Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains

Elias Safatly, Mathilde Chevreuil, Anthony Nouy

▶ **To cite this version:**

Elias Safatly, Mathilde Chevreuil, Anthony Nouy. Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00592678

HAL Id: hal-00592678
https://hal.science/hal-00592678

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains

E. Safatly, M. Chevreuil, A. Nouy

LUNAM Université, GeM, UMR CNRS 6183, Centrale Nantes, Université de Nantes, France,
elias.safatly@ec-nantes.fr, mathilde.chevreuil@univ-nantes.fr, anthony.nouy@ec-nantes.fr

Résumé — Nous nous intéressons à la prise en compte d'incertitudes géométriques et présentons une méthode efficace pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles (EDP) définies sur un domaine incertain. La méthode proposée ici combine une méthode de domaine fictif, permettant une reformulation du problème sur un espace produit tensoriel, et une méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) pour la construction *a priori* d'une représentation séparée de la solution.
Mots clés — PGD, Domaine aléatoire, Domaine fictif, Représentations séparées.

Introduction

La quantification des incertitudes apparaît aujourd'hui comme un enjeu majeur dans la simulation numérique des modèles physiques. Récemment, une attention croissante a été portée à une vision fonctionnelle des incertitudes, qui consiste à représenter les grandeurs incertaines (aléatoires) comme des fonctions de paramètres caractérisant les incertitudes d'entrée du modèle. Cette vision fonctionnelle, combinée à la théorie de l'approximation et à l'analyse numérique, a conduit au développement de méthodes numériques appelées méthodes spectrales stochastiques, qui permettent la propagation des incertitudes à travers le modèle et fournissent une représentation explicite de la solution en fonction des paramètres d'entrée [1, 2, 3, 4]. Ces méthodes, initialement développées pour l'analyse probabiliste, autorisent également des analyses paramétriques *a posteriori* et peuvent donc être exploitées dans une démarche d'optimisation ou d'analyse inverse.

Nous nous intéressons ici à la prise en compte d'incertitudes géométriques et présentons une méthode efficace pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles (EDP) définies sur un domaine incertain $\Omega(\xi)$, où $\xi \in \Xi$ sont les paramètres, éventuellement aléatoires. Différentes méthodes spectrales stochastiques ont été récemment introduites. Elles sont basées sur des méthodes de mapping [2] ou des méthodes de domaine fictif [5, 6]. La méthode proposée ici combine une méthode de domaine fictif, permettant une reformulation du problème sur un espace produit tensoriel, et la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) pour la construction *a priori* d'une représentation séparée de la solution. La méthode PGD, introduite pour l'approximation de problèmes définis sur des espaces produit tensoriel [7, 9, 10, 11], peut être vue comme une généralisation d'une décomposition en valeurs singulières (ou Proper Orthogonal Decomposition, Karhunen-Loève Decomposition, selon les contextes) pour la construction *a priori* d'une approximation produit tensoriel de la solution. Dans le contexte de la propagation des incertitudes, cette méthode a initialement été introduite comme une généralisation des décompositions spectrales [12] pour la construction de représentations séparées de la solution d'EDP stochastiques.

Les méthodes de résolution basées sur les représentations séparées exploitent le caractère séparé des différents termes intervenant dans les équations du modèle (opérateurs, termes sources, conditions aux limites...). Dans le cadre des présentes reformulations sur domaine fictif, une approximation produit tensoriel de la fonction indicatrice est introduite. Une méthode est proposée pour la construction sous contraintes de cette approximation qui préserve la positivité et assure donc le caractère bien posé des problèmes associés aux fonctions indicatrices approchées.

Dans la section 1 le problème modèle sur domaine fictif est présenté en envisageant séparément les cas des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann sur des frontières aléatoires. La section 2

introduit la méthode PGD et la représentation séparée des opérateurs garantissant un problème bien posé. La méthode est illustrée dans les sections 3 et 4 sur deux exemples. Le premier exemple est un problème avec frontière de Neumann aléatoire. Le deuxième exemple est un problème avec condition de Dirichlet sur une frontière rugueuse dont la rugosité est modélisée par un champ stochastique, ce qui conduit à un problème en grande dimension paramétrique.

1 Problème modèle et reformulation sur domaine fictif

1.1 Equations aux dérivées partielles définies sur des domaines incertains

Soit $(\Xi, \mathcal{B}, P_\xi)$ un espace probabilisé de dimension finie représentant l'incertitude sur la géométrie où $\Xi \subset \mathbb{R}^r$ est l'ensemble des événements élémentaires. P_ξ représente la mesure de probabilité d'un ensemble fini des variables aléatoires caractérisant un domaine aléatoire $\Omega(\xi) \subset \mathbb{R}^d$. On considère une équation de diffusion définie sur $\Omega(\xi)$:

$$\begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega(\xi) \\ \nabla u \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N(\xi) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D(\xi) \end{array} \tag{1}$$

où Γ_D et Γ_N sont les frontières homogènes de Dirichlet et de Neumann respectivement, avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ et $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$. On introduit maintenant l'espace des fonctions $\mathcal{W} = \{v : y \in \Xi \mapsto v(y) \in \mathcal{V}(y)\ ;\ \int_\Xi \|v(y)\|^2_{\mathcal{V}(y)} dP_\xi(y) < \infty\} := L^2_{P_\xi}(\Xi; \mathcal{V})$, où $\mathcal{V}(\xi) = \{v \in H^1(\Omega(\xi))\ ;\ v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_D(\xi)\}$ avec $\|v(y)\|^2_{\mathcal{V}(y)} = \int_{\Omega(y)} \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx$. La formulation faible de (1) s'écrit :

$$u \in \mathcal{W}, \quad A(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{W} \tag{P}$$

avec

$$A(u,v) = \int_\Xi \int_{\Omega(y)} \nabla u \cdot \nabla v dx dP_\xi(y), \quad \text{et} \quad L(v) = \int_\Xi \int_{\Omega(y)} f v dx dP_\xi(y) \tag{2}$$

1.2 Formulation sur un domaine fictif

On introduit un domaine fictif déterministe $\Omega^\square$ contenant toutes les réalisations de $\Omega(\xi)$. La frontière du domaine fictif $\partial\Omega^\square$ est décomposée en deux ensembles déterministes disjoints $\Gamma_N^\square$ et $\Gamma_D^\square$ (voir la figure 1) correspondant respectivement à des conditions de Neumann et de Dirichlet.

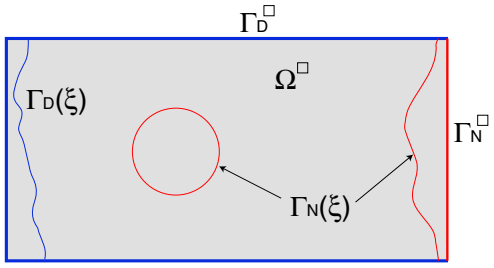


FIGURE 1 – Domaine fictif

1.2.1 Conditions de Neumann sur frontière aléatoire

On considère dans un premier temps le cas où seule la frontière de Neumann $\Gamma_N(\xi)$ est aléatoire, la frontière de Dirichlet étant déterministe ($\Gamma_D \subset \Gamma_D^\square$). On introduit une fonction $I^\eta : \Omega^\square \times \Xi \to \mathbb{R}$, avec $0 \leq \eta \leq 1$, définie par

$$I^\eta(x,y) = I + \eta(1-I) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega(\xi) \\ \eta & \text{si } x \notin \Omega(\xi) \end{cases} \tag{3}$$

où $I(x,y) = H(-\phi(x,y))$ et H est la fonction heaviside définie par $H(a) = 1$ si $a > 0$ et $H(a) = 0$ si $a \leq 0$. $\phi(x,\xi)$ est la fonction level-set aléatoire dont l'iso-zero dans $\Omega^{\square}$ caractérise la frontière aléatoire $\Gamma_N(\xi)$.

Nous introduisons alors un espace de fonctions spatiales $\mathcal{V}^{\square} = \{v \in H^1(\Omega^{\square}); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D^{\square}\}$ et l'espace de fonctions $\mathcal{W}^{\square} = L^2_{P_\xi}(\Xi; \mathcal{V}^{\square})$ qui peut alors être identifié à l'espace produit tensoriel $\mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} := L^2_{P_\xi}(\Xi)$. La formulation faible du problème sur domaine fictif s'écrit alors :

$$\tilde{u} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}, \quad A_\eta(\tilde{u}, \tilde{v}) = L_\eta(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S} \tag{$\tilde{\mathrm{P}}_\eta$}$$

où A_η et L_η sont des formes bilinéaires et linéaires continues sur $\mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}$, définies par

$$A_\eta(u,v) = \int_\Xi a_\eta(u,v;y)\, dP_\xi(y) = \int_\Xi \int_{\Omega^{\square}} I^\eta(x,y)\, \nabla v \cdot \nabla u\, dx\, dP_\xi(y) \tag{4}$$

$$L_\eta(v) = \int_\Xi \ell_\eta(v;y)\, dP_\xi(y) = \int_\Xi \int_{\Omega^{\square}} I(x,y)\, v\, f(x,y)\, dx\, dP_\xi(y) \tag{5}$$

Pour $\eta > 0$, A_η est une forme bilinéaire continue symétrique et coercive sur $\mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}$. Donc, il existe une solution unique du problème ($\tilde{\mathrm{P}}_\eta$) caractérisée par $\tilde{u} = \arg\min_{v \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}} \frac{1}{2} A_\eta(v,v) - L_\eta(v)$. Notons qu'avec une bonne sélection du paramètre η, $\tilde{u}$ peut être choisi arbitrairement proche de u.

1.2.2 Conditions de Dirichlet sur une frontière aléatoire

On s'intéresse maintenant au cas d'une frontière de Dirichlet aléatoire $\Gamma_D(\xi)$. Pour imposer les conditions de Dirichlet sur $\Gamma_D(\xi)$ on introduit une fonction caractéristique $\psi(x,\xi)$ ayant les propriétés suivantes (voir [14]) :

$$\psi > 0 \quad sur \quad \Omega(\xi) \tag{6}$$

$$\psi = 0 \quad sur \quad \Gamma_D(\xi) \tag{7}$$

$$|\nabla \psi| > 0 \quad sur \quad \Gamma_D(\xi) \tag{8}$$

On introduit ensuite l'espace de fonctions $\mathcal{W}^{\Psi} = \{v = \psi\tilde{v}\,;\ \tilde{v} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}\}$. La condition de Dirichlet sur la frontière aléatoire est alors portée par la fonction caractéristique ψ. On introduit alors la formulation faible suivante :

$$\tilde{u} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}, \quad A_\psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = L_\psi(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S} \tag{$\tilde{\mathrm{P}}_\psi$}$$

avec :

$$A_\psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_\Xi \int_{\Omega^{\square}} \nabla(\psi\tilde{u}) \cdot \nabla(\psi\tilde{v})\, dx\, dP_\xi(y) = \int_\Xi \int_{\Omega^{\square}} (\psi\nabla\tilde{u} + \tilde{u}\nabla\psi) \cdot (\psi\nabla\tilde{v} + \tilde{v}\nabla\psi)\, dx\, dP_\xi(y) \tag{9}$$

$$L_\psi(\tilde{v}) = \int_\Xi \int_{\Omega^{\square}} f\, \psi\tilde{v}\, dx\, dP_\xi(y) \tag{10}$$

La solution du problème initial est alors $u = \psi\tilde{u}$. Dans la suite nous choisissons $\psi(x,\xi) = -\phi(x,\xi)$ avec $\phi(x,\xi)$ la level-set dont l'iso-zéro dans $\Omega^{\square}$ caractérise la frontière aléatoire $\Gamma_D(\xi)$.

2 Proper Generalized Decomposition

2.1 Principe de la méthode Proper Generalized Decomposition

On considère la solution des problèmes ($\tilde{\mathrm{P}}_\eta$) ou ($\tilde{\mathrm{P}}_\psi$) avec la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) dont l'idée est de chercher une approximation de la solution $\tilde{u} \in \mathcal{V}^{\square} \otimes \mathcal{S}$ sous la forme

$$\tilde{u}(x,\xi) \approx u_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x)\lambda_i(\xi), \quad w_i \in \mathcal{V}^{\square}, \quad \lambda_i \in \mathcal{S} \tag{11}$$

où u_m est une représentation séparée de rang m de $\tilde{u}$. En introduisant $\mathcal{V}_N^{\square} \subset \mathcal{V}^{\square}$ et $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ des espaces d'approximations déterministe et stochastique de dimension N et P respectivement, on cherchera

à construire une approximation telle que $m \ll N$ et $m \ll P$. La méthode peut être interprétée comme une construction simultanée de bases réduites de fonctions déterministes $\{w_i\}_{i=1}^m$ et de fonctions stochastiques $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ optimales pour la représentation de la solution $\tilde{u}$. Une extension naturelle au cas multi-dimensionnel est présentée dans [9] où on cherche une approximation de $\tilde{u}$ sous la forme séparée $u_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^m w_i(x)\lambda_i^1(\xi_1)...\lambda_i^d(\xi_d)$.

Dans [12, 1, 9], différentes définitions et plusieurs algorithmes sont proposés pour la construction de représentation quasi-optimale de la solution sur les bases réduites. Ici nous considérons une définition particulière de la PGD, appelée PGD progressive, qui consiste à construire la décomposition de la manière suivante. Connaissant une approximation u_{m-1}, on recherche un nouvel élément optimal de rang 1 $w_m\lambda_m$ tel que

$$(w_m,\lambda_m) \in \arg\min_{w\in\mathcal{V}^\square,\lambda\in\mathcal{S}} \frac{1}{2}\tilde{A}(w\lambda,w\lambda) - \tilde{L}(w\lambda) + \tilde{A}(u_{m-1},w\lambda) \tag{12}$$

où $\tilde{A}(\cdot,\cdot)$ et $\tilde{L}(\cdot)$ sont les formes bilinéaire et linéaire définies par les équations (4) et (5) pour le problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$, ou par les équations (9) et (10) pour le problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\psi)$. La définition ci-dessus est équivalent à

$$(w_m,\lambda_m) \in \arg\min_{w\in\mathcal{V}^\square,\lambda\in\mathcal{S}} \|\tilde{u} - u_{m-1} - w\lambda\|_{\tilde{A}}^2 \tag{13}$$

où $\tilde{u}$ est la solution de $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$ ou $(\tilde{\mathrm{P}}_\psi)$ selon le problème considéré, et $\|\cdot\|_{\tilde{A}}$ est la norme sur $\mathcal{V}^\square\otimes\mathcal{S}$ induite par $\tilde{A}$, définie par $\|v\|_{\tilde{A}}^2 = \tilde{A}(v,v)$. Un nouveau couple de fonctions $(w_m,\lambda_m) \in \mathcal{V}^\square\times\mathcal{S}$ est alors défini comme un couple qui minimise la distance entre u_m et $\tilde{u}$ selon la norme induite par $\tilde{A}$. On utilisera ici un algorithme de minimisation alterné pour résoudre (12).

2.2 Representation séparée des opérateurs et termes sources

Les méthodes basées sur les représentations séparées, comme la méthode PGD, tirent partie de la représentation séparée des opérateurs et termes sources des équations du modèle. Les formes bilinéaire $\tilde{A}$ et linéaire $\tilde{L}$ doivent donc admettre une représentation séparée.

Problème de Dirichlet : représentation séparée de la fonction caractéristique. Le problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\psi)$ avec une frontière de Dirichlet aléatoire nécessite une représentation séparée de la fonction caractéristique ψ. Si cette dernière n'est pas explicitement sous une forme séparée, on procède en pré-traitement à une approximation séparée de cette fonction (par une décomposition en valeurs singulières, éventuellement multidimensionnelle si on introduit une séparation paramétrique).

Problème de Neumann : représentation séparée sous contrainte de la fonction indicatrice. Le problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$ avec une frontière de Neumann aléatoire nécessite une représentation séparée de la fonction indicatrice I afin d'obtenir une représentation séparée des formes A_η et L_η. Soit I_s une représentation séparée de rang s de I

$$I(x,\xi) \approx I_s(x,\xi) = \sum_{i=1}^s g_i(x)\chi_i(\xi) \tag{14}$$

et le problème associé

$$\tilde{u}^s \in \mathcal{V}^\square\otimes\mathcal{S}, \quad A_\eta^s(\tilde{u}^s,v) = L_\eta^s(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}^\square\otimes\mathcal{S} \tag{$\tilde{\mathrm{P}}_\eta^s$}$$

où A_η^s et L_η^s sont les approximations de A_η and L_η obtenues en remplaçant I par I_s. Deux points importants sont à considérer pour construire la représentation séparée (14) : le problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta^s)$ doit être bien posé et $\tilde{u}^s$ doit être une "bonne approximation" de la solution $\tilde{u}$ du problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$. Il doit pour cela exister un entier S et des constantes α et β tels que $\forall s \geq S$, on ait presque partout et presque sûrement $\frac{-\eta}{1-\eta} < \alpha \leq I_s(x,\xi) \leq \beta$. Sous ces conditions, d'une part $\tilde{A}_s$ est continue et coercive et $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta^s)$ est donc bien posé, et d'autre part la solution $\tilde{u}^s$ converge fortement en fonction de s vers la solution $\tilde{u}$ du problème $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$.

Afin de garantir les bonnes propriétés ci-dessus, on introduit une nouvelle définition de représentation séparée I_s de I qui préserve au mieux la contrainte $\alpha \leq I_s \leq \beta$ (voir [13]). Partant de $I_0 = 0$, on définit pour $s \geq 1$,

$$(g_s, \chi_s) \in \arg \min_{\substack{g \in L^2(\Omega^\square) \\ \chi \in L^2_{P_\xi}(\Xi)}} \frac{1}{2}\|I - I_{s-1} - g\chi\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(I_{s-1} + g\chi) \tag{15}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme définie par $\|I\|^2 = \int_\Xi \int_{\Omega^\square} I^2 dx dP_\xi$ et F est une fonction convexe, semi-continue inférieurement et coercive sur $L^2(\Omega^\square) \otimes L^2_{P_\xi}(\Xi)$, et qui prend des valeurs non nulles pour des valeurs non admissible de I. On choisit ici

$$F(I) = \int_{\Omega^\square \times \Xi} f(I(x,y))\, d\mu(x,y), \quad \text{avec} \quad f(z) = \max(z-\beta, 0)^2 + \max(\alpha - z, 0)^2 \tag{16}$$

Dans la pratique, la fonction indicatrice I est préalablement régularisée afin d'améliorer la convergence de I_s vers I.

3 Illustration : condition de Neumann sur frontière aléatoire

On considère le problème (1) avec $f = 1$ et un domaine $\Omega(\xi) = \{(0,2) \times (0,1)\} \backslash D(\xi)$, où $D(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x - c(\xi)| \leq R\}$ est un domaine circulaire aléatoire de rayon $R = 0.2$ et de centre $c(\xi) = (1.4\xi + 0.3, 0.5)$, où ξ est une variable aléatoire uniforme sur $\Xi = (0,1)$. On introduit le domaine fictif $\Omega^\square = (0,2) \times (0,1)$ tel que $\Omega(\xi) = \Omega^\square \backslash D(\xi)$. On considère des conditions de Dirichlet homogènes sur $\Gamma_D = \partial\Omega^\square$ et des conditions de Neumann homogènes sur $\Gamma_N(\xi) = \partial D(\xi)$. La frontière circulaire du trou est caractérisée par l'iso-zero dans $\Omega^\square$ de la fonction level-set aléatoire $\phi(x,\xi) = R - |x - c(\xi)|$, représentée sur la figure 2. On introduit une approximation éléments finis triangulaires au niveau spa-

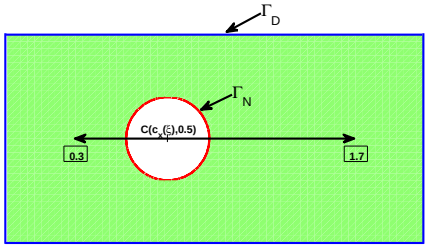
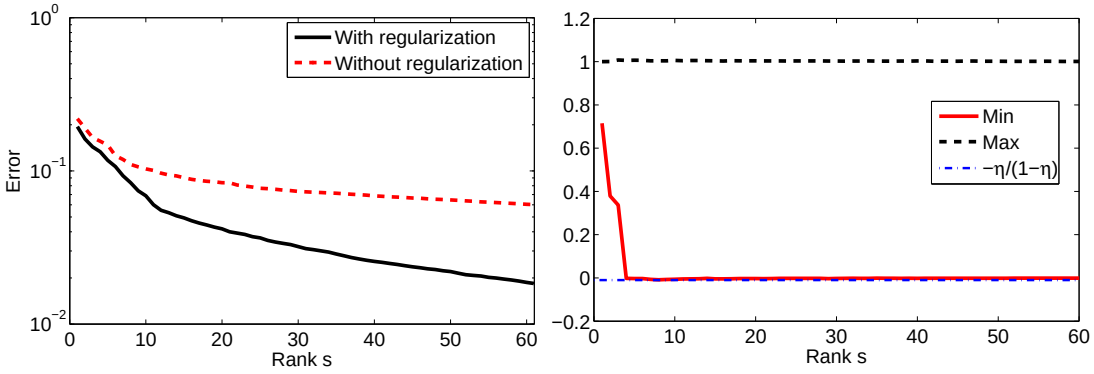


FIGURE 2 – Exemple modèle avec frontière de Neumann aléatoire

tial pour lequel l'espace d'approximation $\mathcal{V}_N^\square$ est de dimension $N = 1740$. L'espace d'approximation stochastique $\mathcal{S}_P$ est un espace éléments finis de degré 1 sur un maillage uniforme de Ξ composée de 60 éléments ($dim(\mathcal{S}_P) = 61$). Dans la suite $\tilde{u}$ désignera l'approximation de Galerkin $\tilde{u} \in \mathcal{V}_N^\square \otimes \mathcal{S}_P$ du problème $(\tilde{P}_\eta)$ et sera prise comme solution de référence. Dans la suite, on choisit une formulation sur domaine fictif avec $\eta = 0.01$.

Dans un premier temps, on effectue une décomposition sous contraintes d'une version régularisée I^r de la fonction indicatrice I. On choisit $\varepsilon = 1000$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. On note I_s^r la représentation séparée de rang s de I^r. La convergence de I_s^r est étudiée grâce à l'indicateur d'erreur $\varepsilon(I; I^*) = \frac{\|I - I^*\|}{\|I^*\|}$. La figure 3(a) illustre l'amélioration importante de la convergence de la représentation séparée avec l'introduction de la régularisation. La figure 3(b) illustre les valeurs maximales et minimales de la représentation séparée I_s^r. On observe que pour la décomposition sous contraintes la condition $I_s^r(x,\xi) > \frac{-\eta}{1-\eta}$ est satisfaite pour tout s. On constate donc que l'utilisation de la régularisation combinée avec la séparation sous contraintes garantit une bonne convergence de la représentation séparée I_s^r et un problème bien posé quel que soit s.

On résout à présent le problème $(\tilde{P}_\eta^s)$ avec la méthode PGD, en prenant comme fonction indicatrice approchée I_s^r, avec $s = 39$. Ce choix garantit un problème bien posé et correspond à une erreur



(a) (b)

FIGURE 3 – Comportement de la représentation séparée de la fonction indicatrice : (a) évolution des indicateurs d'erreur $\varepsilon(I_s;I)$ et $\varepsilon(I_s^r;I^r)$ et (b) valeurs maximales et minimales de I_s^r en fonction de s

$\varepsilon_\Omega(\tilde{u}^{r,s};\tilde{u}^r) \leq 10^{-2}$ où $\tilde{u}^r$ et $\tilde{u}^{r,s}$ sont les solutions de $(\tilde{\mathrm{P}}_\eta)$ associées à I^r et sa version décomposée I_s^r respectivement, et $\varepsilon_\Omega(\cdot;\cdot)$ est l'indicateur d'erreur :

$$\varepsilon_\Omega(u;u^*) = \frac{\|u-u^*\|_{0,\Omega}}{\|u^*\|_{0,\Omega}}$$

avec $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norme définie par $\|u\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Xi \int_{\Omega(y)} u^2\, dx\, dP_\xi(y)$. Dans la suite u_m désigne l'approximation PGD progressive de $\tilde{u}^{r,s}$, associée à la fonction indicatrice I_s^r. La figure 4 illustre la convergence en fonction de m de l'approximation PGD u_m vers $\tilde{u}^{r,s}$. On obtient une erreur $\varepsilon_\Omega(u_m;\tilde{u}^{r,s}) \leq 10^{-2}$ pour un rang faible $m = 8$.

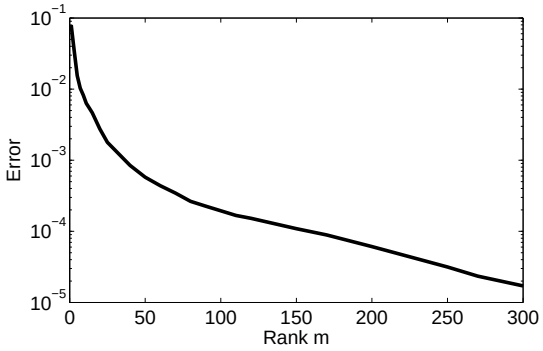


FIGURE 4 – Évolution de l'indicateur d'erreur $\varepsilon_\Omega(u_m;\tilde{u}^{r,s})$ en fonction de m.

4 Illustration : condition de Dirichlet sur frontière aléatoire

On considère le problème (1) avec $f = 1$ et un domaine $\Omega(\xi) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq 1, h(x_1,\xi) \leq x_2 \leq 1\}$ avec $h(x_1,\xi)$ un champ stochastique stationnaire modélisant une frontière rugueuse (voir la figure 5). Le domaine fictif est défini par $\Omega^\square = (0,1)\times(0,1)$ tel que $\Omega(\xi) \subset \Omega^\square$. Des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur toute sur la frontière du domaine $\Omega(\xi)$: $\Gamma_D(\xi) = \partial\Omega(\xi)$. Le bord rugueux est ici représenté par un champ dépendant de 10 variables aléatoires :

$$h(x_1,\xi) \approx \sigma \sum_{k=1}^{10} \hat{h}_k(x_1)\xi_k \tag{17}$$

où $\{\hat{h}_k\}_{k=1}^{10}$ sont des fonctions sinusoidales de longueur d'onde et amplitude décroissantes avec k, et les $\{\xi_k\}_{k=1}^{10}$ sont des variables uniformes indépendantes sur $(-1,1)$. Le paramètre σ est l'écart-type du

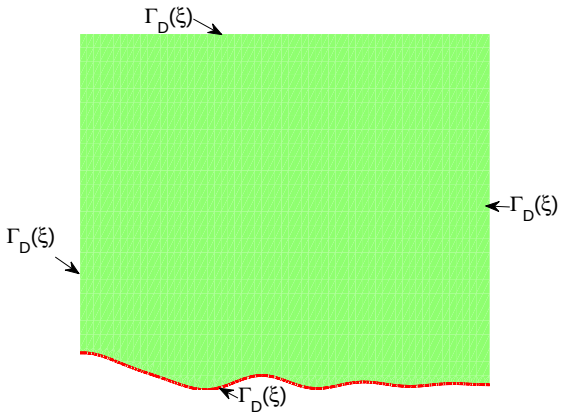


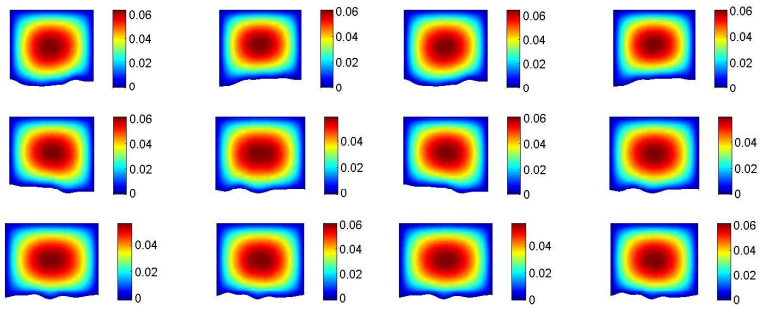
FIGURE 5 – Exemple modèle avec frontière de Dirichlet aléatoire

champ stochastique, qui est ici choisi égal à $\sigma = 0.1$. Le domaine aléatoire est caractérisé par l'iso-zero de la fonction level-set $\phi(x,\xi) = -(x_2 - 0.15) + h(x_1,\xi)$ dans $\Omega^{\square}$.

Un espace d'approximation éléments finis $\mathcal{V}_N^{\square}$ de dimension $N = 1740$ est introduit au niveau spatial. Au niveau stochastique, $\Xi = \times_{k=1}^{10}\Xi_k$, avec $\Xi_k = (-1,1)$, et on introduit pour chaque dimension stochastique un espace d'approximation éléments finis de degré 2 $\mathcal{S}_{P_k}$ associé à une partition uniforme de Ξ_k en 20 éléments ($P_k = 60$ pour tout k $k \in \{1\dots10\}$. Pour ce cas multidimensionnel, une méthode PGD progressive est appliquée pour obtenir une approximation séparée du problème $(\tilde{P}_\psi)$ sous la forme

$$\tilde{u} \approx u_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x)\lambda_i^1(\xi_1)...\lambda_i^{10}(\xi_{10}) \quad w_i \in \mathcal{V}_N^{\square}, \lambda_i^1 \in \mathcal{S}_{P_1}, ..., \lambda_i^{10} \in \mathcal{S}_{P_{10}} \tag{18}$$

Une approximation de la solution du problème initial est alors obtenue sous la forme ψu_m, avec $\psi(x,\xi) = -\phi(x,\xi)$. Les figures 6 et 7 comparent l'approximation ψu_{50} avec une solution déterministe pour plusieurs valeurs des paramètres aléatoires ξ. On observe un bonne concordance des résultats.

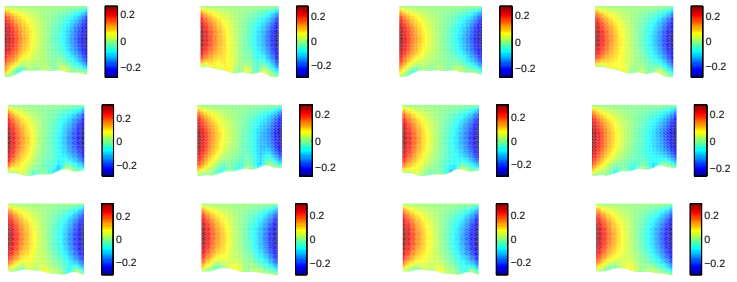


(a) (b)

FIGURE 6 – Solution pour 6 réalisations de ξ : (a) approximation ψu_{50} (PGD) et (b) solution déterministe.

5 Conclusion

Une nouvelle méthodologie a été proposée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles définies sur des domaines incertains paramétrés. Cette méthodologie repose d'une part sur une approche de domaine fictif donnant une formulation du problème dans un espace produit tensoriel, et d'autre part sur la construction *a priori* d'une représentation séparée de la solution construite avec la méthode PGD. On a montré l'efficacité de la méthode au travers de deux exemples simples. Dans le cas de frontières de Neumann aléatoires, une méthode de séparation sous contraintes de la fonction indicatrice a été introduite afin de préserver un caractère bien posé des reformulations approchées sur domaine fictif. La



(a) (b)

FIGURE 7 – Gradient horizontal pour 6 réalisations de ξ : (a) approximation ψu_{50} (PGD) et (b) solution déterministe.

séparation de la fonction indicatrice dans le cas multimensionnel à grand nombre de variables aléatoires reste cependant à étudier. L'extension de ces méthodes au cas de variabilités géométriques localisées est également un enjeu qui nécessitera le développement de stratégies adaptées.

Remerciements

Ces travaux sont financés par l'Agence Nationale de la Recherche (projet ANR-2010-COSI-006).

Références

[1] A. Nouy. Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3) :251–285, 2009.

[2] D. Xiu. Fast numerical methods for stochastic computations : a review. *Comm. Comput. Phys.*, 5 :242–272, 2009.

[3] H. G. Matthies. Stochastic finite elements : Computational approaches to stochastic partial differential equations. *Zamm-Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 88(11) :849–873, 2008.

[4] O. P. Le Maitre and O. M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Scientific Computation. 2010.

[5] C. Canuto and T. Kozubek. A fictitious domain approach to the numerical solution of pdes in stochastic domains. *Numerische Mathematik*, 107(2) :257–293, 2007.

[6] A. Nouy, A. Clément, F. Schoefs, and N. Moës. An extended stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :4663–4682, 2008.

[7] P. Ladevèze, J.C. Passieux, and D. Néron. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21-22) :1287–1296, 2010.

[8] A. Nouy. Proper Generalized Decompositions and separated representations for the numerical solution of high dimensional stochastic problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17 :403–434, 2010.

[9] A. Nouy. A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1603–1626, 2010.

[10] F. Chinesta, A. Ammar, and E. Cueto. Recent advances in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, In press, 2010.

[11] A. Falco and A. Nouy. A Proper Generalized Decomposition for the solution of elliptic problems in abstract form by using a functional Eckart-Young approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376(2) :469-480, 2011

[12] A. Nouy. A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537, 2007.

[13] A. Nouy and A. Falco. Constrained tensor product approximations based on penalized best approximations. submitted.

[14] I. Babuška, U. Banerjee, and J. E. Osborn. Survey of Meshless and Generalized Finite Element Methods : A Unified Approach. Acta Numerica, 12 :1-125, 2003.