



HAL
open science

Un lemme matriciel effectif

Pascal Autissier

► **To cite this version:**

Pascal Autissier. Un lemme matriciel effectif. *Mathematische Zeitschrift*, 2013, 273, p. 355-361.
hal-00589592

HAL Id: hal-00589592

<https://hal.science/hal-00589592>

Submitted on 29 Apr 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un lemme matriciel effectif

Pascal Autissier

29 avril 2011

Abstract : We show an almost optimal effective version of Masser's matrix lemma [11], giving a lower bound of the height of an abelian variety in terms of its period lattices.

Résumé : On donne ici une version effective presque optimale du lemme matriciel de Masser, qui consiste à minorer la hauteur d'une variété abélienne en fonction de ses réseaux des périodes.

2010 Mathematics Subject Classification : 14G40, 11G10.

1 Introduction

Soit K un corps de nombres. Désignons par G_K l'ensemble des plongements σ de K dans \mathbb{C} . Masser a montré dans [11] une minoration, connue sous le nom de lemme matriciel, de la hauteur d'une variété abélienne A sur K en termes de matrices des périodes des A_σ . Ce résultat est l'un des ingrédients utilisés par Masser et Wüstholz [12] pour prouver leur fameux théorème des périodes.

Bost [2] a revisité ce lemme matriciel en minorant la hauteur de Faltings (stable), notée $h_{\text{Fa}}(A)$, de A en fonction des diamètres d'injectivité des A_σ . Graftieaux [8], David-Philippon [4] et Gaudron [6] en ont ensuite donné des versions effectives (*cf.* remarque 1.3 ci-dessous).

On se propose ici de raffiner ces versions de manière asymptotiquement optimale. Introduisons d'abord quelques notations :

Dans tout la suite, on désigne par κ la constante $\kappa = \sqrt{\frac{3}{2\pi^3 e}}$. Lorsque $(A; L)$ est une variété abélienne complexe principalement polarisée, on note $\rho(A; L)$ son diamètre d'injectivité (*i.e.* le premier minimum de son réseau des périodes).

Théorème 1.1 : *Soit $(A; L)$ une K -variété abélienne de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. En posant $\rho_\sigma = \min\left(\rho(A_\sigma; L_\sigma); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$ pour tout $\sigma \in G_K$, on a alors l'inégalité suivante :*

$$h_{\text{Fa}}(A) \geq \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} \left(\frac{\pi}{6\rho_\sigma^2} + g \ln(\kappa \rho_\sigma \sqrt{g}) \right) .$$

Ce résultat est utilisé par Gaudron et Rémond [7] pour donner de nouvelles versions effectives du théorème des périodes.

Remarque 1.2 : La constante $\frac{\pi}{6}$ devant les $\frac{1}{\rho_\sigma^2}$ est optimale. En effet, fixons un corps de nombres K_0 et une K_0 -variété abélienne $(A_0; L_0)$ de dimension $g - 1$, principalement polarisée. Alors pour toute extension finie K de K_0 et toute K -courbe elliptique E à potentiellement bonne réduction partout, on a, en posant $A = A_{0K} \times E$, l'estimation

$$h_{\text{Fa}}(A) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} \left(\frac{\pi}{6\rho_\sigma^2} + \ln \rho_\sigma \right) + O(1) \quad ,$$

où le $O(1)$ ne dépend que de $(g; K_0; A_0; L_0)$ (mais pas de $(K; E)$). On le voit en appliquant le théorème 7.b de [5].

Remarque 1.3 : À titre de comparaison, Graftieaux et Gaudron ont obtenu l'énoncé 1.1 avec, au lieu de ce $\frac{\pi}{6}$, une fonction $c(g)$ de g qui converge vers 0 (plus vite que $\frac{1}{g^g}$) lorsque g tend vers $+\infty$; David-Philippon ont trouvé une minoration de la forme $\frac{c_0}{g^4[K : \mathbb{Q}]} \max_{\sigma \in G_K} \frac{1}{\rho_\sigma^2}$ (où la constante c_0 est absolue).

Enfin, citons pour mémoire la forme simplifiée (affaiblie mais plus maniable) suivante :

Corollaire 1.4 : Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Soit $(A; L)$ une K -variété abélienne de dimension $g \geq 1$, principalement polarisée. On a alors

$$h_{\text{Fa}}(A) + \frac{g}{2} \ln \left(\frac{2\pi^2}{\varepsilon} \right) \geq \frac{(1 - \varepsilon)\pi}{6[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} \frac{1}{\rho(A_\sigma; L_\sigma)^2} \quad .$$

Démonstration : À partir du théorème 1.1, il suffit d'écrire $\ln u_\sigma \leq u_\sigma - 1$ avec $u_\sigma = \frac{\varepsilon\pi}{3g\rho_\sigma^2}$ pour tout $\sigma \in G_K$. \square

Après des préliminaires sur les réseaux (section 2), on prouve le théorème 1.1 à la section 3.2.

Je remercie Éric Gaudron et Gaël Rémond de m'avoir incité à rédiger ce texte. Je remercie également Fabien Pazuki pour d'intéressantes discussions concernant le lemme matriciel.

2 Géométrie des nombres

Soit g un entier ≥ 1 . On note \mathbb{S}_g l'ensemble des matrices $Y \in M_g(\mathbb{R})$ symétriques définies positives.

Définitions : Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. Munissons \mathbb{R}^g de la norme euclidienne $\| \cdot \|_Y$ telle que $\|x\|_Y^2 = {}^t x Y x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^g$, et posons $\psi_Y(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}^g} \|x - m\|_Y$. Le **premier minimum** $\lambda_1(Y)$ et le **minimum inhomogène** $\mu(Y)$ de Y sont les réels définis par

$$\lambda_1(Y) = \min_{m \in \mathbb{Z}^g - \{0\}} \|m\|_Y \quad \text{et} \quad \mu(Y) = \max_{x \in \mathbb{R}^g} \psi_Y(x) \quad .$$

Lemme 2.1 : Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. On a l'inégalité $2\mu(Y)\lambda_1(Y^{-1}) \geq 1$.

Démonstration : Choisissons un $\gamma \in \mathbb{Z}^g$ tel que $\|\gamma\|_{Y^{-1}} = \lambda_1(Y^{-1})$. Les coordonnées de γ sont premières entre elles (par minimalité), donc il existe $m \in \mathbb{Z}^g$ vérifiant une relation de Bézout ${}^t \gamma m = 1$. Posons $x = \frac{m}{2}$ et montrons que $2\psi_Y(x)\lambda_1(Y^{-1}) \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^g$, on a

$$1 \leq |1 - 2{}^t \gamma n| = 2|{}^t \gamma(x - n)| \leq 2\|\gamma\|_{Y^{-1}}\|x - n\|_Y = 2\lambda_1(Y^{-1})\|x - n\|_Y \quad .$$

D'où le résultat. \square

Dans la suite de cette section, on fixe un $Y \in \mathbb{S}_g$ et on note simplement $\| \cdot \|$ et ψ au lieu de $\| \cdot \|_Y$ et ψ_Y . Désignons par ν la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^g , et posons $F = [0; 1]^g$.

Lemme 2.2 : Soit $Y \in \mathbb{S}_g$. On a la minoration suivante :

$$\int_F \psi(x)^2 d\nu(x) \geq \frac{\mu(Y)^2}{3} \quad .$$

Démonstration : On prend un $y \in \mathbb{R}^g$ vérifiant $\mu(Y) = \psi(y)$. Soit $x \in \mathbb{R}^g$. Pour m et n dans \mathbb{Z}^g , l'identité du parallélogramme donne

$$\begin{aligned} 2\|x - m\|^2 + 2\|x - y - n\|^2 &= \|y - m + n\|^2 + \|2x - y - m - n\|^2 \\ &\geq \psi(y)^2 + \psi(2x - y)^2 \quad . \end{aligned}$$

Il en découle $2\psi(x)^2 + 2\psi(x - y)^2 \geq \mu(Y)^2 + \psi(2x - y)^2$. On conclut en intégrant cette inégalité contre ν et en utilisant la \mathbb{Z}^g -périodicité de ψ . \square

Pour tout $(t; x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^g$, on pose

$$f_Y(t; x) = \sqrt{\det(Y)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp(-\pi t \|x - m\|^2) \quad .$$

Lemme 2.3 : On a les propriétés suivantes.

(α) Soit $x \in \mathbb{R}^g$. L'application $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe $f_Y(t; x) \exp(\pi t \psi(x)^2)$ est décroissante.

(β) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a l'estimation $\int_F \ln f_Y(t; x) d\nu(x) \leq -\frac{g}{2} \ln t$.

Démonstration : (α) Cette fonction est une somme d'exponentielles décroissantes.

(β) En utilisant l'inégalité de convexité de Jensen, on trouve

$$\begin{aligned} \int_F \ln f_Y(t; x) d\nu(x) &\leq \ln \int_F f_Y(t; x) d\nu(x) \\ &= \ln \left[\sqrt{\det(Y)} \int_{\mathbb{R}^g} \exp(-\pi t \|x\|^2) d\nu(x) \right] = -\frac{g}{2} \ln t \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 2.4 : En posant $\lambda = \min\left(\lambda_1(Y^{-1}); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$, on a la majoration

$$\int_F \ln f_Y(2; x) d\nu(x) \leq -\frac{\pi}{6\lambda^2} - g \ln \lambda - \frac{g}{2} \ln \frac{6g}{\pi e} \quad .$$

Démonstration : Soit $t \in]0; 2]$. Le lemme 2.3. α implique pour tout $x \in F$ l'inégalité

$$\ln f_Y(2; x) \leq \ln f_Y(t; x) - \pi(2-t)\psi(x)^2 \quad .$$

Avec les lemmes 2.3. β , 2.2 et 2.1, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_F \ln f_Y(2; x) d\nu(x) &\leq \int_F \ln f_Y(t; x) d\nu(x) - \pi(2-t) \int_F \psi(x)^2 d\nu(x) \\ &\leq -\frac{g}{2} \ln t - \frac{\pi(2-t)}{12\lambda_1(Y^{-1})^2} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en choisissant $t = \frac{6g\lambda^2}{\pi}$. \square

3 Minoration de hauteur

3.1 Généralités

Définition : Soit A une variété abélienne complexe de dimension $g \geq 1$. Posons $T_A = \Gamma(A; \Omega_{A/\mathbb{C}})^\vee$ et notons Γ_A le réseau des périodes de A (on a donc un isomorphisme $A(\mathbb{C}) \simeq T_A/\Gamma_A$ de groupes analytiques).

Soit $L : A \rightarrow A^\vee$ une polarisation de A . Elle induit une forme de Riemann H_L sur T_A (*i.e.* une forme hermitienne sur T_A telle que $\text{Im} H_L(\gamma; \delta) \in \mathbb{Z}$ pour tout $(\gamma; \delta) \in \Gamma_A^2$). Le **diamètre d'injectivité** de L est le réel $\rho(A; L) = \min_{\gamma \in \Gamma_A - \{0\}} \sqrt{H_L(\gamma; \gamma)}$.

Définition : Soit $(A; L)$ une variété abélienne complexe principalement polarisée. Désignons par ν_1 la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ de masse 1.

Prenons un faisceau inversible \mathcal{L} ample sur A définissant L (on a donc $h^0(A; \mathcal{L}) = 1$), une métrique du cube $\| \cdot \|$ sur \mathcal{L} (*i.e.* une métrique sur L à courbure invariante par translations), et une section $s \in \Gamma(A; \mathcal{L}) - \{0\}$. On pose

$$I(A; L) = - \int_{A(\mathbb{C})} \ln \|s\| d\nu_1 + \frac{1}{2} \ln \int_{A(\mathbb{C})} \|s\|^2 d\nu_1 \quad .$$

On vérifie facilement que ce réel ne dépend pas du choix de $(\mathcal{L}; \| \cdot \|; s)$.

Soit K un corps de nombres. Soit A une variété abélienne de dimension g sur K .

Définition : On définit la **hauteur de Faltings** $h_{\text{Fa}}(A)$ de A de la manière suivante. Choisissons une extension finie K' de K telle que $A_{K'}$ soit semi-stable sur K' . Désignons par X le modèle de Néron de $A_{K'}$ sur $B = \text{Spec}(O_{K'})$, par $0_X \in X(B)$ sa section neutre, et par ω_X le faisceau inversible $\omega_X = 0_X^* \Lambda^g \Omega_{X/B}$ sur B .

Munissons ω_X de la métrique $\|\cdot\|_{\text{Fa}}$ telle que pour tout $\sigma \in B(\mathbb{C}) = G_{K'}$ et tout $\varphi \in \Gamma(B_\sigma; \omega_{X_\sigma}) = \Gamma(A_\sigma; \Lambda^g \Omega_{A_\sigma/\mathbb{C}})$, on ait $\|\varphi\|_{\text{Fa}}^2(\sigma) = \frac{i^{g^2}}{2^g} \int_{A_\sigma(\mathbb{C})} \varphi \wedge \bar{\varphi}$.

On pose alors $h_{\text{Fa}}(A) = \frac{\widehat{\text{deg}}(\omega_X; \|\cdot\|_{\text{Fa}})}{[K' : \mathbb{Q}]}$ (cela ne dépend pas du choix de K').

On va utiliser l'inégalité de Bost suivante (cf. théorème §3 de [3]).

Théorème 3.1 (Bost) : *Soit $(A; L)$ une K -variété abélienne de dimension g , principalement polarisée. On a alors la minoration*

$$h_{\text{Fa}}(A) \geq -\frac{g}{2} \ln(2\pi^2) + \frac{2}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_K} I(A_\sigma; L_\sigma) \quad .$$

Démonstration : Voir l'appendice de [7]. \square

3.2 Démonstration du théorème 1.1

Grâce au théorème 3.1, il suffit de minorer $I(A; L)$ en fonction de $\rho(A; L)$ pour toute variété abélienne complexe $(A; L)$ principalement polarisée.

Notons \mathbb{H}_g l'espace de Siegel des matrices $\Omega \in M_g(\mathbb{C})$ symétriques telles que $\text{Im}\Omega$ soit définie positive. À tout $\Omega \in \mathbb{H}_g$ on associe la fonction thêta définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^g \quad \theta_\Omega(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi {}^t n \Omega n + 2i\pi {}^t n z) \quad .$$

Soit $(A; L)$ une \mathbb{C} -variété abélienne de dimension g , principalement polarisée. Fixons un $\Omega \in \mathbb{H}_g$ tel que $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g)$, que L soit induite par $\Theta = \text{div}(\theta_\Omega)$, et que Ω soit réduite au sens de Siegel (voir §V.4 de [10]).

En posant $Y = \text{Im}\Omega$, on a en particulier $\lambda_1(Y)^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Désignons par ν_1 la mesure de Haar sur $A(\mathbb{C})$ et par ν la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^g . Posons $\mathcal{L} = \mathcal{O}_A(\Theta)$ et notons s la section globale de \mathcal{L} définie par Θ . On munit \mathcal{L} de la métrique $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^g \quad \|s\|(z) = \sqrt[4]{\det(Y)} \exp(-\pi {}^t y Y^{-1} y) |\theta_\Omega(z)| \quad .$$

C'est une métrique du cube sur \mathcal{L} (voir §3 de [13]) et on a

$$\ln \int_{A(\mathbb{C})} \|s\|^2 d\nu_1 = -\frac{g}{2} \ln 2 \quad .$$

Maintenant, majorons le terme $\int_{A(\mathbb{C})} \ln \|s\| d\nu_1$. Posons $F = [0; 1]^g$. En utilisant l'inégalité de Jensen puis la formule de Parseval, on obtient pour tout $y \in F$:

$$\begin{aligned} \int_F \ln \|s\|^2(x + \Omega y) d\nu(x) &\leq \ln \int_F \|s\|^2(x + \Omega y) d\nu(x) \\ &= \ln \left[\sqrt{\det(Y)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp[-2\pi \mathfrak{t}(y + n)Y(y + n)] \right] \\ &= \ln f_Y(2; y) \quad . \end{aligned}$$

On pose $\lambda = \min\left(\lambda_1(Y^{-1}); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$. À l'aide de la proposition 2.4, on en déduit

$$\begin{aligned} 2I(A; L) &\geq -\frac{g}{2} \ln 2 - \int_F \ln f_Y(2; y) d\nu(y) \\ &\geq \frac{\pi}{6\lambda^2} + g \ln \lambda + \frac{g}{2} \ln \frac{3g}{\pi e} \quad . \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme 3.2 ci-dessous. \square

Lemme 3.2 : *En posant $\rho = \min\left(\rho(A; L); \sqrt{\frac{\pi}{3g}}\right)$, on a l'égalité $\rho = \lambda$.*

Démonstration : Identifions T_A à \mathbb{C}^g et Γ_A à $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$. La forme de Riemann H_L vérifie alors

$$\forall \gamma = m + \Omega n \in \Gamma_A \quad H_L(\gamma; \gamma) = \mathfrak{t}\gamma Y^{-1}\gamma = \mathfrak{t}(m + Xn)Y^{-1}(m + Xn) + \mathfrak{t}nYn \quad .$$

Si $g = 1$, on vérifie aisément que $\rho(A; L) = \frac{1}{\sqrt{Y}} = \lambda_1(Y^{-1})$.

Supposons maintenant $g \geq 2$. Soit $\gamma = m + \Omega n \in \Gamma_A - \{0\}$. Si $n \neq 0$ on a $H(\gamma; \gamma) \geq \mathfrak{t}nYn \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{\pi}{3g}$, et si $n = 0$ on a $H(\gamma; \gamma) = \mathfrak{t}mY^{-1}m \geq \lambda_1(Y^{-1})^2$. D'où $\rho \geq \lambda$.

De même, pour tout $m' \in \mathbb{Z}^g - \{0\}$, on a $\|m'\|_{Y^{-1}}^2 = H(m'; m') \geq \rho(A; L)^2$. Donc $\lambda \geq \rho$. \square

Références

- [1] *C. Birkenhake, H. Lange : Complex abelian varieties (second edition). Grundlehren der math. Wissenschaften* **302** (2004).
- [2] *J.-B. Bost : Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). Astérisque* **237** (1996), 115-161.
- [3] *J.-B. Bost : Arakelov geometry of abelian varieties. Preprint of the Max-Planck-Institut für Mathematik* **51** (1996).
- [4] *S. David, P. Philippon : Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes II. Commentarii Math. Helvetici* **77** (2002), 639-700.
- [5] *G. Faltings : Calculus on arithmetic surfaces. Annals of Math.* **119** (1984), 387-424.

- [6] *É. Gaudron* : Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. Annales Scientifiques de l'ENS **39** (2006), 699-773.
- [7] *É. Gaudron, G. Rémond* : Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. Prépublication (2011).
- [8] *P. Graftieaux* : Formals groups and the isogeny theorem. Duke Math. Journal **106** (2001), 81-121.
- [9] *P.M. Gruber, C.G. Lekkerkerker*. Geometry of numbers (second edition). North-Holland Math. Library **37** (1987).
- [10] *J. Igusa* : Theta functions. Grundlehren der math. Wissenschaften **194** (1972).
- [11] *D. Masser* : Small values of heights on families of abelian varieties. Lecture Notes in Math. **1290** (1987), 109-148.
- [12] *D. Masser, G. Wüstholz* : Periods and minimal abelian subvarieties. Annals of Math. **137** (1993), 407-458.
- [13] *L. Moret-Bailly* : Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann. Compositio Math. **75** (1990), 203-217.
- [14] *F. Pazuki* : Theta height and Faltings height. Bulletin de la SMF **139** (2011), à paraître.

Pascal Autissier. I.M.B., université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.

pascal.autissier@math.u-bordeaux1.fr