

## Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains

E. Safatly<sup>1</sup>, M. Chevreuil<sup>1</sup>, A. Nouy<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, UMR CNRS 6183, Centrale Nantes, Université de Nantes, France,  
elias.safatly@ec-nantes.fr, mathilde.chevreuil@univ-nantes.fr, anthony.nouy@ec-nantes.fr

La quantification des incertitudes apparaît aujourd'hui comme un enjeu majeur dans la simulation numérique des modèles physiques. Récemment, une attention croissante a été portée à une vision fonctionnelle des incertitudes, qui consiste à représenter les grandeurs incertaines (aléatoires) comme des fonctions de paramètres caractérisant les incertitudes d'entrée du modèle. Cette vision fonctionnelle, combinée à la théorie de l'approximation et à l'analyse numérique, a conduit au développement de méthodes numériques appelées méthodes spectrales stochastiques, qui permettent la propagation des incertitudes à travers le modèle et fournissent une représentation explicite de la solution en fonction des paramètres d'entrée [1, 2, 3, 4]. Ces méthodes, initialement développées pour l'analyse probabiliste, autorisent également des analyses paramétriques *a posteriori* et peuvent donc être exploitées dans une démarche d'optimisation ou d'analyse inverse.

Nous nous intéressons ici à la prise en compte d'incertitudes géométriques et présentons une méthode efficace pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles (EDP) définies sur un domaine incertain  $\Omega(\xi)$ , où  $\xi \in \Xi$  sont les paramètres, éventuellement aléatoires. Différentes méthodes spectrales stochastiques ont été récemment introduites. Elles sont basées sur des méthodes de mapping [2] ou des méthodes de domaine fictif [5, 6]. La méthode proposée ici combine une méthode de domaine fictif, permettant une reformulation du problème sur un espace produit tensoriel, et la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) pour la construction *a priori* d'une représentation séparée de la solution. La méthode PGD, introduite pour l'approximation de problèmes définis sur des espaces produit tensoriel [7, 8, 9, 10], peut être vue comme une généralisation d'une décomposition en valeurs singulières (ou Proper Orthogonal Decomposition, Karhunen-Loeve Decomposition, selon les contextes) pour la construction *a priori* d'une approximation produit tensoriel de la solution. Dans le contexte de la propagation des incertitudes, cette méthode a initialement été introduite comme une généralisation des décompositions spectrales [11] pour la construction de représentations séparées de la solution d'EDP stochastiques.

On considère ici comme problème modèle une équation de diffusion  $-\Delta u = f$  définie sur  $\Omega(\xi)$ . Une méthode de domaine fictif permet une reformulation du problème sur un domaine fixe  $\Omega^\square$ , qui introduit un prolongement  $\tilde{u}$  de la solution. On obtient alors une formulation faible du problème paramétrique (stochastique) dans un espace produit tensoriel  $\mathcal{V}^\square \otimes \mathcal{S}$  :

$$\tilde{u} \in \mathcal{V}^\square \otimes \mathcal{S}, \quad A(\tilde{u}, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\square \otimes \mathcal{S}, \quad (1)$$

avec  $\mathcal{V}^\square \subset \{w : \Omega^\square \rightarrow \mathbb{R}\}$  (ensemble de fonctions spatiales) et  $\mathcal{S} \subset \{\lambda : \Xi \rightarrow \mathbb{R}\}$  (ensemble de fonctions paramétriques), et où les formes variationnelles  $A$  et  $L$  font intervenir la fonction indicatrice du domaine paramétré. La solution est alors recherchée sous la forme d'une représentation séparée de rang  $m$  :

$$\tilde{u}(x, \xi) \approx \sum_{i=1}^m (w_i \otimes \lambda_i)(x, \xi) = \sum_{i=1}^m w_i(x) \lambda_i(\xi) \quad (2)$$

avec  $w_i \in \mathcal{V}^\square$  et  $\lambda_i \in \mathcal{S}$ . Plusieurs définitions de PGD ont été proposées pour la construction de la décomposition (2). Ici, on utilise une définition progressive qui consiste à construire progressivement les couples de fonctions  $(w_i, \lambda_i) \in \mathcal{V}^\square \times \mathcal{S}$ , solutions de problèmes d'optimisation sur  $\mathcal{V}^\square \times \mathcal{S}$  résolus par un algorithme de minimisation alternée. Cette construction demande uniquement la résolution de

sous-problèmes indépendants définis sur  $\mathcal{S}$  (équations algébriques paramétriques) ou sur  $\mathcal{V}^\square$  (EDP non paramétriques). Afin d'obtenir une méthode dont les performances dépassent celles des techniques classiques, les formes variationnelles dans (1) doivent être correctement approchées par des représentations séparées de rang faible. Pour cela, on introduit une approximation produit tensoriel de la fonction indicatrice de  $\Omega(\xi)$ . Une régularisation des fonctions indicatrices est introduite afin d'améliorer le taux de convergence de ces approximations. De plus, une méthode est proposée pour la construction d'une approximation produit tensoriel sous contraintes qui préserve la positivité et assure donc le caractère bien posé des problèmes associés aux fonctions indicatrices approchées.

## Références

- [1] A. Nouy. Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3) :251–285, 2009.
- [2] D. Xiu. Fast numerical methods for stochastic computations : a review. *Comm. Comput. Phys.*, 5 :242–272, 2009.
- [3] H. G. Matthies. Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations. *Zamm-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 88(11) :849–873, 2008.
- [4] O. P. Le Maître and O. M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Scientific Computation. 2010.
- [5] C. Canuto and T. Kozubek. A fictitious domain approach to the numerical solution of pdes in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, 107(2) :257–293, 2007.
- [6] A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs, and N. Moës. An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4663–4682, 2008.
- [7] P. Ladevèze, J.C. Passieux, and D. Néron. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22) :1287–1296, 2010.
- [8] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1603–1626, 2010.
- [9] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, In press, 2010.
- [10] A. Falco and A. Nouy. A Proper Generalized Decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart-Young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, In press.
- [11] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537, 2007.