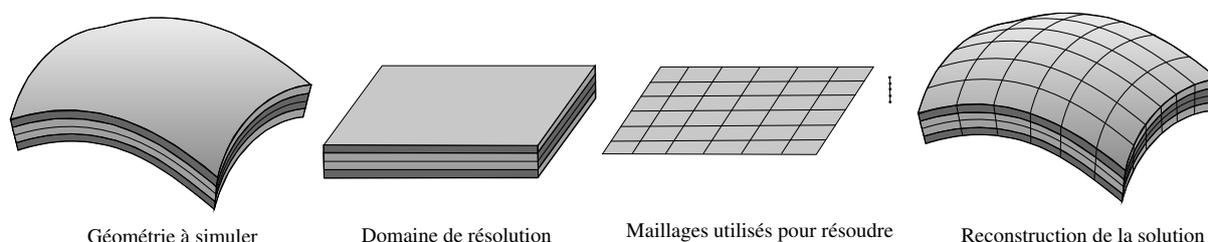


FIGURE 7 – Stratégie pour la simulation d’un problème sur une coque non plane

Grâce à cette méthode, on peut effectuer des simulations 3D sur des géométries complexes, avec un coût de calcul comparable au coût d’un calcul 2D.

## 4 POST-TRAITEMENT DES RESULTATS

Le post-traitement des résultats comme le calcul des déformations et des contraintes peut être réalisé sur la forme séparée des déplacements. On possède donc, même pour des problèmes en dimensionnalité élevée, les formes séparées des champs de déformation et de contrainte. Le cas présenté en 3.1 est en dimension 5.

Le champ de déplacement est de la forme présentée par l’équation 6. L’expression de la déformation s’écrit en fonction des composantes du champ de déplacement exprimé sous forme séparée. Les dérivées n’interviennent que dans les fonctions de l’espace, de plus, les opérateurs permettant de les calculer sont déjà construits pour la résolution du problème. On a donc :

$$\underline{\varepsilon}(U) = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} F_i^x(x,y)_{,x} & Z_i^x(z) & \Theta_{1i}^x(\theta_1)\Theta_{4i}^x(\theta_4) \\ F_i^y(x,y)_{,y} & Z_i^y(z) & \Theta_{1i}^y(\theta_1)\Theta_{4i}^y(\theta_4) \\ F_i^z(x,y) & Z_i^z(z)_{,z} & \Theta_{1i}^z(\theta_1)\Theta_{4i}^z(\theta_4) \\ F_i^x(x,y)_{,y} & Z_i^x(z) & \Theta_{1i}^x(\theta_1)\Theta_{4i}^x(\theta_4) + F_i^y(x,y)_{,x} & Z_i^y(z) & \Theta_{1i}^y(\theta_1)\Theta_{4i}^y(\theta_4) \\ F_i^x(x,y) & Z_i^x(z)_{,z} & \Theta_{1i}^x(\theta_1)\Theta_{4i}^x(\theta_4) + F_i^z(x,y)_{,x} & Z_i^z(z) & \Theta_{1i}^z(\theta_1)\Theta_{4i}^z(\theta_4) \\ F_i^y(x,y) & Z_i^y(z)_{,z} & \Theta_{1i}^y(\theta_1)\Theta_{4i}^y(\theta_4) + F_i^z(x,y)_{,y} & Z_i^z(z) & \Theta_{1i}^z(\theta_1)\Theta_{4i}^z(\theta_4) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Notons que l'expression de la déformation contient deux fois plus de modes que le déplacement, car les termes des cisaillements ont deux composantes.

De même, on peut calculer l'expression de la contrainte sous forme séparée, en utilisant la déformation (équation 10) et les coefficients matériaux (équation 9).

On obtient alors les contraintes internes issues du refroidissement de la pièce stratifiée, sans avoir à refaire le post-traitement pour chaque cas.

La reconstruction de la solution est extrêmement légère, en effet, on peut même l'effectuer à la volée sur des plateformes de type *smartphone*. La figure 8 présente la reconstruction du problème présenté figure 4.

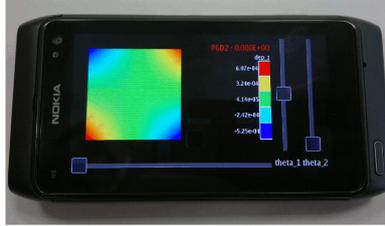


FIGURE 8 – Exemple de reconstruction à la volée d'une solution paramétrée pré-calculée avec la PGD : ici le déplacement hors-plan d'une plaque après refroidissement en fonction de l'orientation des plis

De plus, ces champs issus du post-traitement peuvent être utilisés pour exprimer des quantités d'intérêt sous forme séparée en vue d'une optimisation. Cette optimisation se fera uniquement en évaluant la quantité d'intérêt, à chaque pas d'optimisation, au lieu de refaire le calcul à chaque pas comme c'est le cas pour les méthodes classiques.

## 5 CONCLUSION

La PGD ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine de la simulation numérique. Les calculs 3D de plaques composites stratifiés peuvent être effectués avec un coût proche d'un calcul 2D moyennant une résolution en variables d'espace séparées. Cette approche permet donc la simulation de problèmes 3D de grande taille, jusqu'alors insolubles du fait de leur coût de calcul prohibitif. L'ajout de coordonnées supplémentaires comme par exemple des paramètres angulaires d'orientation de plis permet en plus d'obtenir une solution paramétrique couvrant un large domaine, à très faible coût. Ce type de calcul est d'autant plus intéressant que le coût pour résoudre ce problème paramétrique est très inférieur au coût de résolution d'un problème non paramétrique répété autant de fois qu'il y a de combinaisons possibles de paramètres.

## Références

- [1] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The finite element method its basis & fundamentals*. Elsevier, 6th edition edition, 2005.
- [2] J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*. CRC PRESS, second edition edition, 2004.
- [3] S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, second edition edition, 1959.

- [4] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, and R. Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal Of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176, 2006.
- [5] H. T. Hahn. Residual stresses in polymer matrix composite laminates. *Journal of composite Material*, pages 266–278, October 1976.
- [6] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2010.