



HAL
open science

Un modèle éléments finis général pour la prédiction des défauts de planéité en laminage des tôles fines

Sami Abdelkhalek, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry, Pierre Montmitonnet, Nicolas Legrand

► To cite this version:

Sami Abdelkhalek, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry, Pierre Montmitonnet, Nicolas Legrand. Un modèle éléments finis général pour la prédiction des défauts de planéité en laminage des tôles fines. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. hal-00592608

HAL Id: hal-00592608

<https://hal.science/hal-00592608>

Submitted on 3 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle éléments finis général pour la prédiction des défauts de planéité en laminage des tôles fines

S. Abdelkhalek¹, H. Zahrouni², M. Potier-Ferry², P. Montmitonnet³, N. Legrand¹

¹ArcelorMittal Research Maizières, R&D Industrial Operations, France, {sami.abdelkhalek,nicolas.legrand}@arcelormittal.com

²Lem3, CNRS UMR 7239, Université Paul Verlaine- Metz, France, {zahrouni,michel.potierferry}@univ-metz.fr

³CEMEF, Ecole des Mines de Paris-ParisTech, France. pierre.montmitonnet@mines-paristech.fr

Résumé — L'objectif du présent travail est de développer un modèle de laminage capable de prédire avec précision les défauts de planéité des tôles laminées. Ainsi, on a couplé itérativement un modèle éléments finis 3D de calcul de l'écrasement de la tôle dans l'emprise, un modèle semi-analytique de calcul de la déformation des cylindres de la cage et un modèle éléments finis de flambement de coques donnant les défauts de planéité. Le modèle de laminage obtenu prédit des champs de contraintes en bon accord avec les mesures expérimentales et est capable de simuler les défauts de planéité en laminage des tôles.

Mots clés — Laminage, Tôles, Défauts de planéité, Flambement, Post-flambement, Contraintes résiduelles, Coques, Méthode Asymptotique Numérique, Éléments finis.

1 Description du problème

Les défauts de planéité en laminage des tôles minces représentent des imperfections géométriques liées à des déplacements hors-plan (figure 1). En laminage à froid, ces défauts sont dus principalement à l'hétérogénéité de la déformation plastique dans l'emprise (réduction d'épaisseur de la tôle), engendrées par la déformation élastique et thermo-élastique des cylindres (flexion, aplatissement, dilatation thermique...). Cette hétérogénéité de la déformation plastique se traduit en aval de l'emprise par l'apparition des champs de contraintes résiduelles non uniformes, qui peuvent générer le flambement là où une composante principale est compressive (défauts de planéité). La déformation élastique de la cage est inévitable, difficile à maîtriser, le contrôle de la planéité est donc délicat.

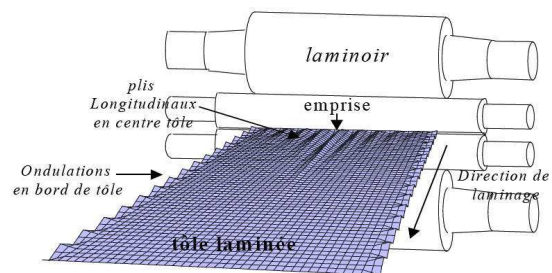


FIG. 1 - Défauts de planéité en laminage.

Une modélisation numérique du procédé de laminage est nécessaire pour apporter des éléments de compréhension des phénomènes qui participent à la création des défauts de planéité. Le but est d'identifier numériquement un réglage optimal du laminoir afin de les minimiser voire les éliminer. Pour ce faire, on a besoin de prendre en compte trois phénomènes couplés :

1. la déformation élastique et thermo-élastique de la cage,
2. la déformation élastique et visco-plastique de la tôle dans l'emprise,
3. le flambement sous contraintes résiduelles hors emprise, qui représente dans ce contexte les défauts de planéité.

Le couplage des phénomènes 1 et 2 définit l'emprise, endroit de génération de la principale cause des défauts : la déformation plastique hétérogène. Le flambement apparaît ainsi comme une conséquence de ce qui se passe dans l'emprise. Dans la logique d'une modélisation du laminage, le flambement se place dans une position de dépendance par rapport au couplage 1-2 (ou cédage). Cependant, rien n'interdit de penser que le flambement, qui redistribue complètement les contraintes en les écrétant dans les zones flambées, pourrait rétroagir sur les contraintes et déformations sous emprise, par un effet de conditions aux limites. Ceci évoque le couplage emprise/flambage (couplage 1-2 avec 3).

Des travaux antérieurs au nôtre ont permis de développer les modèles Tec3 [1,2] pour la cage et Lam3 [1,3] pour la tôle. Le couplage des deux modèles forme un logiciel nommé Lam3/Tec3 [2,3] qui possède un bon compromis précision/rapidité pour une modélisation éléments finis du procédé. Néanmoins, ce modèle présente une limitation pour les cas de laminage des tôles fines, susceptibles de flamber. La principale limite est le fait que les éléments hexaédriques à 8 noeuds utilisés pour le maillage de la tôle ne sont pas adaptés pour décrire le flambement : ils sont linéaires, alors même que pour des raisons de coût, on ne met qu'une ou deux mailles dans l'épaisseur [4].

Pour l'améliorer, on a intégré dans Lam3/Tec3 un modèle simple de flambement proposé par Counhaye [5], de manière à coupler les phénomènes 1, 2 et 3 cités précédemment [6-8]. Ce modèle simple consiste à détecter les endroits hors emprise de la tôle auxquels les contraintes dans le plan de la tôle sont assez compressives pour générer le flambement. Ces contraintes sont relaxées et ramenées à un seuil critique défini au préalable par l'utilisateur, en rajoutant un tenseur de déformation dans le plan de la tôle, équivalent à la déformation de flambement.

L'utilisation de ce modèle simplifié de flambement permet de redistribuer les contraintes, qui deviennent proches de la réalité, comme le montre la comparaison avec les mesures des contraintes internes hors emprise faites à l'aide de rouleaux de planéité [5-8]. Toutefois, ce modèle simplifié ne représente pas géométriquement les défauts, en forme et en amplitudes : ces derniers sont simplement localisés et identifiés par les valeurs non nulles des déformations équivalentes au flambement mentionnées plus haut.

Les modèles de flambement de coques plus complexes permettent une représentation géométrique plus ou moins précise de la planéité [4,6,7,9-17]. Nous avons développé un modèle éléments finis (EF) de flambement de coques sous contraintes internes [6,7,9], basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN) [18,19]. Ce modèle de coques se distingue de ses prédécesseurs principalement par :

- sa capacité de calcul de post- flambement,
- la prise en compte de toutes les composantes de contraintes résiduelles hors emprise.

En effet, dans les modèles existants de la littérature [4,10-17], seule la composante longitudinale σ_{xx} est prise en considération, en supposant qu'elle est la principale cause du flambement. Ce n'est pas réaliste, car les contraintes transversales et de cisaillement sont assez fortes dans la sortie immédiate de l'emprise, et peuvent influencer considérablement le mode de flambement de la tôle. De plus, ces modèles ne possèdent pas de calcul de post- flambement.

Dans la littérature [4,10-17], aucun des modèles de coques n'a été intégré dans un modèle de laminage, i.e. en tenant en compte de l'interaction, donc du couplage, emprise / flambement. Ils sont utilisés par chaînage avec un modèle de laminage sans flambement, en deux étapes :

- un premier calcul est effectué à l'aide d'un modèle de laminage, sans tenir compte du flambement ; il fournit des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise.
- Ces champs de contraintes résiduelles sont utilisés comme chargements dans un calcul de flambement de coques, qui donne la charge critique, le mode de flambement ainsi que l'état post-flambé de la tôle quand le modèle de coque est capable de le faire [6,7,9].

En couplant Lam3/Tec3 avec le modèle simplifié de flambement proposé par Counhaye [5] (Lam3/Tec3-Counhaye), les auteurs ont montré dans la référence [6] que le flambement influence très peu l'emprise dans certains cas, plus nettement dans d'autres. Un exemple de la première situation est le cas 1, forte réduction sur tôle très mince ; un exemple de la seconde est le cas 2, très faible réduction sur une tôle plus épaisse. Ces deux cas sont présentés en détail dans la référence [6]. L'approche découplée (par chaînage) n'est valable, a priori, que lorsque le flambement a peu ou pas d'effets sur l'emprise. En revanche, étant donné qu'on opte pour un modèle de laminage riche et complet, le couplage doit être réalisé entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambement de coques développé. Dans cet article, nous exposons la manière dont nous avons effectué ce couplage (et non plus un simple chaînage) pour construire un modèle de laminage général nommé Lam3/Tec3-MAN.

2 Construction du modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN

Le couplage entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambement de coques est construit à l'aide de trois modèles de base : Lam3, Tec3 et le modèle « MAN ». La déformation de la cage est calculée par Tec3 (3D), l'emprise par Lam3 (3D), et le modèle de flambement « MAN » (coque) décrit l'état de la tôle hors emprise. Le modèle obtenu a l'architecture décrite sur la figure 2-(a).

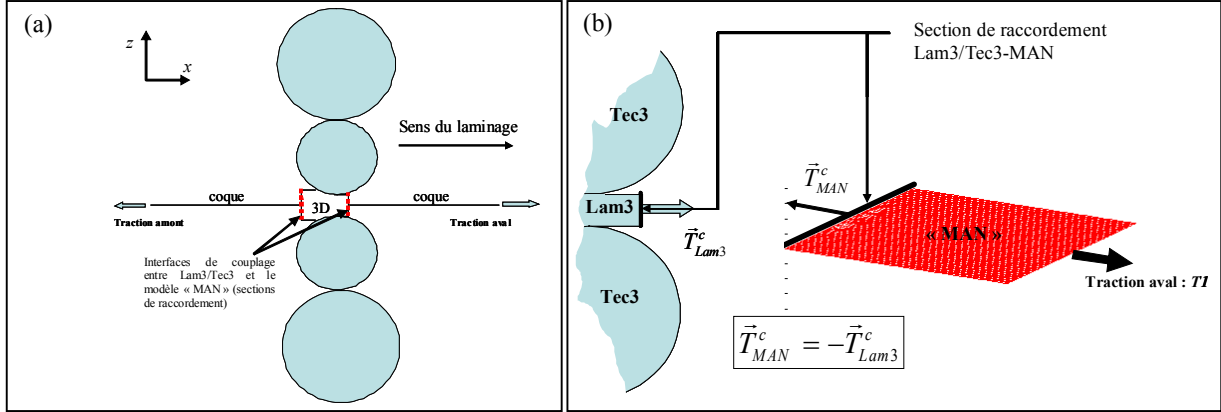


FIG. 2 – (a) Architecture du modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN ; (b) Couplage en contrainte entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambement « MAN ».

Lam3/Tec3-MAN est constitué de deux sortes de couplages : un couplage entre Lam3 et Tec3 (calcul d'emprise), et un autre entre l'ensemble Lam3/Tec3 et le modèle « MAN » pour décrire le couplage emprise/flambement. Le couplage Lam3/Tec3 a été déjà effectué auparavant par Hacquin et al. [1-3]. Le présent travail consiste donc à coupler en contraintes Lam3/Tec3 avec le modèle « MAN ». Contrairement à d'autres techniques de couplage ou méthodes hybrides [20], la compatibilité des champs n'est pas assurée ici dans une zone de raccordement 3D. On définit une interface de couplage (ou section de raccordement), montrée sur la figure 2-a en traits discontinus. Lam3/Tec3 perçoit la redistribution des contraintes causée par le flambement à travers cette interface et par l'intermédiaire du vecteur-contrainte \vec{T}_{MAN}^c . Ce vecteur contrainte, appliqué sur la facette qui représente la section de raccordement (cf. figure 2-b), est déduit du champ de contrainte redistribué après flambement par la relation suivante :

$$\vec{T}_{MAN}^c = \sigma_{MAN} \cdot \vec{n}_r \quad (1)$$

σ_{MAN} est le champ de contrainte redistribué par le flambement (calcul MAN) ;

\vec{n}_r est le vecteur normal à la section de couplage ($= -\vec{x}$).

Une fois \vec{T}_{MAN}^c calculé, il est ensuite transformé en \vec{T}_{Lam3}^c par la relation (2) et imposé en tant que condition aux limites pour un calcul Lam3/Tec3, dans lequel le maillage est tronqué hors emprise et limité par les sections de raccordement (cf. figure 2-b).

$$\vec{T}_{Lam3}^c = -\vec{T}_{MAN}^c \quad (2)$$

En d'autres termes, l'équilibre mécanique doit être respecté à l'interface, ce qui signifie aussi la continuité de la contrainte entre les deux modèles.

Le modèle Lam3/Tec3-MAN couplé est ainsi construit à l'aide d'un algorithme suivant un schéma itératif entre un calcul Lam3/Tec3 et un calcul « MAN », détaillé dans [6].

3 Modélisation des défauts de planéité à l'aide de l'approche couplée Lam3/Tec3-MAN

À titre d'application, nous avons considéré les « cas 1 » et « cas 2 ». Rappelons que le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye [6] a montré que ces deux cas font partie de deux configurations différentes : dans l'un, l'emprise n'est pas influencée par le flambement (« cas 1 ») ; dans l'autre, la prise en compte du flambement a significativement changé les résultats, y compris dans l'emprise (« cas 2 »). Les résultats ont été détaillés dans [6].

L'utilisation de Lam3/Tec3-MAN couplé cherche à répondre à deux types de questions :

- les deux approches couplées Lam3/Tec3-Counhaye et Lam3/Tec3-MAN aboutissent-elles aux mêmes conclusions sur l'interaction flambement / emprise ?
- comment les résultats de l'approche couplée Lam3/Tec3-MAN se comparent-ils aux mesures expérimentales, et que révèle-t-elle sur les défauts de planéités manifestes ?

3.1 Interaction entre l'emprise et le flambement

Pour le « cas 1 », la figure 3 montre les évolutions dans l'emprise de la contrainte longitudinale σ_{xx} le long de deux lignes de courant, sur lesquelles sont recalées aussi des lignes de nœuds et d'éléments [3] : n°16, à 2 mm du bord, et n°19, sur le bord. On constate que le flambement est sans influence sur l'emprise, puisqu'à cet endroit Lam3/Tec3-MAN (avec flambement) et Lam3/Tec3-standard (sans flambement) donnent les mêmes contraintes σ_{xx} , ainsi que les autres variables d'état. De même pour le « cas 2 », pour lequel la figure 4 donne l'évolution de la contrainte σ_{xx} ; le long du bord de la tôle, et contrairement au centre, cette contrainte, comme d'autres variables, est significativement modifiée par le flambement. Celui-ci a donc des effets significatifs sur l'emprise dans ce « cas 2 », plus spécialement près de la rive et dans la partie finale de l'emprise (après le point neutre identifié par le pic de contrainte). Le cas 2 a comme particularité sa très faible réduction, mais nous ne pouvons affirmer que ce résultat est caractéristique des très faibles réductions (dernière cage de train tandem à froid, skin-pass...).

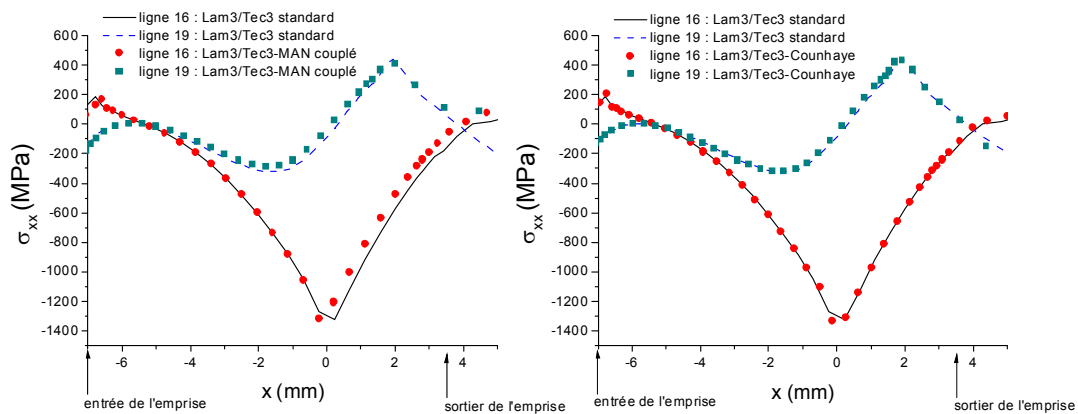


FIG. 3 – Comparaison dans l'emprise entre Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-Counhaye pour le « cas 1 ».

3.2 Effets du flambement sur l'emprise : Lam3/Tec3-MAN ; Lam3/Tec3-Counhaye

Comparons maintenant les résultats des deux couplages Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye. Pour le « cas 1 », les deux modèles s'accordent sur le fait que le flambement n'interagit pas avec l'emprise ; leurs résultats dans l'emprise coïncident d'ailleurs avec ceux de Lam3/Tec3-standard (cf. figure 3). Fait plus remarquable, même pour le « cas 2 » où on a détecté une interaction du flambement avec l'emprise, Lam3/Tec3-MAN et Lam3/Tec3-Counhaye sont en accord (cf. figure 4).

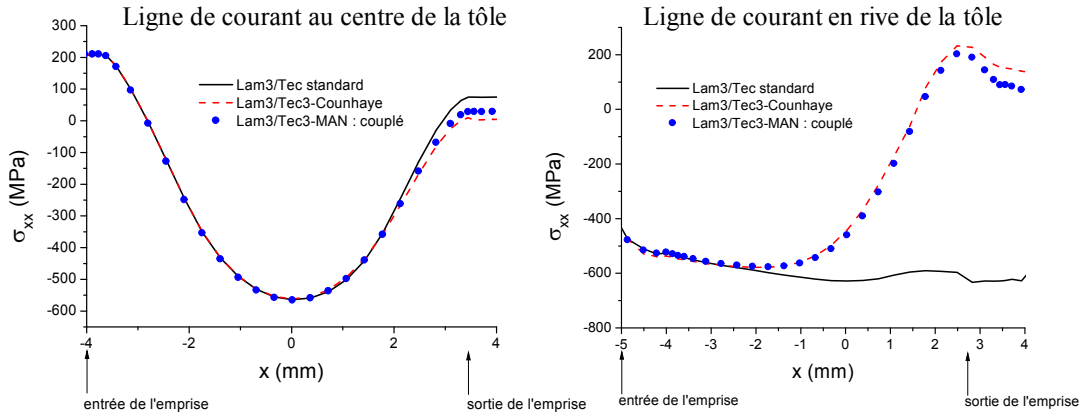


FIG. 4. Comparaison dans l'emprise entre Lam3/Tec3 standard, Lam3/Tec3-MAN couplé et Lam3/Tec3-Counhaye pour le « cas 2 ».

3.3 Comparaison avec les mesures expérimentales et les défauts de planéité détectés

Les figures 5 et 6 reportent les profils transversaux des contraintes σ_{xx} respectivement pour le « cas 1 » et le « cas 2 » à mi-intercage aval, c'est-à-dire là où les mesurerait un rouleau de planéité. Ces profils montrent que les contraintes hors emprise sont relaxées et s'approchent des mesures expérimentales quand le flambement est pris en compte. Ici, on voit que le modèle à couplage itératif Lam3/Tec3-MAN couplé donne des résultats plus proches de l'expérience (figure 5-a), sans toutefois faire aussi bien que le modèle fortement couplé Lam3/Tec3-Counhaye. Ce dernier reste le plus proche des profils mesurés dans les deux cas, mais plus nettement pour le « cas 2 » (cf. figures 5 et 6).

Passons donc aux défauts de planéité, puisque c'est là que se manifeste le mieux l'avantage de Lam3/Tec3-MAN. Dans les figures 7 et 8 sont portés d'une part les déplacements hors plan (défauts de planéité), pendant le laminage, sous tension, ce qui tend à effacer les défauts « latents » ; et les défauts observés après relâchement de la tension de bande, plus représentatifs de la qualité finale du produit. On voit sur la figure 7 que sous traction, la tôle dans le « cas 1 » est presque plate, à part des plis locaux en sortie d'emprise. En analysant la distribution du défaut latent $\sigma_{xx} - P$ (P est la tension moyenne appliquée) de la figure 8-a, on peut prédire en même temps un défaut en centre long et en bords longs, puisqu'à ces deux endroits, la grandeur $\sigma_{xx} - P$ est négative. Effectivement, après le relâchement de la traction P , le modèle Lam3/Tec3-MAN couplé montre simultanément :

- un défaut de bords longs, concernant une faible largeur (de 30 à 40 mm en rive), et de courte longueur d'onde, 150 mm, mais d'amplitude significative (2 mm) ; ce défaut n'apparaît qu'à une certaine distance (180 mm environ) après l'emprise ;
- un centre long démarrant juste en sortie d'emprise, de longueur d'onde 500 mm et d'amplitude 4 mm.

Quant au « cas 2 » (très faible réduction), au cours du laminage, la tôle ne présente pas de défauts apparents, sauf les plis longitudinaux en sortie d'emprise, de très faible amplitude comme le montre la figure 9. Sur cette même figure, on remarque qu'après relâchement de la traction P , cette tôle flambe selon un mode global (cintre). Contrairement aux défauts locaux obtenus dans le « cas 1 », ce type de défaut ne représente pas un grand problème de planéité, puisqu'il peut être facilement éliminé par l'opération de planage. D'ailleurs, sur la figure 10, on voit bien que pour ce cas, les défauts de planéité latents ($\sigma_{xx} - P$) ne sont pas locaux, ce qui explique que l'on n'ait pas de défauts manifestes locaux et non développables après le relâchement de la tôle.

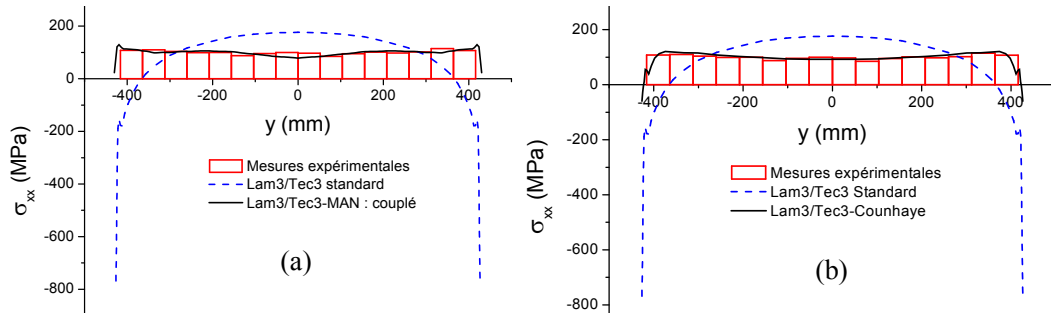


FIG. 5. Modification des profils transversaux de σ_{xx} à mi-intercage pour le « cas 1 », lorsque le flambement est modélisé : (a) Lam3/Tec3-MAN couplé ; (b) Lam3/Tec3-Counhaye.

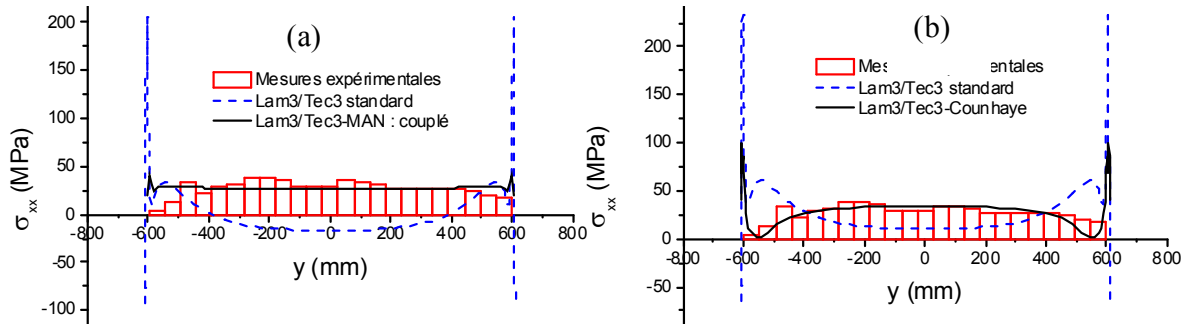


FIG. 6. Modification des profils transversaux de σ_{xx} à mi-intercage pour le « cas 2 », lorsque le flambement est modélisé : (a) Lam3/Tec3-MAN couplé ; (b) Lam3/Tec3-Counhaye.

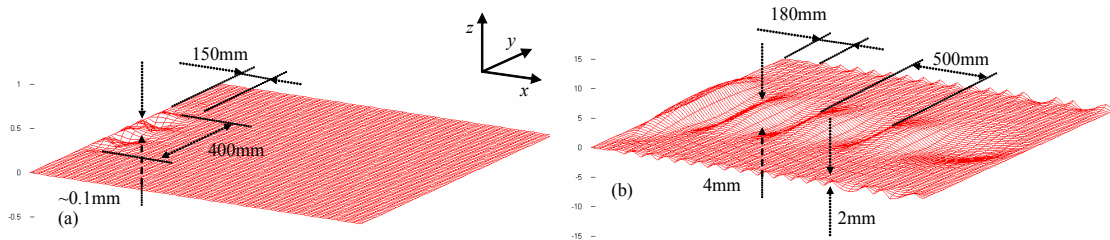


FIG. 7. Défauts de planéité de la tôle laminée, « cas1 », donnés par le modèle couplé Lam3/Tec3-MAN : (a) au cours du laminage, (b) après le relâchement de la traction.

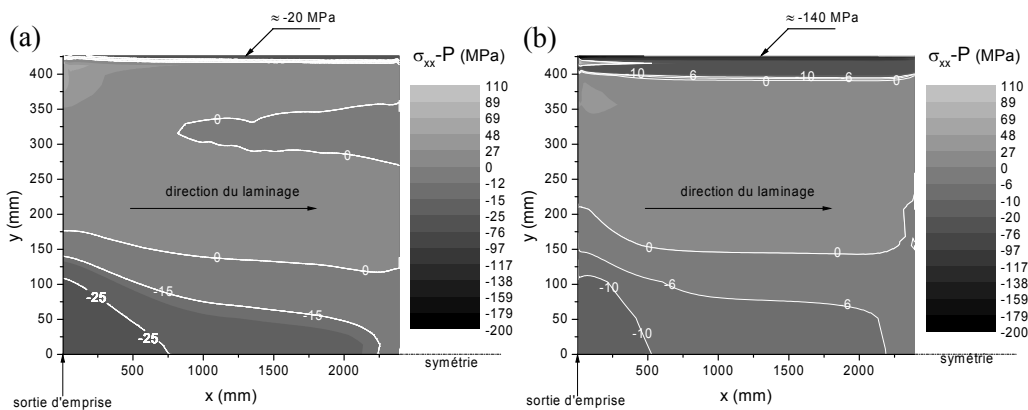


FIG. 8. Défauts latents ($\sigma_{xx}-P$) donnés par Lam3/Tec3-MAN couplé (a) et Lam3/Tec3-Counhaye (b) pour le « cas 1 ».

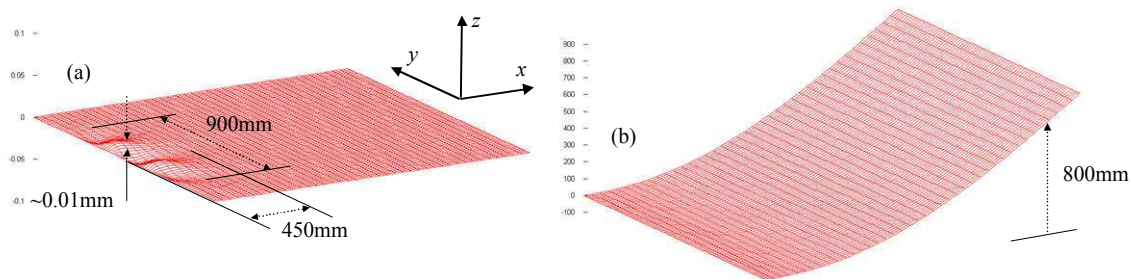


FIG. 9. Défauts de planéité en laminage, « cas 2 », donnés par le modèle couplé Lam3/Tec3-MAN : (a) au cours du laminage, (b) après le relâchement de la traction.

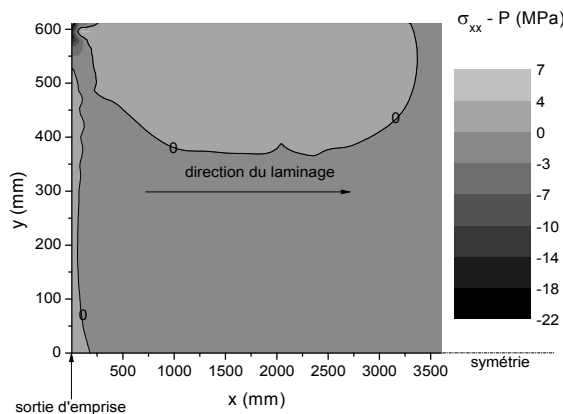


FIG. 10. Défaut latent ($\sigma_{xx}-P$) donnés par Lam3/Tec3-MAN couplé pour le « cas 2 ».

4 Conclusions

Le travail présente un couplage itératif entre Lam3/Tec3 et le modèle de flambement « MAN ». Une fois réalisé, le modèle de laminage couplé Lam3/Tec3-MAN a été utilisé pour des applications diverses. Nous en avons détaillé ici deux exemples représentatifs, qui font partie de deux familles de cas différents : le « cas 1 » et le « cas 2 » représentent respectivement les situations sans et avec interaction emprise/ flambement.

En utilisant le modèle Lam3/Tec3-MAN qui prend en compte le couplage emprise/ flambement pour les deux cas mentionnés, on a pu tirer les conclusions suivantes :

- le degré de rétroaction du flambement sur l'emprise (état de contrainte dans l'emprise, déformation de la cage) est trouvé identique par Lam3/Tec3-Counhaye et par Lam3/Tec3-MAN, c'est-à-dire par les deux modèles couplés. Ce degré de couplage détermine les cas où le calcul de laminage lui-même est faussé ou non par l'absence de prise en compte du flambement en post-emprise.
- Le flambement redistribue les contraintes hors emprise ; de ce fait, la prise en compte du flambement permet de retrouver un bon accord avec les mesures expérimentales des rouleaux de planéité. Mais cette confrontation positive porte sur une zone loin après l'emprise, et nous souhaitons dans l'avenir pouvoir mesurer ou observer au plus près de cette dernière pour y confronter nos prédictions sur la *naissance* des défauts.
- L'accord reste cependant un peu meilleur avec le modèle trop simple de flambement, mais fortement couplé (Lam3/Tec3-Counhaye) qu'avec le modèle de flambement rigoureux, mais qui n'est qu'itérativement couplé au modèle de laminage. La généralité de ce propos reste à vérifier. Une action en cours consiste à renforcer et rendre plus rigoureux la technique de couplage emprise / post-emprise, c'est-à-dire éléments 3D – éléments coques.
- Lam3/Tec3-MAN quantifie les défauts de planéité et caractérise leurs géométries. Des confrontations avec l'expérience sur ce plan-là restent à organiser.

Remerciement :

Les auteurs remercient ArcelorMittal pour son support financier et pour avoir autorisé la publication de ce travail.

Références

- [1] A. Haquin. *Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage*. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 1996.
- [2] A. Haquin, P. Montmitonnet, J. P. Guillerault. *Experimental validation of a rolling stand elastic deformation model*, J. Mat. Proc. Techn., Vol. 45, 99-206, 1994.
- [3] A. Haquin, P. Montmitonnet, P. Guillerault. *A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation*, J. Mat. Proc. Techn., Vol. 60, 109-116, 1996.
- [4] H. Marchand. *Modélisation de la planéité en sortie de laminage des produits plats*. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 2000.
- [5] C. Counhaye. *Modélisation et contrôle industriel de la géométrie des aciers laminés à froid*. Thèse, Université de Liège, 2000.
- [6] S. Abdelkhalek, *Un exemple de flambage sous contraintes internes : Étude des défauts de planéité en laminage à froid des tôles minces (Étude numérique et comparaison avec l'expérience)*. Thèse, Ecole des Mines de Paris, 2010.
- [7] S. Abdelkhalek, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, P. Montmitonnet, N. Legrand, P. Buessler. *Coupled and uncoupled approaches for thin cold rolled strip buckling prediction*. Int. ESAFORM Conf. on Mat. For., April 27-29, Twente, Netherlands, 2009.
- [8] S. Abdelkhalek, P. Montmitonnet, M. Potier-Ferry, H. Zahrouni, N. Legrand, P. Buessler. *Strip flatness modeling including buckling phenomena during cold rolling*. Ironm. Steelm., Vol. 37, 290-297, 2009.
- [9] S. Abdelkhalek, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, P. Montmitonnet, N. Legrand, P. Buessler. *Modélisation numérique du flambage des plaques minces et applications au laminage*. mécanique & industrie, Vol. 10, 305-309, 2009.
- [10] F.D. Fischer, N. Friedl, A. Noe, F.G. Rammerstorfer. *A Study on the Buckling Behaviour of Strips and Plates with Residual Stresses*. Steel Res. Int., Vol. 76, 327-335, 2005.
- [11] F. D. Fisher, F. G. Rammerstorfer, N. Friedl, W. Wisser. *Buckling phenomena related to rolling and leveling of sheet metal*. Int. J. Mech. Sci., Vol. 42, 1887-1910, 2000.
- [12] F. G. Rammerstorfer, F. D. Fisher, N. Friedl. *Buckling of free infinite strips under residual stress and global tension*. ASME J. Appl. Mech., Vol 68, 399-404, 2001.
- [13] C.D. Coman. *Edge-wave buckling of rolled elastic strips: Asymptotic results*. Acta Mech., Vol. 211, 101-113, 2010.
- [14] C. D. Coman, A. P. Bassom. *An asymptotic description of the elastic instability of twisted thin elastic plates*. Acta Mech., Vol. 200, 59-68, 2008.
- [15] C.D. Coman. *The asymptotic limit of an eigenvalue problem related to the buckling of rolled elastic strips*. Mech. Res. Comm., Vol. 36, 826-832, 2009.
- [16] A. Bush, R. Nicholls, J. Tunstall. *Stress levels for elastic buckling of rolled strip and plate*. Ironm. Steelm., Vol. 28, 481-484, 2001.
- [17] N. Yukawa, T. Ishikawa, Y. Tozawa. *Numerical analysis of the shape of rolled strip*. In Proc. NUMIFORM Conference, Gothenburg, Sweden, 249-254, 1986.
- [18] H. Zahrouni, B. Cochelin, M. Potier-Ferry. *Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engg, Vol. 175, 71-85, 1999.
- [19] E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi. *Bifurcation Points and Bifurcated Branches by an Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants*. Int. J. Numer. Meth. Engg, Vol. 60, 1987-2012, 2004.
- [20] H. Ben Dhia, O. Jamond. *On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng, Vol. 199, 1403-1414, 2010.