



**HAL**  
open science

## Formulation Mixte Vitesse-Déplacement pour Viscoélasticité - Confrontation Expérimentale et Numérique

Vu Thu Pham, Luisa Rocha da Silva, Hugues Digonnet, Christelle Combeaud,  
Noëlle Billon, Thierry Coupez

► **To cite this version:**

Vu Thu Pham, Luisa Rocha da Silva, Hugues Digonnet, Christelle Combeaud, Noëlle Billon, et al.. Formulation Mixte Vitesse-Déplacement pour Viscoélasticité - Confrontation Expérimentale et Numérique. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. 8p.; Clé USB. hal-00592675

**HAL Id: hal-00592675**

**<https://hal.science/hal-00592675>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formulation Mixte Vitesse-Déplacement pour Viscoélasticité - Confrontation Expérimentale et Numérique

VT. Pham<sup>a, b</sup>, L. Silva<sup>a</sup>, H. Digonnet<sup>a</sup>, C. Combeaud<sup>a</sup>, N. Billon<sup>a</sup>, T. Coupez<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Centre de Mise en Forme des Matériaux, MINES ParisTech, Rue Claude Daunesse, Sophia Antipolis cedex, France

<sup>b</sup> Corresponding author. Tel: +33 0 4 93 67 89 07, E-mail address: vu-thu.pham@mines-paristech.fr

**Résumé.** L'objectif de ce travail est de modéliser le comportement des matériaux polymère injectés sous sollicitations dynamiques par une approche monolithique. Basé sur les équations de Navier-Stokes, nous proposons une méthode des éléments finis mixtes avec une interpolation P1+/P1 utilisant le déplacement (ou la vitesse) et la pression en tant que principales variables. La technique implémentée utilise un maillage composé de triangles (2D) ou de tétraèdres (3D) [6]. Le but de cette approche est de modéliser le comportement viscoélastique des matériaux polymère où les milieux visqueux et élastiques sont mélangés en utilisant une approche multiphasique en vitesse et déplacement. L'idée de base est d'utiliser une formulation mixte  $(u, v, p)$  avec un modèle de fermeture  $F(du/dt, v) = 0$ , où les deux champs  $u$  et  $v$  représentent les principales variables de la déformation et de la vitesse de déformation.

**Mots clefs:** viscoélasticité, approche monolithique, méthode des éléments finis mixtes, formulation lagrangienne et eulérienne.

## 1. INTRODUCTION

A l'issue des travaux actuels, nous pouvons prédire numériquement les propriétés mécaniques de pièces injectées en composite, où la matrice est thermo-élastique ou hyper-élastique. Les modèles développés jusqu'à aujourd'hui ont été implémentés dans le code de calcul Rem3D<sup>®</sup>, logiciel du CEMEF et dédié à la simulation de l'injection de polymères, basé sur la bibliothèque éléments finis CimLib<sup>®</sup>. Dans le cadre de notre projet de recherche, nous nous intéressons à un comportement plus réaliste pour la matrice. Ainsi, nous considérons une matrice du type polymère semi-cristallin, qui aura un comportement viscoélastique (de l'état liquide à l'état solide) et éventuellement élastoviscoplastique (à l'état solide). Les objectifs de ce travail sont d'implémenter et/ou utiliser des approches numériques qui vont permettre de traiter des problèmes physiques tels que la viscoélasticité, le couplage fluide-structure et structure-structure, le contact multi-corps ou les grandes vitesses du solide (inertie).

L'article est structuré comme suit. Tout d'abord, les équations du problème viscoélastique à l'état solide seront détaillées. Nous développerons ensuite l'approche monolithique et la résolution par éléments finis mixte de ce problème. Le comportement du matériau est supposé viscoélastique compressible et peut être décrit par une approche lagrangienne ou eulérienne. Deux méthodes de simulation sont appliquées : la résolution par déplacement-pression  $(u-p)$  avec un seul incrément et la résolution incrémentale par vitesse-pression  $(v-p)$ . La comparaison entre les approches lagrangienne et eulérienne, cette dernière basée sur la méthode Level-Set [11], sera présentée. Exemples en traction et compression d'une géométrie simple permettra d'illustrer et de valider notre méthodologie. Ensuite, nous comparons les résultats de la simulation avec les données expérimentales pour le PMMA.

## 2. RESOLUTION PAR APPROCHE MONOLITHIQUE

### 2.1. Navier-Stokes avec Extra-contrainte pour Modèle Comportement ViscoElastique Compressible

Le couplage monolithique consiste à résoudre les équations relatives à la structure au fluide dans un même système. C'est-à-dire que les problèmes mécaniques dans les domaines fluide et solide en interaction sont simultanément calculés. Ce type de couplage donne une stabilité inconditionnelle du schéma de couplage. Dans le but de poursuivre cette approche, nous choisissons un solveur fluide pour

résoudre ces problèmes. Pour le comportement viscoélastique, nous considérons dans un premier temps le modèle de Kelvin-Voigt [4] (figure 1). En effet, avec ce modèle, l'élasticité est parfaitement conservée, c'est-à-dire qu'un objet déformé peut revenir à sa position initiale, ce qui nous permet d'étudier et d'optimiser le solveur actuel. La résolution du problème viscoélastique de Kelvin-Voigt peut être liée à un problème d'interaction fluide-structure. L'objectif est de mettre en œuvre un solveur général qui permet de modéliser le comportement des pièces injectées en matériaux polymères à la fois sous sollicitations dynamiques mais aussi pendant le procédé.

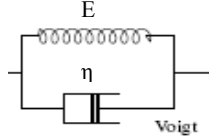


FIGURE 1. Schéma représente modèle Kelvin-Voigt en 1-D dimension

Avec modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt, le tenseur des contraintes est défini par:

$$\sigma_{viscoelastic} = E\varepsilon(u) + 2\eta_f \varepsilon(v) \quad (1)$$

où  $E\varepsilon(u)$  et  $2\eta_f \varepsilon(v)$  sont les contraintes élastiques et contraintes visqueuses.

Pour un comportement élastique compressible, le tenseur des contraintes élastiques est écrit:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \text{tr}\varepsilon(u)I$$

où  $\mu = \frac{E}{2(1+\gamma)}$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé,  $E$  est le module de Young,  $\gamma$  est le coefficient de

Poisson,  $\text{tr}(\cdot)$  est la trace,  $I$  est le tenseur d'identité,  $\sigma$  et  $\varepsilon(u)$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur de déformation.

Connaissant la pression hydrostatique  $p = -\frac{1}{3}\text{tr}\sigma = -\frac{1}{3}(2\mu + 3\lambda)\text{tr}\varepsilon(u)$ , le tenseur des contraintes peut aussi s'écrire:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) - \frac{2\mu}{3}\text{tr}\varepsilon(u)I - pI$$

En utilisant  $p' = \frac{2\mu}{3}\text{tr}\varepsilon(u) + p$ , la contrainte élastique compressible est redéfinie comme:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon(u) - p'I$$

Selon la méthode de résolution adoptée (eulérienne ou lagrangienne), en petites déformations, la formulation forte du comportement viscoélastique compressible peut être déduire comme système d'équations (2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\alpha) \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v_c \cdot \nabla v \right) - \nabla \cdot \left[ 2\eta(\alpha) \varepsilon(v) + 2\mu \varepsilon(u^{t-\Delta t} + v\Delta t) \right] + \nabla p' = f \\ \nabla \cdot v + \chi_{p'} \frac{dp'}{dt} = \nabla \cdot v + \chi_{p'} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + v_c \cdot \nabla p' \right) = 0 \\ \frac{du}{dt} = \frac{u - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} + v_c \cdot \nabla u = v \end{array} \right. \quad (2)$$

où  $v_c = v - v_{\text{maillage}}$  est la vitesse de convection ( $v_{\text{maillage}} = 0$  dans le cas eulérien ou  $v_{\text{mesh}} = v$  dans le cas lagrangien),  $v$  et  $p$  sont la vitesse et la pression,  $f$  sont les termes de force volumiques,

$\chi_{p'} = \frac{(1+\gamma)(1-2\gamma)}{\gamma E}$  est le coefficient de compressibilité.

A partir du système d'équations (2), remplaçant le terme  $2\mu\Delta t\varepsilon(v) + 2\eta(\alpha)\varepsilon(v)$  par  $2\eta\varepsilon(v)$  et déplaçant la partie "extra-contrainte"  $\tau = -2\mu\varepsilon(u^{t-\Delta t})$  vers le second membre des équations de Navier-Stokes compressible, nous obtenons le système d'équations à résoudre (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v_c \cdot \nabla v \right) - \nabla \cdot 2\eta\Delta t\varepsilon(v) + \nabla p' = f - \nabla \cdot \tau \\ \nabla \cdot v + \chi_{p'} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + v_c \cdot \nabla p' \right) = 0 \\ \frac{u - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} = v - v_c \cdot \nabla u \end{array} \right. \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta(\alpha) = \eta_f H_\varepsilon(\alpha) + \eta_{solid} H_\varepsilon(\alpha) \\ \rho(\alpha) = \rho_f H_\varepsilon(\alpha) + \rho_{solid} (1 - H_\varepsilon(\alpha)) \end{array} \right. \quad (4)$$

La densité  $\rho$  et la viscosité  $\eta$  sont définis par les équations (4) où  $\alpha$  est la fonction de distance signée à l'interface,  $H_\varepsilon(\alpha)$  est une fonction de type Heaviside,  $\varepsilon$  sera liée à  $h$  la taille de maille.

## 2.2. La Résolution en Éléments Finis Mixtes

Pour établir la formulation faible des équations de Navier-Stokes, nous définissons les espaces fonctionnels  $V = (H^1(\Omega))^d$ ,  $V^0 = (H_0^1(\Omega))^d$  et  $P = L^2(\Omega)$  où  $L^2(\Omega)$  est l'espace de Lebesgue des fonctions carrées sommables sur un domaine  $\Omega$ , et  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Sobolev inclus dans  $L^2(\Omega)$  et  $d$  est la dimension de l'espace :

$$L^2(\Omega) = \left\{ q, \int_{\Omega} q^2 dV < \infty \right\}; \quad H^1(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \nabla q \in (L^2(\Omega))^d \right\}; \quad H_0^1(\Omega) = \left\{ q \in H^1(\Omega), q = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \quad (5)$$

Dans le cas viscoélastique compressible, les effets d'inertie dynamique et la force volumique ont été négligés. Le problème discret Galerkin consiste donc à résoudre le problème mixte (6), où les espaces vectoriels  $V_h, P_h, V_h^0$  sont construites dans le but d'approcher  $V, P$  et  $V^0$ .

Trouve  $(v_h, p'_h) \in (V_h, P_h)$  tel que  $\forall (w_h, q_h) \in (V_h^0, P_h)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(p'_h, \nabla \cdot w_h) + 2\eta\varepsilon(v_h) : \varepsilon(w_h) = -2\mu\varepsilon(u_h^{t-\Delta t}) : \varepsilon(w_h) \\ (-\nabla \cdot v_h, q_h) - \left( \frac{\chi_p}{\Delta t} p'_h, q_h \right) = \left( \frac{\nabla \cdot u_h^{t-\Delta t}}{\Delta t}, q_h \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Le déplacement discret  $u_h^{t-\Delta t}$  est calculé par l'incrément précédent (7):

$$\left( \frac{\partial u_h}{\partial t} + v_h^c \nabla u_h, \zeta_h \right) = v_h \left( \zeta_h \in V_h^0 \right) \quad (7)$$

Nous utilisons la méthode des éléments finis mixtes avec l'élément P1+/P1+, alors non seulement la vitesse est enrichie par l'ajout d'un degré de liberté (appelée fonction bulle) dans le centre des éléments [5] [6], mais aussi la pression est enrichie par une fonction bulle. La fonction bulle vaut 1 au centre des éléments et est nulle aux frontières.

Ainsi, nous considérons une décomposition de la vitesse et de la pression en petite et grande échelle  $v = v_h + v_h^b$ ;  $p' = p'_h + p_h^{b'}$ , par conséquent, les équations (6) peuvent se mettre sous la forme d'une matrice (8):

$$\begin{pmatrix} Avv & 0 & A'vp & A'vp_b \\ 0 & Av_bv_b & A'v_b p & A'v_b p_b \\ Avp & Av_b p & App & A'pp_b \\ Avp_b & Avp & App_b & Ap_b p_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_b \\ p' \\ p'_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv \\ Bv_b \\ Bp \\ Bp_b \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Avv &= 2\eta\varepsilon(v_h) : \varepsilon(w_h) ; A'vp = -(p'_h, \nabla \cdot w_h) ; Av_bv_b = 2\eta\varepsilon(v_h^b) : \varepsilon(w_h^b) ; A'vp_b = -(p_h^{ib}, \nabla \cdot w_h) \\ A'v_b p_b &= -(p_h^{ib}, \nabla \cdot w_h^b) ; A'v_b p = -(p'_h, \nabla \cdot w_h^b) ; Ap_b p_b = -\left(\frac{\chi_p}{\Delta t} p_h^b, q_h^b\right) ; App = -\left(\frac{\chi_p}{\Delta t} p'_h, q_h\right) ; A'pp_b = -\left(\frac{\chi_p}{\Delta t} p_h^{ib}, q_h\right) \\ Bp_b &= \left(\frac{\nabla \cdot (u_h + u_h^b)}{\Delta t}, q_h^b\right) ; Bp = \left(\frac{\nabla \cdot (u_h + u_h^b)}{\Delta t}, q_h\right) ; Bv_b = -2\mu\varepsilon(u_h^{b(t-\Delta t)}) : \varepsilon(w_h^b) ; Bv = -2\mu\varepsilon(u_h^{t-\Delta t}) : \varepsilon(w_h) \end{aligned}$$

La matrice (8) est une matrice symétrique définie positive que nous avons mise en œuvre dans le solveur. Notez que par la suite de nos simulations, la "pression de la bulle"  $p'_b$  a été mise à zéro pour les simulations qui revient à utiliser la méthode des éléments finis mixtes avec le P1+/P1 élément où seule la vitesse est enrichie par une fonction bulle.

### 3. RESULTATS NUMERIQUES

L'échantillon est fixé sur un bord et tiré sur l'autre en imposant un déplacement (Fig.3), puis relâché. Nous testons l'erreur introduite par le solveur Navier-Stokes compressible avec extra-contrainte en petites et grandes déformations. En effet, dans le cas élastique compressible parfait, l'échantillon doit revenir exactement à sa forme initiale. Nous avons essayé de simuler ce test par deux méthodes de calcul : lagrangienne et eulérienne dans lequel nous avons utilisé un solveur éléments finis mixte Navier-Stokes où le problème fort et discret est présenté en partie précédente. La comparaison de ces deux méthodes nous permet de prédire la capacité de notre solveur actuel, de donner une vue général sur ses performances mais aussi les points forts et les points faibles à compléter ou à améliorer. Donc, l'objectif à terme est de traiter des problèmes physiques plus compliqués tels que la viscoélasticité, le couplage fluide-structure et structure-structure, le contact multi-corps ou les effets d'inertie.

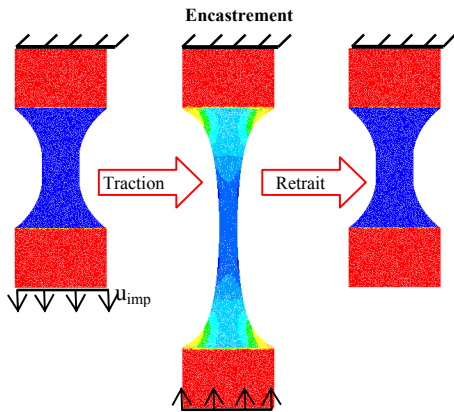


FIGURE 3: Essai de traction d'une éprouvette. Schéma représente la forme initiale, en traction et finale

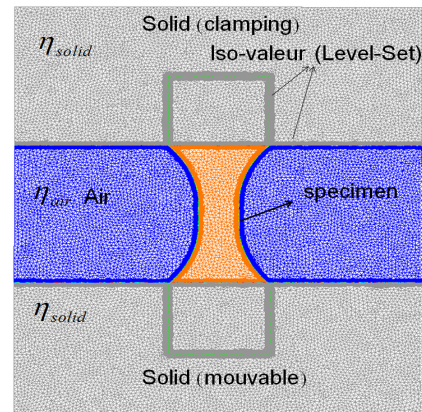


FIGURE 2: Essai de traction par méthode eulérienne

#### 3.1. Méthode Lagrangienne Pour un Problème Elastique Compressible

Figure 3 montres la simulation par la méthode lagrangienne avec la déformation de maillage. Donc, l'algorithme de calcul en traction et en retrait par un seul incrément de calcul sont illustrés dans les équations (9) et (10):

$$\begin{cases} \nabla \cdot 2\mu\varepsilon(u) - \nabla p' = 0 \\ -\nabla \cdot u - \chi_{p'} p' = 0 \\ u = u_{imposed} \text{ in border} \end{cases} \quad (9)$$

En traction, on impose un déplacement  $u_{imposed}$  au bord inférieur

$$\begin{cases} \nabla \cdot 2\mu\varepsilon(u) - \nabla p' = -\nabla \cdot \sigma_1 \\ \sigma_1 = 2\mu\varepsilon(u_1) \\ -\nabla \cdot u - \chi_{p'} p' = \nabla \cdot u_1 \\ u = -u_{imposed} \text{ in border} \end{cases} \quad (10)$$

Nous pilotons le retour en imposant un déplacement  $-u_{imposé}$  opposé à celui en traction

Nous pouvons décomposer un grand déplacement en plusieurs petits déplacements:

$$\begin{cases} \nabla_{x^i} \cdot 2\mu\Delta t \varepsilon(v) - \nabla_{x^i} p' = -\nabla_{x^i} \cdot \sigma_1 \\ \sigma_1 = -2\mu\varepsilon(u_{i-1}) \\ -\nabla_{x^i} \cdot (v) - \frac{\chi_{p'} p'}{\Delta t} = \frac{\nabla_{x^i} \cdot (u_{i-1})}{\Delta t} \\ u_i = u_{i-1} + v_{i-1} \Delta t \end{cases} \quad (11)$$

où  $u_i, v_i$  est le déplacement et la vitesse à l'incrément  $i$ ,  $x^i$  est la configuration à l'incrément actuel  $i$ ,  $\nabla x^i$  est l'opérateur (divergence, gradient) en configuration actuel  $x^i$ .

Avec cette méthode (équations 11), le calcul en grandes déformations est constitué par plusieurs incréments de calcul en petites déformations ce qui nous permet de minimiser l'erreur provoquée par rapport au calcul par un seul incrément (équations 9 et 10).

### 3.2. Méthode Eulérienne pour un Problème Elastique Compressible

Nous considérons le même cas, mais dans un contexte eulérien, décrit dans la Fig.2. Nous définissons trois domaines avec viscosités différentes: le domaine solide (gris) est fixé dans le haut et celui en bas est mobile, le domaine d'air (bleu) et le domaine d'éprouvette (rouge). Les équations de calcul sont illustrés dans (12):

$$\begin{cases} \nabla \cdot 2\eta\varepsilon(v) - \nabla p' = -\nabla \cdot 2\mu H(\alpha) \cdot \varepsilon(u^{t-\Delta t}) \\ -\nabla \cdot v - \frac{\chi_{p'} p'}{\Delta t} = \frac{\nabla u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \\ \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u = v \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + v \nabla \alpha + \lambda s \left( |\nabla \alpha| - \sqrt{1 - \left(\frac{\Pi}{2E} \alpha\right)^2} \right) = 0 \\ \alpha(t=0, x) = \alpha_0(x) \end{cases} \quad (13)$$

Nous utilisons la méthode Level-Set pour transporter l'interface qui représente les différentes phases. En effet, en raison de la complexité d'écoulement, le gradient de la fonction  $\alpha$  peut devenir très raide et instable,  $|\nabla \alpha| = 1$  n'est pas assuré. Donc, l'étape de réinitialisation est indispensable [2]. Nous utilisons une nouvelle formulation de méthode Level-Set pour suivre le mouvement de l'interface [7], donc le transport ou la réinitialisation convective est montré dans les équations (13) où  $s$  est le signe de  $\beta$  (initialement  $\alpha$ ),  $\lambda = d\tau / dt$ ,  $t$  et  $\tau$  sont le temps et le temps fictif,  $E$  est l'épaisseur de mélange.

### 3.3. Comparaison des Résultats Numériques

#### 3.3.1. Méthode Lagrangien

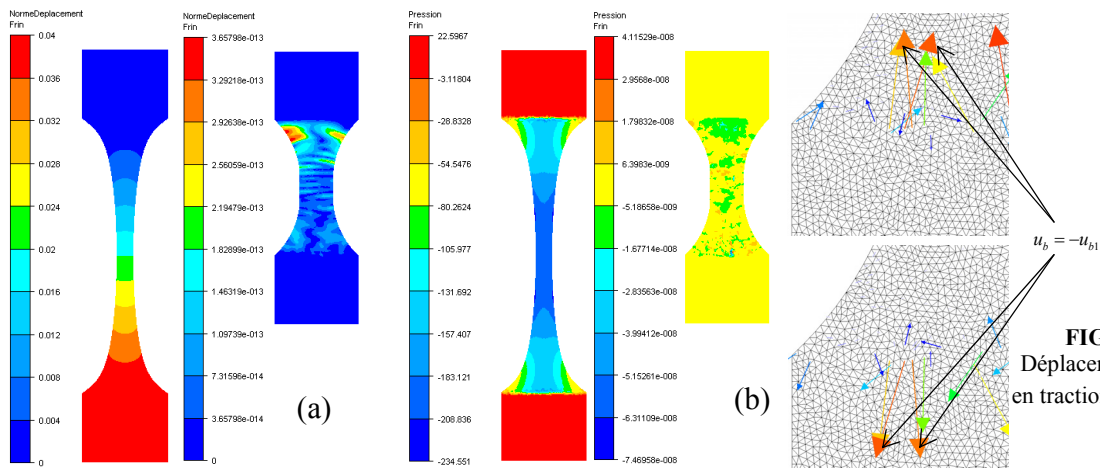


FIGURE 5. Déplacement (a) et pression (b) en traction et retrait

La figure 5 montre le déplacement et la pression en traction et en retrait pour un essai de traction élastique compressible. Avec 100% de déformation, en retrait, on retrouve exactement la forme initiale de l'échantillon avec une erreur de l'ordre de  $10^{-11}$  pour le déplacement et  $10^{-8}$  de la pression, donc il vérifie notre méthodologie dans le cas élastique. En outre, dans la formulation où la vitesse est enrichie avec des bulles, on obtient également une vitesse de bulle parfaitement opposées entre de traction et de retour Fig.4. Cela nous permet de confirmer que la solution de notre algorithme cité dans les équations (9,10) est exacte, c'est à dire en retour, nous trouvons:  $u_1 = -u$ ;  $u_{b1} = -u_b$  and  $p_1 = 0$  où  $u_1$  est le déplacement en retrait,  $u_{b1}$  est "le déplacement de la bulle" en retrait et  $p_1$  est la pression en retrait.

### 3.3.2. Méthode Eulérienne

Les résultats obtenus par la méthode eulérienne sont moins précis que ceux obtenus par la méthode de Lagrange (Fig.6). Dans ce cas, la forme de l'échantillon est représentée par l'interface air/échantillon. Il apparaît des différences entre la traction et le retour. On précise que la déformation est de 30%, ce qui est relativement important, donc l'erreur introduite est due à la Level-Set, le maillage ou encore l'extra-contraint.

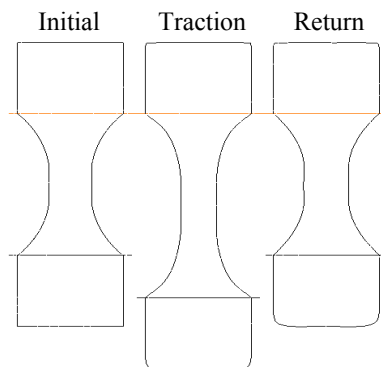


FIGURE 6. Essai de traction en eulérien. La forme déformée est représentée par l'isovaleur de fonction Level-Set

Dans cette section nous remarquons les conclusions suivantes entre les méthodes de Lagrange et Euler:

- ✓ Pour la méthode de Lagrange avec un incrément, les résultats sont satisfaisants, nous obtenons un retour parfait, même avec 100% de déformation.
- ✓ Pour la méthode incrémentale de Lagrange, nous avons remarqué des instabilités dans les résultats obtenus pour une déformation supérieure à 30%, lorsque la partie élastique domine. Ceci peut être expliqué, d'une part, par le fait que la partie de la contrainte explicitée dans le second membre des

équations (11) est important ce qui introduit une partie d'ellipticité dans la résolution sous la forme mixte [2]. Et d'autre part, notre solveur actuel est valable pour des petites déformations, où nous n'avons gardé que les termes du premier ordre, donc nous n'avons pas pris en compte les termes non-linéarité. Néanmoins, nous avons testé le solveur dans des cas dépassant cette hypothèse, et donc des instabilités ont été observées lors de la simulation.

### 3.4. Comparaison Expérimentale-Simulation pour PMMA

Dans le but de valider nos méthodologies, nous avons réalisé des essais expérimentaux et comparer par rapport à la simulation. Dans cette section, nous détailleront les résultats expérimentaux et comparaison avec ceux numériques. Le comportement du PMMA dépend de la température, dans sa phase de transition  $\alpha$  autour  $120^{\circ}\text{C}$ , le comportement du polymère change rapidement de l'état solide à l'état liquide. Dans le but de simuler le comportement du polymère en différentes phase, nous avons testé des essais à partir de  $90^{\circ}\text{C}$  à  $163^{\circ}\text{C}$  avec deux types de sollicitation: charge/décharge et relaxation. Le cycle (charge/décharge) et relaxation ont été réalisés à  $90^{\circ}\text{C}$  et  $110^{\circ}\text{C}$  avec une vitesse de déformation  $0,01\text{s}^{-1}$ . A  $163^{\circ}\text{C}$  où le matériau commence à s'écouler, seul l'essai de relaxation avec une vitesse de déformation  $0.25\text{s}^{-1}$  a été réalisé en raison de ses difficultés expérimentales. Tous les tests ont été effectués à l'aide de l'extensomètres vidéo, nous avons analysé les images séquentielles avec le logiciel ARAMIS<sup>®</sup> qui permettent de mesurer les vrai déformations en 3 dimensions.

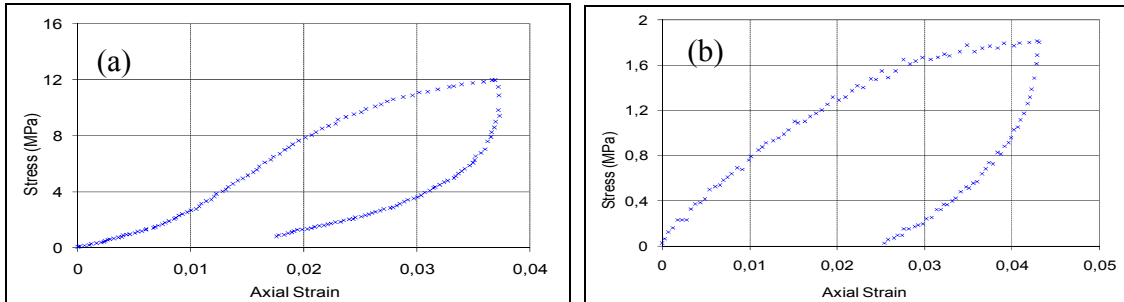


FIGURE 7. Charge/décharge test. Comparaison entre (a)  $90^{\circ}\text{C} - 0.01\text{s}^{-1}$  et (b)  $110^{\circ}\text{C} - 0.01\text{s}^{-1}$

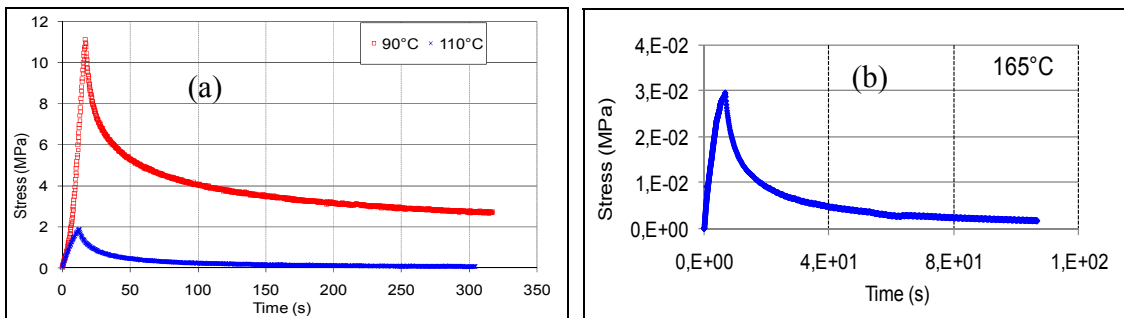


FIGURE 8. Relaxation tests. Comparaison entre (a)  $90^{\circ}\text{C} - 0.01\text{s}^{-1}$ ,  $110^{\circ}\text{C} - 0.01\text{s}^{-1}$  and (b)  $163^{\circ}\text{C} - 0.25\text{s}^{-1}$

Le modèle classique de Kelvin-Voigt a été utilisé pour analyser des résultats expérimentaux. Les paramètres associés sont donnés dans le tableau suivant :

Parameters	$90^{\circ}\text{C}$	$110^{\circ}\text{C}$	$163^{\circ}\text{C}$
Young's modulus (Pa)	$3e^8$	$7e^7$	$1.5e^5$
Viscosity (Pa)	$1e^4$	$1e^4$	$1e^5$

TABLEAU 1. Identification des paramètres de Kelvin-Voigt

Insistons sur le fait que ce modèle devrait être encore amélioré. Toutefois, la reproduction de la première étape (partie linéaire) de la courbe de charge, 2 méthodes : méthode lagrangienne et méthode eulérienne ont servi à valider notre méthodologie, en 2D et en 3D. En Fig.9, nous comparons les



contraintes par la simulation et les résultats expérimentaux. Rappelons que nous simulons que la phase où le comportement du matériau reste linéaire. Ces comparaisons montrent un bon accord entre les simulations et les essais expérimentaux avec une erreur inférieure à 10% quelle que soit la méthode, en 2D ou en 3D. Les résultats de la première étape de montrer un bon indicateur potentiel de nos travaux futurs.

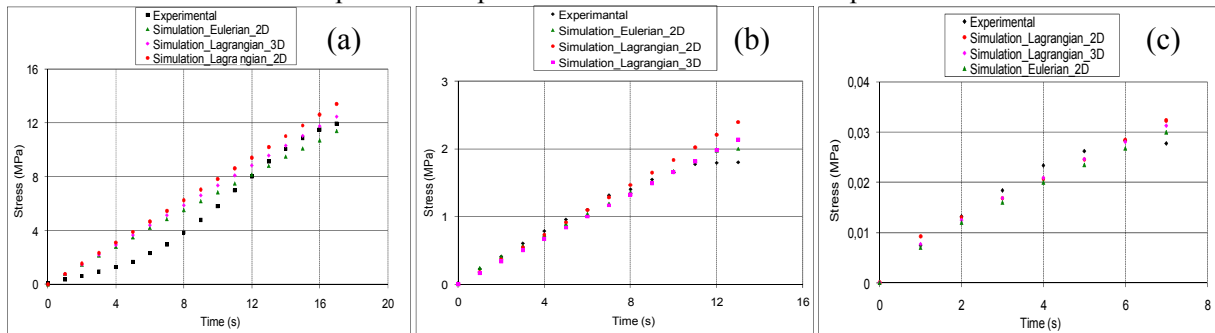


FIGURE 9. Contrainte de chargement à 90°C (a), 110°C (b) et 163°C (c)

### 3.5. Conclusions et perspectives

Lors de ce travail, nous avons d'abord pu montrer la validation du solveur existant dans CimLib<sup>®</sup> dans les cas classiques de traction et retour élastique compressible. Comparaison entre la simulation et l'expérience donne un bon point pour notre futur travail. Ces cas de simulation nous montrent la capacité de notre actuel solveur Navier-Stokes. Il démontre qu'avec un solveur dédié notamment au fluide, nous pouvons également résoudre les problèmes de l'interaction fluide-structure ou le comportement viscoélastique par une approche monolithique. Toutefois, l'utilisation d'un simple modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt amène une difficulté pour modéliser tout le cycle de chargement/déchargement ou relaxation. Les perspectives pour la suite est de développer au sein de la librairie CimLib<sup>®</sup>, un solveur générale permettant de modéliser un comportement viscoélastique générique et le couplage fluide-structure par une approche monolithique. Cela signifie d'enrichir le comportement du polymère par des comportements plus complexes comme le modèle de Zener. En outre, nous pourrions élargir l'application simuler un cas d'impact.

### REMERCIEMENTS

Ce travail s'inscrit dans le projet Rem3D Impact avec le soutien financier du consortium Rem3D, que nous remercions.

### REFERENCES

1. I. Babuška. *The finite element method with penalty*. Maths. Comp., 27,221-228 (1973).
2. O. Basset. *Simulation numérique d'écoulements multi-fluides sur grille de calcul*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris (2006).
3. F. Brezzi. *On the existence, uniqueness and approximation off saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*. RAIRO Modélisation Mathematical Analyzes Numerical, 8,129-151 (1974).
4. H.F. Brinson, L.C. Brinson. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*, An Introduction. Springer edition, 2008.
5. T. Coupez, "Stable-stabilized finite element for 3D forming calculation. CEMEF", internal report (1996).
6. T. Coupez and S. Marie. *From a direct solver to a parallel iterative solver in 3D forming simulation*. International Journal of Supercomputer and Applications, 11:205, 1997.
7. T. Coupez. *Réinitialisation convective et locale des fonctions Level Set pour le mouvement de surfaces et d'interfaces*. Journées Activités Universitaires de Mécanique, La Rochelle, France 2006.
8. E. Hachem, B. Rivaux, T. Kloczko, H. Digonnet, T. Coupez. *Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number*. Journal of Computational Physics, 2010. ISSN 0021-9991, DOI: 10.1016/j.jcp.2010.07.030.
9. A. Legay, J. Chessa, T. Belytschko. *An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based one level sets*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 2070-2087.
10. A. Paccini. *Développement d'un modèle éléments finis 3D appliqué à la simulation d'opérations chirurgicales des tissus mous*. Thèse de doctorat, Ecole National Supérieur des Mines de Paris, 2005.
11. J.A. Sethian, S. Osher. *Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*. Journal of Computational Physics, 1988, 79 :12-49.
12. L. Ville, L. Silva and T. Coupez. *Convected Level Set method for the numerical simulation of Fluid Buckling*. Int. J. Numer. Meth. Fluids 2000; 00:1-6.