



**HAL**  
open science

## Etude de la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor en présence de défauts et d'incertitudes.

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon

### ► To cite this version:

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon. Etude de la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor en présence de défauts et d'incertitudes.. 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00589906

**HAL Id: hal-00589906**

**<https://hal.science/hal-00589906>**

Submitted on 3 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude de la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor en présence de défauts et d'incertitudes

J. Didier<sup>1</sup>, J.-J. Sinou<sup>1</sup>, B. Faverjon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LTDS, UMR-CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, France, {jerome.didier,jean-jacques.sinou}@ec-lyon.fr

<sup>2</sup> LaMCoS, UMR-CNRS 5259, INSA Lyon, France, beatrice.faverjon@insa-lyon.fr

---

## Résumé —

Dans les systèmes rotor de nombreux défauts peuvent venir complexifier la réponse dynamique et faire apparaître un comportement non-linéaire non négligeable lors d'une phase de dimensionnement. De plus l'identification précise des paramètres de ces défauts peut s'avérer difficile, ce qui implique de les considérer comme pouvant être aléatoires. Afin de résoudre le problème dynamique non-linéaire avec prise en compte d'incertitudes, nous proposons donc de combiner une technique de Balance Harmonique (HBM) avec une méthode de chaos polynômial (PCE).

La méthode HBM consiste à exprimer la réponse non-linéaire en série de Fourier [1]. Dans le cadre de l'étude, elle permet la prise en compte à la fois des excitations harmoniques, super-harmoniques et des non-linéarités introduites par les différents défauts.

Pour modéliser le problème dans le domaine stochastique on utilise la méthode du chaos polynômial [2]. Cette dernière consiste à exprimer la réponse dynamique sur une base de polynômes d'Hermite. Dans cette étude les incertitudes portent tout aussi bien sur les termes de raideur, d'amortissement, gyroscopique et de masse que sur les termes non-linéaires.

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthodologie mise en place, les résultats sont comparés à ceux obtenus par des simulations de Monte Carlo (MCS), réalisés pour un système rotor présentant des défauts tels qu'un balourd sur un disque du système, une dissymétrie de la section de l'arbre, un désalignement parallèle ou angulaire entre deux arbres liés par un accouplement et enfin une déformation initiale de l'arbre ("bowed rotor").

**Mots clés** — incertitudes, défauts, dissymétrie, désalignement, stochastique, rotor, chaos polynômial

---

## 1 Introduction

Généralement un système rotor peut être soumis à de nombreux défauts [3]. Dans cette étude on a choisi de s'intéresser aux différents défauts suivants :

- Le balourd est l'un des défauts les plus courants dans les systèmes tournants. Ce phénomène est lié au fait que le centre de masse d'un disque ou d'un élément de l'arbre n'est pas aligné avec l'axe de rotation. Celui-ci se modélise par une masse excentrée générant un effort tournant.
- Un autre défaut couramment observé est le désalignement entre deux arbres du système rotor. Pour ce défaut on distinguera le désalignement parallèle et le désalignement angulaire. De plus différentes modélisations existent selon que le type d'accouplement entre les arbres soit flexible [4, 5] ou bien rigide [6, 7, 8].
- Une dissymétrie de l'arbre est généralement liée à la présence d'une fissure ou bien liée à la géométrie de la section. De nombreuses études ont été réalisées afin de prendre en compte la présence de fissures [9, 10]. On considérera dans ce papier uniquement le cas d'une section asymétrique de l'arbre. Pour ce cas, des modélisations ont été proposés en repère tournant par Oncescu [11] et en repère fixe par Lalanne et Ferraris [12].
- Enfin on s'intéressera au cas d'un arbre présentant une déformation initiale ("bowed rotor"). Cette déformation initiale pouvant être liée aux effets thermiques ou bien liée aux effets de la gravité lors de l'arrêt de la machine [13, 14].

Finalement tous ces défauts peuvent avoir un effet néfaste sur le comportement de la machine et par conséquent peuvent réduire nettement la durée de vie de celle-ci. De plus l'identification précise

des différents paramètres de ces défauts peut s'avérer difficilement. Par conséquent ces paramètres sont généralement mal connus et peuvent donc être considérés comme aléatoires.

L'objectif de ce papier est donc de proposer une méthodologie permettant de quantifier les effets de ces défauts aléatoires sur la réponse dynamique non-linéaire du système tournant. Dans une première partie le modèle de rotor utilisé sera brièvement décrit, ainsi que les modèles des différents défauts étudiés ici. Le couplage d'une méthode de Balance Harmonique avec une méthode de Chaos Polynomial sera détaillé dans une seconde partie. Puis le développement des quantités aléatoires pour chaque modèle de défauts sera présenté. Pour finir l'efficacité de la méthode sera démontrée au travers de simulations numériques.

## 2 Système rotor

### 2.1 Mise en équation

Le système rotor considéré est présenté dans la Figure 1. Il est constitué d'un arbre et de deux disques. L'arbre est discrétisé en 10 éléments finis poutres de type Euler avec 4 degrés de liberté à chaque noeud, avec une section asymétrique sur les éléments 3, 4 et 5 et une section circulaire sur les autres éléments. Le système ainsi constitué est supporté à ses extrémités par deux roulements.

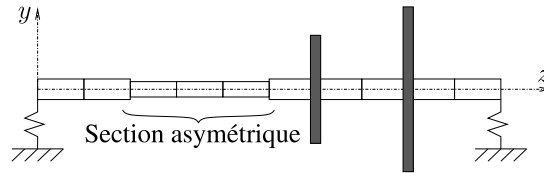


FIG. 1: Système rotor

Après assemblage des éléments de l'arbre, des disques et des paliers, l'équation de mouvement du système est donnée par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_b)\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{G}$  les matrices de masse et gyroscopique,  $\mathbf{K}_s$  et  $\mathbf{K}_b$  respectivement les matrices de raideur de l'arbre et des paliers.  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement de l'arbre.  $\mathbf{f}$  correspond aux efforts appliqués sur le système incluant les effets de la gravité, le balourd et les efforts générés par les défauts.  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{x}$  sont l'accélération, la vitesse et le déplacement des degrés de liberté du rotor.  $\omega$  la vitesse de rotation de l'arbre.

### 2.2 Modélisation des défauts

#### 2.2.1 Balourd

Dans cette étude on considère un défaut d'équilibrage sur les disques. Ce défaut peut alors se modéliser comme l'ajout sur le disque d'une masse  $m_e$  excentrée d'une distance  $d_e$  par rapport à l'axe de rotation. Par conséquent cette masse génère un effort tournant définit, pour les degrés de liberté du disque  $[v \ w \ \theta \ \psi]^T$ , par

$$\mathbf{f}^d = [m_e d_e \omega^2 \cos(\omega t + \psi_u) \quad m_e d_e \omega^2 \sin(\omega t + \psi_u) \quad 0 \quad 0]^T \quad (2)$$

avec  $\psi_u$  la position angulaire initiale autour de l'axe z.

#### 2.2.2 Dissymétrie

On considère ici une dissymétrie de section au niveau d'un élément de l'arbre. La géométrie retenue est une géométrie circulaire pour laquelle on ajoute deux méplats de part et d'autre de l'axe de l'arbre. La profondeur de chaque méplat étant noté  $h$ . Par conséquent cette section possède des moments d'inertie principaux différents dans le repère tournant que l'on notera  $I_X$  et  $I_X$ . En utilisant les développements

proposés par Oncescu dans [11], on montre que pour un élément dissymétrique les matrices élémentaires de masse, de raideur et gyroscopique peuvent s'exprimer dans le repère fixe sous la forme

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}\mathbf{t}_0^e + \mathbf{M}\mathbf{r}_0^e + \mathbf{M}_c^e \cos(2\omega t + 2\psi_a) + \mathbf{M}_s^e \sin(2\omega t + 2\psi_a) \quad (3)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_c^e \cos(2\omega t + 2\psi_a) + \mathbf{K}_s^e \sin(2\omega t + 2\psi_a) \quad (4)$$

$$\mathbf{G}^e = \mathbf{G}_0^e \quad (5)$$

Les expressions de  $\mathbf{M}\mathbf{t}_0^e$ ,  $\mathbf{M}\mathbf{r}_0^e$ ,  $\mathbf{M}_c^e$ ,  $\mathbf{M}_s^e$ ,  $\mathbf{K}_0^e$ ,  $\mathbf{K}_c^e$ ,  $\mathbf{K}_s^e$  et  $\mathbf{G}_0^e$  peuvent être aisément calculées à partir des expressions données dans [11].

### 2.2.3 Arbre initialement déformé

La modélisation retenue ici consiste à exprimer l'équation du mouvement du système dans le repère tournant

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_r \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{K}_r (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_{0r}) = \mathbf{f}_r \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{D}_r \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{x}_r = \mathbf{f}_r + \mathbf{K}_r \mathbf{x}_{0r} \quad (7)$$

où  $\mathbf{x}_{0r}$  est la déformation initiale. Cette équation fait apparaitre un terme d'effort lié à la présence de la déformation initiale. Par conséquent après passage du repère tournant vers le repère fixe, cet effort peut se mettre sous la forme d'un effort tournant que l'on notera

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{f}_c^b \cos(\omega t) + \mathbf{f}_s^b \sin(\omega t) \quad (8)$$

### 2.2.4 Désalignement parallèle

Dans cette partie, la modélisation proposée par Lees dans [8] est utilisée. Le modèle d'accouplement entre deux axes considéré ici est constitué de deux disques reliés entre eux par  $N = 3$  liaisons boulonnées. Pour le premier élément d'accouplement ces liaisons sont réparties sur un cercle de rayon  $r$ , tandis que pour le deuxième élément ces liaisons sont réparties sur un cercle de rayon  $r$  décalé d'une longueur  $\delta_p$  par rapport à l'axe de rotation. On considère que les deux arbres tournent à la même vitesse de rotation.

Les éléments de liaison sont sollicités principalement en cisaillement. Après calcul de l'énergie de déformation dans le système d'accouplement ainsi considéré, on montre que ce système peut se modéliser comme un élément de raideur  $\mathbf{K}^{m_1}$  et un effort  $\mathbf{f}^{m_1}$  agissant au niveau du degré de liberté  $[v_c \ w_c \ \theta_c \ \psi_c]^T$  situé à l'extrémité de l'arbre :

$$\mathbf{K}^{m_1} = Nk_b \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{m_1} = Nk_b \delta_p [\sin(\omega t) \quad 1 - \cos(\omega t) \quad 0 \quad 0]^T \quad (9)$$

avec  $k_b$  la raideur en cisaillement des éléments de liaisons.

### 2.2.5 Désalignement angulaire

On considère toujours un élément d'accouplement composé de deux disques et trois éléments de liaison. Les axes des deux disques étant désalignés angulairement d'un angle  $\alpha_m$  autour de l'axe  $x$ . Les éléments de liaison sont donc sollicités en traction, et possèdent une raideur  $k$  (éléments 1 et 2) ou une raideur  $k + k'$  (élément 3). Après calcul de l'énergie de déformation, ce défaut se modélise avec une raideur paramétrique  $\mathbf{K}^{m_2}$  et un effort  $\mathbf{f}^{m_2}$  :

$$\mathbf{K}^{m_2} = \frac{1}{2}(3k + k')r^2 \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}k'r^2 \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ & & \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{f}^{m_2} = -\frac{1}{2}\alpha_m r^2 [0 \quad 0 \quad 3k + k' + k' \cos(2\omega t) \quad k' \sin(2\omega t)]^T \quad (11)$$

## 2.3 Expression finale

Finalement après assemblage des matrices des différents éléments (arbre, disques, paliers et accouplement), l'équation de mouvement du système complet peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (12)$$

avec

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_c \cos(2\omega t) + \mathbf{M}_s \sin(2\omega t) \quad (13)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_c \cos(2\omega t) + \mathbf{K}_s \sin(2\omega t) \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C} + \omega \mathbf{G} \quad (15)$$

avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{D}$  les matrices globales de masse, de raideur et d'amortissement construites par assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{M}^e$ ,  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{G}^e$  et des matrices de raideur des défauts  $\mathbf{K}^{m1}$  et  $\mathbf{K}^{m2}$ . L'effort  $\mathbf{f}$  est déterminé à partir des efforts liés aux défauts ( $\mathbf{f}^d$ ,  $\mathbf{f}^b$ ,  $\mathbf{f}^{m1}$ ,  $\mathbf{f}^{m2}$ ) et des efforts dûs à la gravité. Il est à noter que l'amortissement utilisé dans cette étude est un amortissement de Rayleigh de la forme

$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{K}_0 + \beta_d \mathbf{M}_0 \quad (16)$$

avec  $\alpha_d$  et  $\beta_d$  les coefficients d'amortissement.

## 3 Technique de Balance Harmonique couplée au Chaos Polynomial

### 3.1 Système déterministe

De part la présence de défauts, le système rotor est soumis à des excitations périodiques. Par conséquent la réponse dynamique  $\mathbf{x}(t)$  ainsi que l'excitation  $\mathbf{f}(t)$  peuvent être exprimées comme des séries de Fourier d'ordre  $m$  [1] :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=0}^m (\mathbf{A}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{B}_n \sin(n\omega t)), \quad \mathbf{f}(t) = \sum_{n=0}^m (\mathbf{S}_n \cos(n\omega t) + \mathbf{T}_n \sin(n\omega t)) \quad (17)$$

En substituant les expressions précédentes dans l'équation de mouvement du système complet, l'expression ainsi obtenue peut être mise sous la forme d'un système linéaire de dimension  $(2m+1)n_{ddl}$  avec  $n_{ddl}$  le nombre de degrés de liberté :

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{f} \quad (18)$$

avec  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{f}$  définis par

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \quad (19)$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{A}_0 \quad \mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_m \quad \mathbf{B}_m]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{S}_0 \quad \mathbf{S}_1 \quad \mathbf{T}_1 \quad \dots \quad \mathbf{S}_m \quad \mathbf{T}_m]^T \quad (21)$$

où  $\mathbf{I}_1$  correspond à la réécriture des termes constants ( $\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0\mathbf{x} = \mathbf{f}$ ) sous forme d'un système linéaire.  $\mathbf{I}_2$  correspond aux termes paramétriques en raideur ( $[\mathbf{K}_c \cos(2\omega t) + \mathbf{K}_s \sin(2\omega t)]\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ).  $\mathbf{I}_3$  correspond aux termes paramétriques en masse ( $[\mathbf{M}_c \cos(2\omega t) + \mathbf{M}_s \sin(2\omega t)]\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ).

### 3.2 Modèle stochastique

Dans un problème de dynamique de rotor, des incertitudes sur la réponse dynamique peuvent apparaître du fait de la précision de fabrication. Par conséquent les paramètres mécaniques tels que la masse, la raideur, l'amortissement ou la géométrie du système peuvent s'avérer incertains. De même les efforts appliqués au système peuvent aussi être considérés comme étant aléatoires du fait de la difficulté d'identification des paramètres des défauts. C'est pourquoi dans cette partie on considère les quantités  $\tilde{\mathbf{L}}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  et

$\tilde{\mathbf{X}}$  étant aléatoires. Par conséquent en utilisant la notation  $\tau$  pour indiquer le caractère stochastique d'une variable, l'équation (18) peut se mettre sous la forme

$$\tilde{\mathbf{L}}(\tau)\tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \tilde{\mathbf{f}}(\tau) \quad (22)$$

où  $\tilde{\mathbf{L}}(\tau)$  est déterminé à partir des quantités aléatoires  $\tilde{\mathbf{M}}(\tau)$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}(\tau)$  et  $\tilde{\mathbf{K}}(\tau)$  mais aussi à partir de l'équation

$$\tilde{\mathbf{L}}(\tau) = \tilde{\mathbf{I}}_1(\tau) + \tilde{\mathbf{I}}_2(\tau) + \tilde{\mathbf{I}}_3(\tau) \quad (23)$$

### 3.3 Incertitudes sur les défauts

En appliquant un développement de Karhunen-Loeve avec une formulation de type Galerkin [2] sur les quantités physiques ou géométriques aléatoires considérées, chacune de ses quantités peut être écrite sous la forme

$$\tilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} + \sum_{l=1}^L \xi_l \mathbf{a}_l \quad (24)$$

où  $\{\xi_1, \dots, \xi_L\}$  est un ensemble de variables aléatoires orthonormées,  $\tilde{\mathbf{a}}$  est la quantité aléatoire considérée,  $\bar{\mathbf{a}}$  sa moyenne et  $\mathbf{a}_l$  la  $l$ -ième composante du développement de Karhunen-Loeve.

Les développements ainsi obtenus sont injectés dans les définitions des matrices de masse, de raideur et d'amortissement ainsi que dans les termes d'effort. Après réarrangement les expressions ainsi obtenues peuvent être réécrites sur la base du chaos sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{K}}(\tau) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{K}}_i \Psi_i, \quad \tilde{\mathbf{M}}(\tau) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{M}}_i \Psi_i, \quad \tilde{\mathbf{D}}(\tau) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{D}}_i \Psi_i, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{i=0}^n \tilde{\mathbf{f}}_i \Psi_i \quad (25)$$

Dans cette étude on considèrera comme étant aléatoires les paramètres tel que la masse du balourd, la position angulaire, le module d'Young de l'arbre, etc. Pour chaque paramètre une modélisation à l'aide de variables aléatoires gaussiennes a été proposée. Les différents paramètres aléatoires retenus ainsi que les modèles associés sont présentés dans le tableau suivant où la notation  $\bar{a}$  désigne la moyenne de la

Paramètre	Modèle
masse du balourd	$\tilde{m}_e(\tau) = \bar{m}_e(1 + \delta_m \xi_1)$
position angulaire du balourd	$\tilde{\Psi}_u(\tau) = \sigma_{\Psi_u} \xi_2$
module d'Young	$\tilde{E}(\tau) = \bar{E}(1 + \delta_E \xi_3)$
profondeur de la dissymétrie	$\tilde{h}(\tau) = \bar{h}(1 + \delta_h \xi_4)$
amplitude de la déformation initiale	$\tilde{R}_0(\tau) = \sigma_R \xi_5$
désalignement parallèle	$\tilde{\delta}_p(\tau) = \sigma_{\delta_p} \xi_6$
désalignement angulaire	$\tilde{\alpha}_m(\tau) = \sigma_{\alpha_m} \xi_7$

TAB. 1: Modélisation stochastique des paramètres

quantité  $a$ ,  $\delta_a$  son coefficient de variation et  $\sigma_a$  son écart type.

### 3.4 Méthode du Chaos Polynomial

Dans cette partie on choisit de développer la réponse dynamique aléatoire  $\tilde{\mathbf{X}}(\tau)$  sur une base du Chaos Polynomial sous la forme

$$\tilde{\mathbf{X}}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (26)$$

avec  $\underline{\xi} = \{\xi_r\}$  [15, 2],  $\Psi_j(\underline{\xi}(\tau))$  les polynômes d'Hermite multidimensionnels et  $\mathbf{X}_j$  le  $j$ -ième vecteur déterministe inconnu associé au polynôme  $\Psi_j(\underline{\xi}(\tau))$ . Par conséquent le système à résoudre peut être réécrit sous la forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{L}}(\tau) \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) = \tilde{\mathbf{f}}(\tau) \quad (27)$$

De plus en utilisant les équations (25) dans la définition des quantités  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{f}$ , on obtient alors les expressions des quantités  $\tilde{\mathbf{L}}(\tau)$  et  $\tilde{\mathbf{f}}(\tau)$  sur la base du chaos

$$\tilde{\mathbf{L}}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}_i \Psi_i(\underline{\xi}(\tau)), \quad \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{f}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (28)$$

Finalement le système à résoudre est défini par

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}_i \Psi_i(\underline{\xi}(\tau)) \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{f}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (29)$$

qui peut, après projection sur le sous-espace  $\{\Psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ , être mise sous la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k\} \mathbf{L}_i \mathbf{X}_j = \mathbf{f}_k E\{\Psi_k^2\} \quad k = 0, 1, \dots, \infty \quad (30)$$

avec  $E\{\}$  désignant l'espérance mathématique. Dans la pratique l'expression précédente peut être tronquée après le terme d'ordre  $P$ .  $P$  est le nombre de polynômes du chaos et peut être calculé en utilisant la formule  $P = \frac{(p+r)!}{p!r!}$  avec  $p$  l'ordre du chaos et  $r$  le nombre de variables aléatoires. Ce système peut être mis sous la forme d'un système linéaire

$$\hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{f}} \quad (31)$$

ayant pour composantes

$$\hat{\mathbf{L}}_{jk} = \sum_{i=0}^P E\{\Psi_i \Psi_j \Psi_k\} \mathbf{L}_i \quad j, k = 0, \dots, P \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}_0 \quad \dots \quad \mathbf{X}_P]^T, \quad \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}_0 E\{\Psi_0^2\} \quad \dots \quad \mathbf{f}_P E\{\Psi_P^2\}]^T \quad (33)$$

## 4 Résultats

Dans cette partie, les effets des incertitudes sur la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor présentant des défauts sont quantifiés à l'aide de la méthode du Chaos Polynomial. La réponse dynamique obtenue par le Chaos Polynomial étant exprimée sur une base de polynômes d'Hermite, on propose d'effectuer des tirages sur ces polynômes en utilisant une méthode de Monte Carlo afin de déterminer la réponse maximale et minimale. Les réponses limites ainsi obtenues permettant de tracer l'enveloppe de la réponse non-linéaire.

Afin de vérifier la robustesse de la méthode, les résultats précédents seront confrontés aux réponses calculées par une approche de Monte Carlo classique. Pour cette méthode classique on effectue 1000 tirages et pour la construction de l'enveloppe on effectue 10000 tirages.

Bien que plusieurs jeux de paramètres aléatoires aient été testés, on ne s'intéressera ici uniquement au cas présenté dans le Tableau 2. Ces résultats sont présentés pour un ordre du chaos égal à 2. Cette

$\delta_E$	$\delta_m$	$\sigma_{\Psi u}$	$\delta_h$	$\sigma_R$	$\sigma_{\delta_p}$	$\sigma_{\alpha_m}$
5%	5%	0.06 rad	2%	$10^{-5}$ m	$10^{-4}$ m	$5 \times 10^{-4}$ rad

TAB. 2: Valeurs des paramètres aléatoires

valeur a été choisie à partir d'une étude de convergence (non présentée ici) effectuée sur la moyenne et variance de la réponse dynamique non-linéaire. Néanmoins pour des ordres plus élevés, on observe une meilleure description des résultats autour des pics de résonance mais on note aussi une augmentation importante du temps de calcul.

Les résultats présentés sur la Figure 2 permettent de comparer les FRFs des différents ordres de la réponse non-linéaire obtenues par la méthode de Monte-Carlo et l'enveloppe construite par l'approche

PCE. On observe que ces résultats sont relativement similaires, validant ainsi la méthode PCE. De plus on peut noter que le déplacement de l'arbre (Figure 2(f)) est principalement dû au terme harmonique (Figure 2(b)). On observe aussi une certaine dispersion des résultats obtenus sur les réponses  $0\times$ ,  $2\times$  et  $4\times$  (Figures 2(a), 2(c), 2(e)) que l'on peut expliquer par la présence d'un défaut de désalignement angulaire.

## 5 Conclusion

Ce papier décrit le couplage d'une méthode de Chaos Polynomial avec une méthode de Balance Harmonique appliqué à un problème de dynamique de rotor. L'efficacité et la robustesse de la méthode a été illustré sur un exemple numérique. De plus la validation des résultats issus de cette méthode a été faite par comparaison avec les résultats obtenus par des simulations de Monte Carlo.

Les résultats obtenus montrent que la présence d'incertitudes sur les défauts tels que le balourd, un arbre initialement déformé ou le désalignement parallèle influent principalement la réponse harmonique, tandis que la présence d'une dissymétrie ou d'un défaut angulaire influent la composante  $2\times$  de la réponse dynamique non-linéaire. Finalement cette étude souligne la nécessité d'identifier toutes les sources de défauts dans un problème de rotor afin d'éviter un dimensionnement incorrect.

## Références

- [1] J.-J. Sinou. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9) :1713–1732, September 2009.
- [2] R Ghanem and P Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] S.Edwards, A.W.Lees, and M.I.Friswell. Fault diagnosis of rotating machinery. *The Shock and Vibration Digest*, 30(1) :4–13, 1998.
- [4] M. Xu and R. D. Marangoni. Vibration analysis of a Motor-Flexible Coupling-Rotor system subject to misalignment and unbalance, part i : Theoretical model and analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 176(5) :663–679, October 1994.
- [5] M. Xu and R. D. Marangoni. Vibration analysis of a motor-flexible Coupling-Rotor system subject to misalignment and unbalance, part II : experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, 176(5) :681–691, October 1994.
- [6] K.M. Al-Hussain and I. Redmond. Dynamic response of two rotors connected by rigid mechanical coupling with parallel misalignment. *Journal of Sound and Vibration*, 249(3) :483–498, January 2002.
- [7] A.W.Lees. Some studies on misalignment in rigidly coupled flexible rotors. *7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria*, pages 25–28, 2006.
- [8] A.W.Lees. Misalignment in rigidly coupled rotors. *Journal of Sound and Vibration*, 305(1-2) :261–271, August 2007.
- [9] J.E.T.Penny and M.I.Friswell. Simplified modelling of rotor cracks. *ISMA 27, Leuven, Belgium*, pages 607–615, 2002.
- [10] J.-J.Sinou and A.W.Lees. A non-linear study of a cracked rotor. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(1) :152–170, January 2007.
- [11] F.Oncescu, A.A.Lakis, and G.Ostiguy. Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 245(2) :303–328, August 2001.
- [12] M Lalanne and G Ferraris. *Rotordynamics-Prediction in Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [13] P. Pennacchi, N. Bachschmid, A. Vania, G.A. Zanetta, and L. Gregori. Use of modal representation for the supporting structure in model-based fault identification of large rotating machinery : part 1—theoretical remarks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3) :662–681, April 2006.
- [14] A.K. Darpe, K. Gupta, and A. Chawla. Dynamics of a bowed rotor with a transverse surface crack. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5) :888–907, October 2006.
- [15] M Loève. *Probability Theory, 4<sup>th</sup> edition*. Springer-Verlag, 1977.



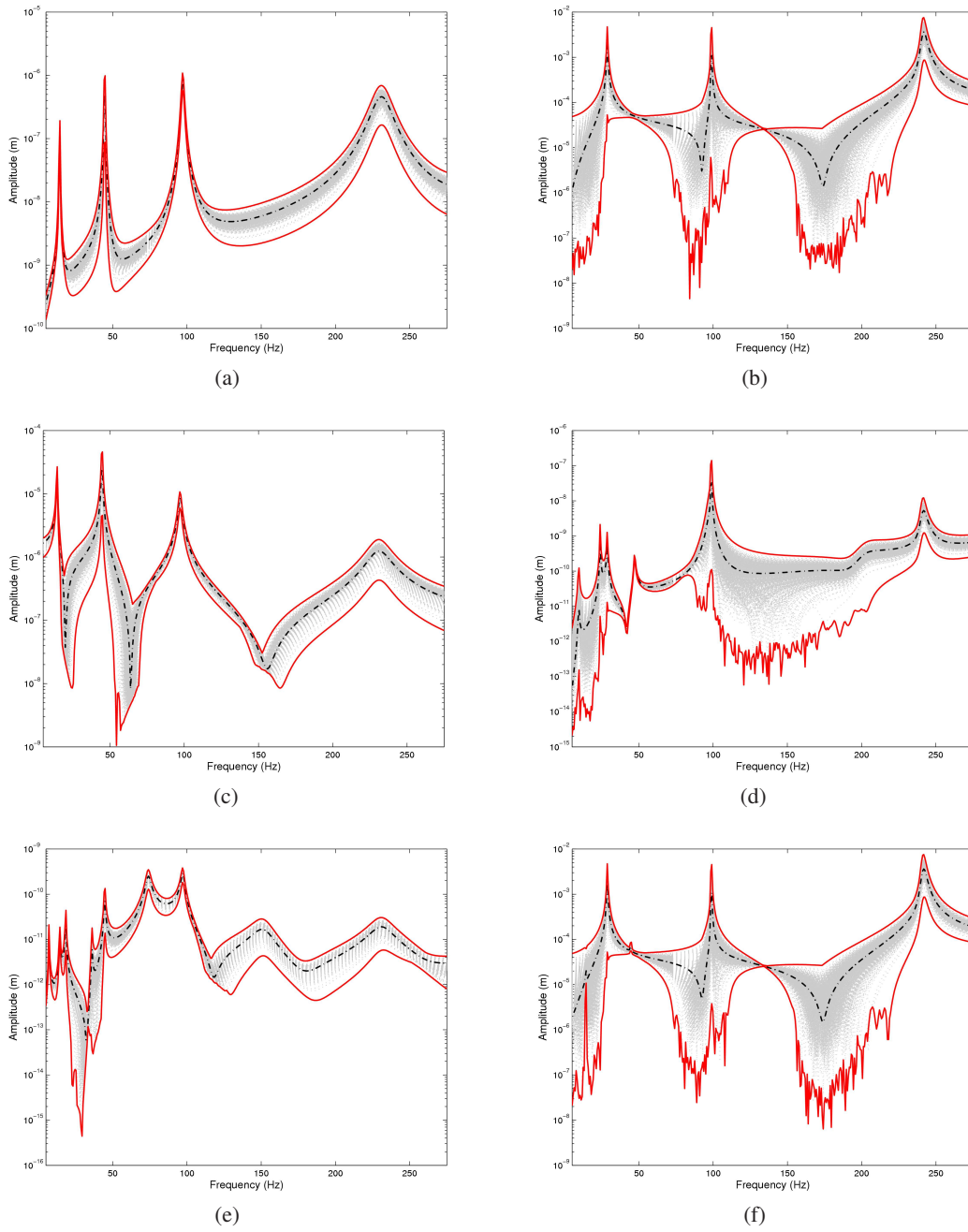


FIG. 2: Fonctions de Réponse en Fréquence ; enveloppes supérieur et inférieur (ligne continue rouge) ; MCS (ligne pointillé grise) ; réponse déterministe (ligne mixte noire) : (a) composante statique ; (b) harmonique  $1 \times$  ; (c) harmonique  $2 \times$  ; (d) harmonique  $3 \times$  ; (e) harmonique  $4 \times$  ; (f) réponse complète.