



**HAL**  
open science

## Les espaces de Berkovich sont angéliques

Jérôme Poineau

► **To cite this version:**

| Jérôme Poineau. Les espaces de Berkovich sont angéliques. 2011. hal-00588936v2

**HAL Id: hal-00588936**

**<https://hal.science/hal-00588936v2>**

Preprint submitted on 2 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# LES ESPACES DE BERKOVICH SONT ANGÉLIQUES

*par*

Jérôme Poineau

---

**Résumé.** — Bien que les espaces de Berkovich définis sur un corps trop gros ne soient, en général, pas métrisables, nous montrons que leur topologie reste en grande partie gouvernée par les suites : tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie et les parties compactes sont séquentiellement compactes. Notre preuve utilise de façon essentielle l'extension des scalaires et nous en étudions certaines propriétés. Nous montrons qu'un point d'un disque peut être défini sur un sous-corps de type dénombrable et que, lorsque le corps de base est algébriquement clos, tout point est universel : dans une extension des scalaires, il se relève canoniquement.

## **Abstract**

**Berkovich spaces are angelic.** Although Berkovich spaces may fail to be metrizable when defined over too big a field, we prove that a large part of their topology can be recovered through sequences: for instance, cluster points are limits of sequences and compact subsets are sequentially compact. Our proof uses extension of scalars in an essential way and we need to investigate some of its properties. We show that a point in a disc may be defined over a subfield of countable type and that, over algebraically closed fields, every point is universal: in an extension of scalars, there is a canonical point above it.

---

*Classification mathématique par sujets (2010).* — 14G22, 54D55, 46A50.

*Mots clefs.* — Espaces de Berkovich, géométrie analytique  $p$ -adique, espaces de Fréchet-Urysohn, espaces séquentiels, espaces angéliques.

L'auteur est membre du projet jeunes chercheurs « Berko » de l'Agence Nationale de la Recherche.

## 1. Introduction

Parmi les différentes théories d'espaces analytiques  $p$ -adiques, celle introduite par V. Berkovich se distingue entre autres par ses propriétés topologiques agréables. Mentionnons, par exemple, qu'en dépit du caractère totalement discontinu du corps de base, les espaces de Berkovich sont localement compacts, localement connexes par arcs (*cf.* [Ber90]) et même localement contractiles dans de nombreux cas (*cf.* [Ber99], [HL]).

Pour des applications à la théorie des systèmes dynamiques, ces propriétés présentent un grand intérêt et ont déjà rendu de nombreux services (*cf.* [BR10] pour un exposé détaillé dans le cadre de la droite). Cependant, d'autres obstacles se présentent : dans ce contexte, les suites jouent un rôle prépondérant, mais leur comportement ne présente *a priori* guère de liens avec la topologie des espaces de Berkovich. En effet, lorsque leur corps de définition est trop gros, ces espaces cessent en général d'être métrisables et rien n'assure alors que les caractérisations usuelles des propriétés topologiques en termes de suites continuent de s'appliquer. Pourtant, nous allons montrer que, dans une large mesure, tel est bien le cas, allongeant ainsi la liste des propriétés topologiques remarquables des espaces de Berkovich.

Dans ce texte, nous allons précisément montrer que les espaces de Berkovich sont des espaces de Fréchet-Urysohn. Cette condition, qui signifie que tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie, entraîne notamment que la notion de partie ouverte ou fermée peut se tester à l'aide de suites et que toute partie compacte (au sens où tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement fini) est également séquentiellement compacte (au sens où toute suite possède une sous-suite convergente). Nous démontrerons également que les espaces de Berkovich sont angéliques, c'est-à-dire qu'ils satisfont la condition supplémentaire que leurs parties relativement  $\omega$ -compactes sont relativement compactes, sous certaines conditions, toujours vérifiées pour les courbes ou les espaces provenant de variétés algébriques.

Signalons que ces résultats ont été obtenus par C. Favre dans [Fav] lorsque le corps de base est un corps de séries de Laurent. Nous nous affranchissons ici de cette hypothèse. Indiquons que la stratégie qu'il emploie fait intervenir des espaces de Riemann-Zariski (ce qui explique la restriction aux corps de séries de Laurent) et se distingue assez nettement de la nôtre.

Ajoutons, à présent, quelques mots sur les résultats topologiques. Dans des cas simples comme celui du disque de dimension 1, voire celui des courbes, l'on

se convaincre assez facilement de leur véracité. Considérons par exemple le disque unité  $\mathbf{D}_k^{1,\text{an}}$  sur un corps valué complet algébriquement clos  $k$  de valuation non triviale. Les  $k$ -points  $y$  sont denses et l'on construit aisément une suite de  $k$ -points convergeant vers un point donné *a priori*. Si ce point est le point de Gauß, par exemple, il suffit que les points de la suite parcourent une infinité de branches issues de ce point (autrement dit que l'ensemble des classes résiduelles dans  $\tilde{k}$  des points de la suite soit infini). Un raisonnement du même style montrerait que  $\mathbf{D}_k^{1,\text{an}}$  est séquentiellement compact.

Cependant, la portée de ce type de techniques semble assez limitée et nous procéderons par d'autres méthodes. Les espaces de Berkovich étant construits à partir d'espaces affinoïdes, qui sont eux-mêmes des fermés de Zariski de disques, il suffit en réalité de démontrer les résultats pour les disques. Exposons en quelques mots la stratégie que nous adopterons. Étant donné un disque  $\mathbf{D}_k^{n,\text{an}}$  sur un corps valué complet  $k$ , nous commencerons par descendre le problème sur un sous-corps  $\ell$  de  $k$ . Si ce corps est assez petit, le disque  $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$  est métrisable et le problème est résolu. Il faut alors remonter.

Nous consacrons la section 3 aux points « que l'on peut remonter ». Ces points, que nous appelons universels, ont été introduits par V. Berkovich sous le nom de « peaked points ». Sans rentrer dans les détails, un point  $x$  d'un espace analytique  $X$  sur  $k$  est dit universel lorsque, pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ , il existe un point canonique au-dessus de  $x$  dans  $X_K$ . Examinons, de nouveau, le cas où  $X$  est un disque de dimension 1 sur un corps algébriquement clos. On peut alors écrire tout point comme bord de Shilov (qui coïncide ici avec le bord topologique) d'un disque centré en un point rationnel de rayon plus petit ou comme limite de tels bords. Nous obtenons ainsi un procédé pour remonter canoniquement tous les points de  $X$  à  $X_K$ . C'est l'approche adoptée par X. Faber dans [Fab], §4.

De façon plus générale, V. Berkovich a proposé un moyen de vérifier la propriété d'universalité consistant à réaliser le point comme unique point du bord de Shilov d'un espace strictement affinoïde d'un certain type. Nous aurons besoin de généraliser ce résultat à des espaces qui ne sont pas strictement affinoïdes, ce qui oblige à remplacer les réductions classiques par des réductions graduées au sens de M. Temkin. C'est pour cette raison que nous avons rédigé la section 2, où nous étendons au cadre gradué quelques résultats classiques d'algèbre commutative tels que le Nullstellensatz.

À la section 4, nous nous intéressons spécifiquement au cas des disques. Ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, nous montrons que nous pouvons en « descendre » les points : tout point du disque  $\mathbf{D}_k^{n,\text{an}}$  peut être défini (en un sens que nous précisons) sur un disque  $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$ , où  $\ell$  est un sous-corps de  $k$  de type

dénombrable sur son sous-corps premier. Remarquons que le disque  $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$  est alors métrisable. En combinant ces techniques avec celles de la section 3, nous démontrons un résultat de « remontée » : sur un corps algébriquement clos, tout point est universel.

Nous disposons alors de tous les ingrédients pour mettre en place la stratégie exposée plus haut et en tirer quelques conséquences ayant trait à la topologie des espaces de Berkovich. C'est l'objet de la section 5.

### Remerciements

Nous remercions très chaleureusement Charles Favre qui nous a posé les questions à l'origine de ce texte et nous a communiqué sa prépublication [Fav] sur le même sujet. Merci également à Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros pour leurs commentaires et conseils.

### Notations

Ce texte est consacré à l'étude d'espaces analytiques au sens de V. Berkovich. Nous adopterons les notations suivantes dans tout le texte, exception faite de la section 2. La lettre  $k$  désignera un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet. Nous n'excluons pas le cas de la valeur absolue triviale. Nous noterons  $k_p$  le complété du sous-corps premier de  $k$ .

Si  $X$  est un espace  $k$ -analytique et  $K$  une extension valuée complète de  $k$ , nous noterons  $X_K$  l'espace  $K$ -analytique obtenu par extension des scalaires.

Nous dirons qu'une famille finie  $\mathbf{r}$  de nombres réels strictement positifs est un polyrayon  $k$ -libre si son image dans le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}_+^*/\sqrt{|k^*|}$  est une famille libre.

Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Tout point  $x$  du spectre analytique  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  est associé à une semi-norme multiplicative bornée sur  $\mathcal{A}$ , que nous noterons  $|\cdot|_x$ . Nous noterons  $\mathfrak{p}_x$  l'idéal premier de  $\mathcal{A}$  défini par

$$\mathfrak{p}_x = \{f \in \mathcal{A} \mid |f|_x = 0\}.$$

$k(\mathfrak{p}_x)$  le corps des fractions de l'anneau intègre  $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$  et  $\mathcal{H}(x)$  son complété pour la valeur absolue induite par  $|\cdot|_x$ .

Suivant [Ber90], § 9.1, nous noterons  $s(x)$  le degré de transcendance du corps  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  sur  $\tilde{k}$  et  $t(x)$  la dimension du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\sqrt{|\mathcal{H}(x)^*|}/\sqrt{|k^*|}$ . Dans ce contexte, l'inégalité d'Abhyankar s'écrit

$$s(x) + t(x) \leq \dim_x(X).$$

## 2. Quelques résultats d'algèbre graduée

Dans cette section, nous démontrons quelques résultats d'algèbre graduée, au sens de M. Temkin. Fixons un groupe commutatif  $G$ . Les anneaux gradués que nous considérons sont des anneaux commutatifs et unitaires  $A$ , munis de  $G$ -graduations  $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$  par des sous-groupes additifs vérifiant  $A_g A_h \subset A_{gh}$ . Nous demandons que les morphismes respectent la graduation. Les notions d'algèbre commutative habituelles s'étendent à ce cadre. Nous renvoyons à [Tem04], §1 pour les détails mais rappelons tout de même quelques définitions pour la commodité du lecteur.

- Un élément homogène  $x$  de  $A$  est un élément appartenant à l'un des  $A_g$ . On note appelle  $g$  l'ordre de  $x$  et on le note  $\rho(x)$ .
- Un anneau gradué est dit intègre si le produit de deux éléments homogènes non nuls est non nul.
- Un corps gradué est un anneau gradué non nul dans lequel tous les éléments homogènes sont inversibles. Tout anneau gradué intègre possède un corps des fractions gradué obtenu en inversant les éléments homogènes.
- Un idéal homogène  $I$  de  $A$  est un idéal engendré par des éléments homogènes. Le quotient  $A/I$  est alors encore naturellement un anneau gradué.
- Si  $g$  est un élément de  $G$ , l'anneau  $B = A[g^{-1}T]$  est l'anneau  $A[T]$  muni de l'unique graduation telle que  $T$  soit homogène d'ordre  $g$ .
- Une  $A$ -algèbre graduée  $B$  est de type fini si elle est quotient d'une algèbre graduée  $A[g^{-1}T]$  par un idéal homogène.
- Un  $A$ -module  $B$  est de type fini s'il est quotient d'un module gradué  $A^n$  (avec la graduation donnée par  $(A^n)_g = A_g^n$ ) par un idéal homogène.

Signalons que certaines de ces notions peuvent se comporter de façon surprenante. Considérons, par exemple, un corps gradué  $k$ , un élément  $g$  de  $G$  n'appartenant pas à  $\rho(k)$  et considérons l'anneau gradué  $k[g^{-1}T]$ . Ses seuls éléments homogènes sont de la forme  $aT^n$ , où  $a$  est un élément homogène de  $k$  et  $n$  un entier. Ce sont donc les seuls éléments que l'on inverse pour obtenir le corps des fractions gradué  $k(g^{-1}T)$ . Cet argument montre que le corps gradué  $k(g^{-1}T)$  est de type fini sur  $k$ . En particulier, nous ne pouvons espérer dans ce cadre un Nullstellensatz complètement analogue au Nullstellensatz classique.

Ce formalisme des anneaux gradués nous sera utile par la suite pour réduire des algèbres  $k$ -affinoïdes qui ne sont pas nécessairement  $k$ -affinoïdes. En général, si  $\mathcal{D}$  désigne une  $k$ -algèbre de Banach et  $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}_+$  sa semi-norme spectrale,

pour tout nombre réel  $r > 0$ , on définit  $\tilde{\mathcal{D}}_r$  comme le quotient de l'anneau  $\{x \in \mathcal{D} \mid \rho(x) \leq r\}$  par l'idéal  $\{x \in \mathcal{D} \mid \rho(x) < r\}$ . La réduction de  $\mathcal{D}$  est alors l'algèbre  $\mathbf{R}_+^*$ -graduée

$$\tilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_{r>0} \tilde{\mathcal{D}}_r.$$

Cette réduction appliquée à des algèbres  $k$ -affinoïdes quelconques possède des propriétés similaires à la réduction classique des algèbres strictement  $k$ -affinoïdes. Pour des résultats précis, nous renvoyons à [Tem04], §3.

Notre but est ici de démontrer une version du Nullstellensatz pour les algèbres graduées. Nous suivons la preuve qu'en ont proposée E. Artin et J. Tate dans [AT51]. Nous en profitons pour donner quelques analogues de définitions et résultats classiques. Commençons par énoncer deux résultats concernant les algèbres graduées de polynômes en une variable. Nous omettons les démonstrations, en tout point analogues aux démonstrations classiques.

**Proposition 2.1 (Division euclidienne).** — *Soient  $k$  un corps gradué et  $g$  un élément de  $G$ . Soient  $A$  et  $B$  deux éléments homogènes de l'anneau gradué  $k[g^{-1}T]$ . Supposons que  $B$  n'est pas nul. Alors il existe un unique couple  $(Q, R)$  d'éléments homogènes de  $k[g^{-1}T]$  qui vérifient les propriétés suivantes :*

- i)  $A = BQ + R$ ;
- ii)  $\deg(R) < \deg(B)$ .

**Corollaire 2.2.** — *Soit  $k$  un corps gradué. Pour tout élément  $g$  de  $G$ , l'anneau gradué  $k[g^{-1}T]$  est principal : tout idéal homogène est engendré par un élément homogène.*

Comme dans le cas classique, on peut définir sur les corps gradués une notion d'élément algébrique.

**Définition 2.3.** — *Soit  $\mathbf{g}$  un élément de  $G^n$ . Un polynôme  $P(\mathbf{T})$  en  $n$  variables à coefficients dans une algèbre graduée  $A$  est dit  **$\mathbf{g}$ -homogène** s'il définit un élément homogène de  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$ . Un polynôme est dit  **$G$ -homogène**, ou simplement **homogène**, s'il existe un élément  $\mathbf{g}$  de  $G^n$  pour lequel il est  $\mathbf{g}$ -homogène.*

**Définition 2.4.** — *Soit  $k$  un corps gradué. Un élément homogène  $x$  d'une  $k$ -algèbre graduée est dit **algébrique sur  $k$**  s'il est racine d'un polynôme  $G$ -homogène en une variable à coefficients dans  $k$ .*

*Le corps gradué  $k$  est dit **algébriquement clos** si tout polynôme  $G$ -homogène non constant en une variable à coefficients dans  $k$  y possède une racine.*

**Remarque 2.5.** — Le corollaire 2.2 permet notamment de définir le polynôme minimal d'un élément algébrique sur  $k$ . C'est un polynôme  $G$ -homogène.

On vérifie facilement qu'un corps gradué est algébriquement clos si, et seulement si, toutes ses extensions finies sont triviales. Comme dans le cas classique, les réductions des corps complets algébriquement clos sont algébriquement closes, ainsi que l'exprime la proposition suivante.

**Proposition 2.6.** — *Soit  $k$  un corps valué complet algébriquement clos. Alors sa réduction  $\tilde{k}$  est un corps gradué algébriquement clos.*

*Démonstration.* — Ici la graduation est celle qui correspond à la valeur absolue et le groupe  $G$  est n'est autre que le groupe multiplicatif  $\mathbf{R}_+^*$ .

Soient  $r > 0$  et  $\tilde{P}(T) = \sum_{n=0}^d \alpha_n T^n$  un élément homogène non constant de  $\tilde{k}[r^{-1}T]$ . Notons  $s$  son ordre. Nous pouvons supposer que  $\alpha_d \neq 0$ . Relevons  $\tilde{P}(T)$  en un élément  $P(T) = \sum_{n=0}^d a_n T^n$  de  $k[T]$ . Puisque  $\tilde{P}(T)$  est homogène d'ordre  $s$ , pour tout  $n$ , nous avons  $|a_n| r^n = s$ .

Le polynôme  $P(T)$  n'est pas constant et possède donc une racine  $x$  dans  $k$ . Son coefficient  $a_d$  n'est pas nul et nous avons

$$|x| = \max_{0 \leq n \leq d} \left( \frac{|a_n|}{|a_d|} \right)^{\frac{1}{d-n}} = \max_{0 \leq n \leq d} \left( \frac{|a_n| r^n}{|a_d| r^d} r^{d-n} \right)^{\frac{1}{d-n}} = r.$$

Par conséquent, pour tout  $n$ ,  $|a_n x^n| = s$  et  $\tilde{a}_n \tilde{x}^n$  est donc homogène de degré  $s$ . On en déduit que  $\sum_{n=0}^d \tilde{a}_n \tilde{x}^n = 0$  dans  $\tilde{k}$ .  $\square$

Nous disposons également d'une notion de module gradué noethérien et d'anneau noethérien qui se comporte comme dans le cadre classique. De nouveau, nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces vérifications.

**Théorème 2.7 (Artin-Tate).** — *Soient  $A \subset B \subset C$  des anneaux gradués. Supposons que  $A$  est noethérien, que  $C$  soit une  $A$ -algèbre de type fini et un  $B$ -module de type fini. Alors  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini.*

*Démonstration.* — Soient  $c_1, \dots, c_n$  des éléments homogènes de  $C$  qui l'engendrent en tant que  $A$ -algèbre. Soient  $d_1, \dots, d_m$  des éléments homogènes de  $C$  qui l'engendrent en tant que  $B$ -module. Pour tout  $i$ , nous pouvons écrire

$$c_i = \sum_j \gamma_{i,j} d_j,$$

où les  $\gamma_{i,j}$  sont des éléments homogènes de  $A$  et, pour tous  $i$  et  $j$ , nous pouvons écrire

$$d_i d_j = \sum_k \delta_{i,j,k} d_k,$$

où les  $\delta_{i,j,k}$  sont des éléments homogènes de  $B$ . Soit  $B_0$  la sous-algèbre graduée de  $B$  engendrée par les  $\gamma_{i,j}$  et les  $\delta_{i,j,k}$ . Elle est de type fini sur  $A$  et donc noethérienne.

En utilisant le fait que tout élément homogène de  $C$  peut s'écrire comme un polynôme homogène en les  $c_i$  à coefficients dans  $A$ , on montre que  $C$  est une  $B_0$ -algèbre graduée de type fini. On en déduit que  $B$  est une  $B_0$ -algèbre graduée de type fini et donc une  $A$ -algèbre graduée de type fini.  $\square$

Nous avons déjà remarqué plus haut que certains corps gradués transcendants peuvent être de type fini. Nous apportons ici quelques précisions sur ce résultat. Si  $\mathbf{g}$  désigne un élément de  $G^n$ , nous noterons  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  le corps des fractions gradué de l'anneau gradué  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$ .

**Définition 2.8.** — Soit  $E$  une partie de  $G$ . Une famille  $\mathcal{F}$  d'éléments de  $G$  est dite **indépendante de  $E$**  si son image dans le  $\mathbf{Z}$ -module  $G/\langle E \rangle$  est libre.

Si la partie  $E$  est réduite à l'élément 1, nous dirons simplement que la famille est **indépendante**.

**Lemme 2.9.** — Soient  $k$  un corps gradué,  $n$  un entier et  $\mathbf{g}$  un élément de  $G^n$ . Le corps gradué  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  est une  $k$ -algèbre graduée de type fini si, et seulement si, la famille  $\mathbf{g}$  est indépendante de  $\rho(k)$ .

*Démonstration.* — Si  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  est indépendante de  $\rho(k)$ , nous avons

$$k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) = k[g_1^{-1}T_1, g_1S_1, \dots, g_n^{-1}T_n, g_nS_n]/(T_1S_1 - 1, \dots, T_nS_n - 1)$$

et cette algèbre graduée est donc de type fini sur  $k$ .

Pour prouver la réciproque, il suffit de démontrer que si  $\mathbf{g}$  est un élément de  $G$  dépendant de  $\rho(k)$ , alors le corps gradué  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  n'est pas de type fini. Considérons donc un tel élément  $\mathbf{g}$  de  $G$  et supposons, par l'absurde, qu'il existe des éléments homogènes  $P_1(T), \dots, P_n(T)$  de  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$  d'ordres respectifs  $h_1, \dots, h_n$  tels que

$$k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) = k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}, h_1P_1(T)^{-1}, \dots, h_nP_n(T)^{-1}].$$

Puisque  $\mathbf{g}$  est dépendant de  $\rho(k)$ , il existe un entier non nul  $d$  et un élément non nul  $\alpha$  de  $k$  tels que  $\prod_{i=1}^n h_i^d = \rho(\alpha)$ . Le polynôme  $Q(T) = \prod_{i=1}^n P_i(T)^d - \alpha$  est donc un élément homogène de  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$ . Si son inverse appartenait à l'algèbre graduée  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}, h_1P_1(T)^{-1}, \dots, h_nP_n(T)^{-1}]$ , le polynôme  $Q$  serait multiple de l'un (au moins) des polynômes  $P_i$ . Par division euclidienne, ceci est impossible.  $\square$

Signalons que les éléments algébriques sur les corps du type  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ , où  $\mathbf{g}$  est une famille indépendante de  $\rho(k)$ , sont faciles à décrire.

**Lemme 2.10.** — Soient  $k$  un corps gradué et  $\mathbf{g}$  une famille d'éléments de  $G$  indépendante de  $\rho(k)$ . Tout élément algébrique sur  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  est le produit d'un élément algébrique sur  $k$  par une racine d'un polynôme de Kummer de la forme  $X^n - \mathbf{T}^{\mathbf{m}}$ , avec  $n \geq 1$  et  $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n$ .

En particulier, si le corps gradué  $k$  est algébriquement clos, toute extension finie  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  se plonge dans un corps gradué de la forme  $k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$ , où  $\mathbf{h}$  est une famille finie indépendante de  $\rho(k)$ .

*Démonstration.* — Soit  $x$  un élément algébrique sur  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ . Considérons son polynôme minimal unitaire  $P(X)$ , qui est un polynôme homogène. Son degré  $d$  est un entier non nul et son coefficient constant est un élément homogène non nul de  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ , donc de la forme  $\alpha \mathbf{T}^{\mathbf{m}}$  avec  $\alpha \in k^*$  et  $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n$ . Soit  $y$  une racine du polynôme de Kummer  $X^d - \mathbf{T}^{\mathbf{m}}$ . En divisant le polynôme  $P(X)$  par  $y^d$ , on montre que  $x/y$  est racine d'un polynôme homogène unitaire dont le coefficient constant est égal à  $\alpha$ . En utilisant l'homogénéité du polynôme et le fait que  $\mathbf{g}$  est indépendante de  $\rho(k)$ , on montre que tous ses coefficients appartiennent à  $k$ . Autrement dit,  $x/y$  est algébrique sur  $k$ .  $\square$

Démontrons maintenant l'analogie du Nullstellensatz pour les algèbres graduées.

**Corollaire 2.11 (Nullstellensatz gradué).** — Soit  $k$  un corps gradué. Soit  $K$  une  $k$ -algèbre graduée de type fini qui est un corps. Alors il existe une famille finie  $\mathbf{T}$  d'éléments homogènes de  $K$  dont la famille des ordres  $\mathbf{g}$  est indépendante de  $\rho(k)$  telle que  $K$  soit une extension finie de  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ .

En particulier, si le corps gradué  $k$  est algébriquement clos,  $K$  se plonge dans un corps de la forme  $k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$ , où  $\mathbf{h}$  est une famille finie indépendante de  $\rho(k)$ .

*Démonstration.* — Choisissons une famille maximale  $\mathbf{T}$  d'éléments homogènes de  $k$  algébriquement indépendants sur  $k$ . Notons  $\mathbf{g}$  la famille des ordres. Le corps  $K$  est une extension finie de  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ . D'après le théorème d'Artin-Tate appliqué aux  $k$ -algèbres graduées  $k \subset k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \subset K$ , le corps gradué  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  est de type fini, d'où l'assertion, compte tenu du lemme précédent.  $\square$

**Remarque 2.12.** — A. Ducros propose au théorème 2.7 de [Duc07] une version du Nullstellensatz pour les algèbres  $k$ -affinoïdes, où il donne une description explicite de celles qui sont des corps. La réduction d'une telle algèbre est une  $\tilde{k}$ -algèbre graduée de type fini et les corps gradués qui apparaissent dans le Nullstellensatz gradué sont exactement les réductions des corps qu'il appelle de type I. Si les réductions des autres, ceux de type II, sont absents de notre énoncé, c'est parce qu'ils sont des corps, mais non des corps valués (sauf lorsqu'ils sont

aussi de type I) et que leurs réductions ne sont pas des corps gradués, ni même d'ailleurs des anneaux gradués intègres.

Nous allons maintenant démontrer une propriété géométrique qui nous sera utile dans la suite du texte : une variété graduée intègre définie sur un corps algébriquement clos reste intègre après toute extension du corps de base. Commençons par un cas simple.

**Lemme 2.13.** — *Soient  $k$  un corps gradué et  $A$  une  $k$ -algèbre graduée intègre. Soit  $\mathbf{g}$  une famille d'éléments de  $G$  indépendante de  $\rho(k)$ . Alors l'algèbre graduée  $A \otimes_k k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$  est intègre.*

*Démonstration.* — En procédant par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour une famille  $\mathbf{g}$  réduite à un seul élément  $g$ . Dans ce cas, nous avons  $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \simeq k[g^{-1}T, gS]/(ST - 1)$  et donc

$$A \otimes_k k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \simeq A[g^{-1}T, gS]/(ST - 1) \simeq A[g^{-1}T, gT^{-1}].$$

Un raisonnement sur les coefficients dominants permet de montrer que cette dernière algèbre graduée est intègre.  $\square$

En utilisant le Nullstellensatz gradué, nous allons en déduire le cas général.

**Théorème 2.14.** — *Soient  $k$  un corps gradué algébriquement clos et  $A$  une  $k$ -algèbre graduée de type fini intègre. Alors, pour toute extension graduée  $K$  de  $k$ , l'algèbre graduée  $A \otimes_k K$  est intègre.*

*Démonstration.* — Écrivons l'algèbre  $A$  comme quotient d'un anneau de polynômes  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}] = k[g_1^{-1}T_1, \dots, g_r^{-1}T_r]$  par un idéal gradué  $I$ . Cet idéal est engendré par des éléments homogènes  $a_1, \dots, a_n$  de  $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$ .

Soit  $K$  une extension graduée de  $k$ . Nous pouvons supposer qu'elle est algébriquement close. Supposons, par l'absurde, que l'algèbre graduée  $A \otimes_k K = K[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]/(a_1, \dots, a_n)$  n'est pas intègre. Il existe alors des polynômes  $\mathbf{g}$ -homogènes  $P$  et  $Q$  n'appartenant pas à l'idéal  $(a_1, \dots, a_n)$  et des polynômes  $\mathbf{g}$ -homogènes  $b_1, \dots, b_n$  tels que l'on ait

$$PQ = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{ dans } K[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}].$$

Il existe une extension graduée  $L$  de  $K$  et un élément homogène  $\mathbf{x}$  de  $L^n$  tels que  $P(\mathbf{x}) \neq 0$  et, pour tout  $i$ ,  $a_i(\mathbf{x}) = 0$ . Il existe également un élément homogène  $y$ , que nous pouvons supposer appartenir au même  $L^n$ , tel que  $Q(y) \neq 0$  et, pour tout  $i$ ,  $a_i(y) = 0$ .

Soit  $B$  la sous-algèbre graduée de  $K(\mathbf{g}'^{-1}\mathbf{T}')$  engendrée sur  $k$  par les coordonnées de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{y}$ , par  $1/P(\mathbf{x})$ ,  $1/P(\mathbf{y})$ , ainsi que les coefficients des polynômes  $P$ ,  $Q$ ,  $b_1, \dots, b_n$ . Par le Nullstellensatz gradué, il existe une famille

finie  $\mathbf{h}$  d'éléments de  $G$ , indépendante de  $\rho(k)$ , et un morphisme  $\varphi : B \rightarrow k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$  qui induit l'identité sur  $k$ . Par construction, nous avons  $\varphi(P)(\mathbf{x}) \neq 0$ ,  $\varphi(Q)(\mathbf{y}) \neq 0$ , pour tout  $i$ ,  $a_i(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{y}) = 0$ , ainsi que l'égalité

$$\varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(b_i) \text{ dans } k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}].$$

On en déduit que l'anneau gradué  $A \otimes_k k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$  n'est pas intègre, ce qui contredit le lemme qui précède.  $\square$

### 3. Points universels

Dans cette section, nous nous intéressons aux morphismes d'extension des scalaires entre espaces analytiques, du type  $X_K \rightarrow X_k$ . Plus précisément, nous cherchons à comprendre sous quelles conditions les points de  $X_k$  peuvent se relever canoniquement à  $X_K$ .

Commençons par signaler qu'en ce qui concerne les normes sur les produits tensoriels de modules sur un anneau de Banach, nous suivons les conventions habituelles du domaine (cf [BGR84], §2.1.7 ou [Ber90], fin du §1.1) : si  $\mathcal{A}$  désigne un anneau de Banach et  $M$  et  $N$  deux  $\mathcal{A}$ -modules semi-normés, nous définissons une semi-norme sur le produit tensoriel  $M \otimes_{\mathcal{A}} N$  en posant, pour  $f$  dans  $M \otimes_{\mathcal{A}} N$ ,

$$\|f\| = \inf(\max_i(\|m_i\| \|n_i\|)),$$

la borne inférieure portant sur l'ensemble des représentations de  $f$  sous la forme  $\sum_i m_i \otimes n_i$ , avec  $m_i \in M$  et  $n_i \in N$ . Nous définissons ensuite une  $\mathcal{A}$ -algèbre de Banach  $M \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N$  en complétant  $M \otimes_{\mathcal{A}} N$  par rapport à cette semi-norme.

Démontrons, à présent, un lemme technique, qui nous sera utile à plusieurs reprises par la suite.

**Lemme 3.1.** — *Soient  $A \subset B$  des  $k$ -espaces de Banach. Soit  $C$  un  $k$ -espace de Banach. Alors l'injection canonique  $A \hat{\otimes}_k C \rightarrow B \hat{\otimes}_k C$  est une isométrie.*

*Démonstration.* — Si  $r$  est un nombre réel n'appartenant pas à  $\sqrt{|k^*|}$ , pour tout  $k$ -espace de Banach  $V$ , l'injection canonique  $V \rightarrow V \hat{\otimes}_k k_r$  est isométrique. Quitte à étendre les scalaires à  $k_r$ , avec  $r \notin \sqrt{|k^*|}$ , nous pouvons donc supposer que la valuation du corps  $k$  n'est pas triviale.

Il suffit de montrer que l'injection  $A \otimes_k C \rightarrow B \otimes_k C$  est une isométrie. Nous noterons  $\|\cdot\|_A$  et  $\|\cdot\|_B$  les normes tensorielles sur  $A \otimes_k C$  et  $B \otimes_k C$ . Soit  $f$  un élément de  $A \otimes_k C$ . Nous souhaitons montrer que  $\|f\|_A = \|f\|_B$  et, pour ce faire, il suffit de montrer que  $\|f\|_A \leq \|f\|_B$ , l'autre inégalité étant immédiate.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe des éléments  $b_1, \dots, b_d$  de  $B$  et  $c_1, \dots, c_d$  de  $C$  tels que

$$f = \sum_{n=1}^d b_n \otimes c_n \text{ dans } B \otimes C$$

et

$$\|f\|_B \leq \max_{1 \leq n \leq d} (\|b_n\| \|c_n\|) \leq \|f\|_B + \varepsilon.$$

Soit  $A_0$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $A$  tel que  $f \in A_0 \otimes_k C$ . Soit  $B_0$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $B$  contenant  $A_0$  et les  $b_i$ . Soit  $\alpha > 1$ . D'après [BGR84], proposition 2.6.2/3, il existe deux entiers  $s \geq r$  et une famille  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq r}$  d'éléments de  $B_0$  tels que  $(\beta_1, \dots, \beta_s)$  soit une base de  $A_0$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  soit une base  $\alpha$ -cartésienne de  $B_0$ . Rappelons que cette dernière condition signifie que pour tout élément  $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i \beta_i$  de  $B_0$ , nous avons

$$\max_{1 \leq i \leq r} (|\lambda_i| \|\beta_i\|) \leq \alpha \|v\|.$$

Écrivons chacun des  $b_n$  sous la forme  $b_n = \sum_{i=1}^r \lambda_{n,i} \beta_i$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq r} (\|b_n\| \|c_n\|) &\geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq n \leq d, 1 \leq i \leq r} (|\lambda_{n,i}| \|\beta_i\| \|c_n\|) \\ &\geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq n \leq d, 1 \leq i \leq s} (|\lambda_{n,i}| \|\beta_i\| \|c_n\|) \\ &\geq \alpha^{-1} \|f\|_A \end{aligned}$$

car  $f = \sum_{n=1}^d (\sum_{i=1}^s \lambda_{n,i} \beta_i) \otimes c_n$  dans  $A \otimes_k C$ . Par conséquent, nous avons

$$\|f\|_A \leq \alpha (\|f\|_B + \varepsilon).$$

En utilisant le fait que cette inégalité vaut pour tout  $\alpha > 1$ , puis pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit le résultat attendu.  $\square$

Précisons maintenant la notion de relèvement canonique évoquée plus haut.

**Définition 3.2.** — Une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire  $\mathcal{A}$  est dite **universelle** sur  $k$  si, pour toute extension valuée complète  $K$  de  $k$ , la norme de l'algèbre  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$  est multiplicative.

Soient  $\mathcal{A}$  une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire. On dit qu'un point  $x$  de  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est **universel** sur  $k$  si son corps résiduel complété  $\mathcal{H}(x)$  est universel sur  $k$ . Nous noterons  $X_u$  l'ensemble des points universels de  $X$  sur  $k$ .

Soient  $\mathcal{A}$  une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire. Soient  $x$  un point de  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  et  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . Si le point  $x$  est universel ou si le corps  $K$  est universel, nous disposons d'un point canonique de  $X_K$  au-dessus de  $x$  : celui qui correspond à la norme de l'algèbre  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$ . Nous le noterons  $\sigma_{K/k}(x)$ , ou simplement  $\sigma_K(x)$  si aucune confusion n'en résulte.

Remarquons que pour  $x \in X$  et  $k \subset L \subset K$ , lorsque ces quantités sont définies, nous avons  $\sigma_{K/k}(x) = \sigma_{K/L}(\sigma_{L/k}(x))$ .

**Remarque 3.3.** — Notre notion de point universel n'est autre que celle de « peaked point » définie par V. Berkovich dans [Ber90], §5.2 (qui note donc  $X_p$  l'ensemble que nous notons  $X_u$ ). Si la notion de pic rend bien compte du comportement du point dans sa fibre après extension des scalaires, elle nous semble trompeuse lorsque l'on s'intéresse à l'ensemble de ces points. Nous montrerons par exemple à la section suivante que, sur un corps algébriquement clos, tout point est un pic, ce qui est difficilement conciliable avec l'intuition.

Nous généralisons ici le lemme 5.2.6 et le corollaire 5.2.7 de [Ber90]. Rappelons tout d'abord une définition.

**Définition 3.4.** — *Un  $k$ -espace de Banach est dit de type fini (resp. de type dénombrable) sur  $k$  s'il contient un sous- $k$ -espace vectoriel dense de dimension finie (resp. dénombrable).*

Nous utiliserons surtout cette définition pour des extensions valuées complètes du corps  $k$ . C'est donc dans ce sens qu'il faudra entendre extension de type fini ou de type dénombrable du corps  $k$ .

**Lemme 3.5.** — *Soient  $\mathcal{A}$  une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire et  $B$  un  $k$ -espace de Banach. Soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k B$ . Pour tout point  $x$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , notons  $\|\cdot\|_{x,B}$  la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k B$ . Alors la fonction  $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \|\varphi\|_{x,B}$  est continue.*

*Démonstration.* — Par définition,  $\varphi$  est limite d'une suite d'éléments de  $\mathcal{A} \otimes_k B$ . Dans chacun de ces éléments n'intervient qu'un nombre fini d'éléments de  $B$ . Il existe donc un sous- $k$ -espace de Banach  $B_0$  de  $B$ , de type dénombrable sur  $k$ , tel que  $\varphi \in \mathcal{A} \hat{\otimes}_k B_0$ . D'après le lemme 5.2.6 de [Ber90], la fonction  $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \|\varphi\|_{x,B_0}$  est continue. Mais, par le lemme 3.1, pour tout point  $x$  de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ , nous avons  $\|\varphi\|_{x,B_0} = \|\varphi\|_{x,B}$ .  $\square$

**Corollaire 3.6.** — *Soient  $\mathcal{A}$  une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire et  $K$  une extension valuée complète (resp. universelle) du corps  $k$ . Notons  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . L'application  $\sigma_K : X_u \rightarrow X \hat{\otimes}_k K$  (resp.  $\sigma_K : X \rightarrow X \hat{\otimes}_k K$ ) est continue.*

**Remarque 3.7.** — Une autre possibilité pour définir l'universalité, peut-être plus naturelle, consisterait à demander qu'un point soit universel non pas lorsque sa norme est universellement multiplicative, mais lorsque son rayon spectral l'est. Nous ne sommes malheureusement pas parvenu à obtenir un analogue du corollaire 3.6 dans ce cadre.

Nous allons maintenant chercher des critères permettant d'assurer qu'un point est universel. Dans le résultat qui suit, nous étendons, dans certains cas, le

résultat de la proposition 5.2.5 de [Ber90]. Signalons que les réductions dont il est question ici sont les réductions graduées au sens de M. Temkin (cf. section 2).

**Proposition 3.8.** — *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Supposons que le corps  $k$  est stable et que  $\rho(A) \cap \sqrt{|k^*|} \subset |k^*|$ . Supposons que la réduction graduée  $\tilde{X}$  de l'espace  $k$ -affinoïde  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  est géométriquement intègre (au sens où pour toute extension graduée  $\tilde{K}$  de  $\tilde{k}$ , l'anneau gradué  $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K}$  est intègre). Alors le bord de Shilov de  $X$  est un singleton et son unique point est universel.*

*Démonstration.* — Nous pouvons supposer que l'algèbre  $\mathcal{A}$  est réduite. Puisque l'algèbre graduée  $\tilde{\mathcal{A}}$  est intègre, d'après [Tem04], proposition 3.3, le bord de Shilov de  $X$  est réduit à un point, que nous noterons  $\gamma$ . Soit  $K$  une extension valuée complète du corps  $k$ . Nous souhaitons montrer que la norme tensorielle sur l'algèbre  $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K$  est multiplicative.

Les hypothèses assurent qu'il existe un polyrayon  $k$ -libre  $\mathbf{r}$  tel que l'algèbre  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}}$  soit strictement  $k_{\mathbf{r}}$ -affinoïde et que  $\rho(\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}}) = |k_{\mathbf{r}}|$ .

Puisque le corps  $k$  est stable, le corps  $k_{\mathbf{r}}$  l'est aussi (cf. [Tem10], corollary 6.3.6 ou [Duc], théorème 3.3.16). L'algèbre  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}}$  est réduite et le théorème 6.4.3/1 de [BGR84] assure qu'elle est distinguée. Notons  $\gamma_{\mathbf{r}}$  l'unique point du bord de Shilov de  $X \hat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}}$ . Le morphisme naturel  $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k k_{\mathbf{r}} \rightarrow \mathcal{H}(\gamma_{\mathbf{r}})$  est un isomorphisme isométrique.

D'après la proposition 5.2.5 de [Ber90] (noter la correction apportée à sa preuve par le lemme 1.8 de [Duc09]), le point  $\gamma_{\mathbf{r}}$  est universel et la norme tensorielle sur l'algèbre  $\mathcal{H}(\gamma_{\mathbf{r}}) \hat{\otimes}_{k_{\mathbf{r}}} K_{\mathbf{r}}$  est donc multiplicative. Or  $\mathcal{H}(\gamma_{\mathbf{r}}) \hat{\otimes}_{k_{\mathbf{r}}} K_{\mathbf{r}} = (\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K) \hat{\otimes}_K K_{\mathbf{r}}$  et le lemme précédent utilisé avec  $K \subset K_{\mathbf{r}}$  permet de conclure.  $\square$

**Remarque 3.9.** — Le recours à un changement de base dans la preuve précédente peut sembler artificiel. Une méthode plus naturelle consisterait à utiliser une notion plus générale d'algèbre distinguée, autorisant des algèbres de Tate  $k\{r^{-1}\mathbf{T}\}$  avec des rayons arbitraires, et à prouver sur celle-ci les résultats classiques de [Bos69]. Signalons que des problèmes liés à cette question apparaissent déjà dans le cas strictement affinoïde puisque, pour  $r \in \sqrt{|k^*|} \setminus |k^*|$ , l'algèbre  $k\{r^{-1}\mathbf{T}\}$  n'est pas distinguée, mais le devient après extension des scalaires à  $k_r$ .

Il nous sera également possible d'obtenir des points universels comme limites de familles de points universels.

**Proposition 3.10.** — *Soit  $\mathcal{A}$  une  $k$ -algèbre de Banach commutative et unitaire. Tout point de  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  qui est limite d'une suite généralisée de points universels est universel.*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma$  un point de  $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ . Supposons qu'il existe un ensemble ordonné filtrant  $(I, <)$  et une suite généralisée  $(\gamma_i)_{i \in I}$  de points universels de  $X$  qui converge vers  $\gamma$ .

Soit  $K$  une extension valuée complète du corps  $k$ . Nous souhaitons montrer que la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K$  est multiplicative. D'après le lemme 3.1, il suffit de montrer que la norme tensorielle sur  $k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K$ , est multiplicative. Nous noterons  $\|\cdot\|_{\gamma, K}$  cette norme. Nous définissons de même une norme  $\|\cdot\|_{\gamma_i, K}$ , pour tout  $i$ .

D'après le lemme 3.5, pour tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$ , la suite généralisée  $\|\varphi\|_{\gamma_i, K}$  tend vers  $\|\varphi\|_{\gamma, K}$ . Puisque les normes  $\|\cdot\|_{\gamma_i, K}$  sont multiplicatives, la norme  $\|\cdot\|_{\gamma, K}$  est multiplicative sur  $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$ .

Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux éléments de  $k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K$ . Il existe des éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $\mathcal{A} \otimes_k K$  et des éléments  $u_1$  et  $u_2$  de  $\mathcal{A}$  ne s'annulant pas en  $\gamma$  tels que

$$f_1 = u_1^{-1}(\gamma)g_1 \text{ et } f_2 = u_2^{-1}(\gamma)g_2 \text{ dans } k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|f_1 f_2\|_{\gamma, K} &= \|u_1^{-1}(\gamma)u_2^{-1}(\gamma)g_1 g_2\|_{\gamma, K} \\ &= |u_1^{-1}(\gamma)u_2^{-1}(\gamma)| \|g_1 g_2\|_{\gamma, K} \\ &= |u_1^{-1}(\gamma)| |u_2^{-1}(\gamma)| \|g_1\|_{\gamma, K} \|g_2\|_{\gamma, K} \\ &= \|f_1\|_{\gamma, K} \|f_2\|_{\gamma, K}. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. □

**Remarque 3.11.** — Les notions et résultats de cette section s'étendent sans peine du cas des spectres de  $k$ -algèbres de Banach commutatives et unitaires à celui des espaces  $k$ -analytiques. Ainsi, un point  $x$  de  $X$  sera-t-il dit universel sur  $k$  si son corps résiduel complété  $\mathcal{H}(x)$  l'est. Quant au corollaire 3.6 et à la proposition 3.10, ils se généralisent aisément, car les résultats pour l'espace  $X$  découlent des mêmes résultats pour ses domaines affinoïdes.

#### 4. Points universels des disques

Dans cette section, nous nous consacrons plus spécifiquement aux points universels des disques. Par le biais de descriptions explicites et de fibrations, nous parviendrons à en exhiber certaines familles. Nous montrerons que les points des disques peuvent être définis sur des corps de type dénombrable.

Ainsi que nous l'avons vu à la proposition 3.8, un moyen commode de montrer qu'un point est universel consiste à le réaliser comme unique point du bord de Shilov d'un affinoïde bien choisi. Le résultat qui suit nous aidera à y parvenir.

**Lemme 4.1.** — *Supposons que la valuation du corps  $k$  n'est pas triviale. Soit  $X$  un espace strictement  $k$ -affinoïde équidimensionnel. Alors sa réduction  $\tilde{X}$  est équidimensionnelle et de même dimension.*

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{A}$  l'algèbre de l'espace  $X$ . Considérons une composante irréductible  $C$  de  $\tilde{X}$ . Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{A}^\circ$  dont la réduction  $\tilde{f}$  est nulle sur toutes les composantes irréductibles de  $\tilde{X}$  différentes de  $C$ , mais pas sur  $C$ . Considérons le domaine affinoïde  $V$  de  $X$  défini par  $\{|f| = 1\}$ . Il est de dimension  $\dim(X)$  et sa réduction aussi. Or, d'après [BGR84], proposition 7.2.6/3, sa réduction est isomorphe à  $D(\tilde{f})$ . On en déduit que la dimension de  $C$  vaut  $\dim(X)$ .  $\square$

**Lemme 4.2.** — *Soit  $\varphi : X \rightarrow S$  un morphisme d'espaces  $k$ -affinoïdes. Supposons que  $X$  est équidimensionnel, que  $S$  possède un unique point  $\gamma$  dans son bord de Shilov et que la fibre  $X_\gamma$  soit de dimension  $\dim(X) - \dim(S)$  et possède également un unique point  $\delta$  dans son bord de Shilov. Alors, le bord de Shilov de  $X$  est réduit au point  $\delta$ .*

*Démonstration.* — Quitte à étendre les scalaires à un corps  $k_r$ , où  $r$  désigne un polyrayon  $k$ -libre bien choisi, nous pouvons supposer que les espaces  $X$  et  $S$  sont strictement  $k$ -affinoïdes et que la valuation du corps  $k$  n'est pas triviale. Dans ce cas, d'après [Ber90], proposition 2.4.4, un point  $x$  de  $X$  appartient au bord de Shilov si, et seulement si, sa réduction  $\tilde{x}$  est un point générique de  $\tilde{X}$ , donc, d'après le lemme qui précède, si, et seulement si, le degré de transcendance sur  $\tilde{k}$  du corps  $\tilde{k}(\tilde{x})$  est égal à  $\dim(X)$ . En considérant le morphisme  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ , on se convainc aisément que le point  $\delta$  est le seul point pour lequel cette égalité peut avoir lieu. Puisque le bord de Shilov de  $X$  n'est pas vide, il est égal à  $\{\delta\}$ .  $\square$

Nous commencerons par étudier une certaine famille de points. Il sera pratique de leur donner un nom.

**Définition 4.3.** — *Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Un point  $x$  de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  sera appelé **point d'Abhyankar** s'il satisfait l'égalité  $s(x) + t(x) = p$ .*

**Lemme 4.4.** — *Soient  $r > 0$  et  $x$  un point de type 2 ou 3 de  $\mathbf{D}^1(r)$ . Il existe un polynôme  $P(T)$  à coefficients dans  $k$  et un nombre réel  $s \in ]0, r]$  tels que le domaine affinoïde défini par  $\{|P(T)| \leq s\}$  ait un bord de Shilov réduit au point  $x$ .*

*Démonstration.* — Si la valuation du corps  $k$  est triviale, ce résultat est immédiat. Supposons dorénavant que tel n'est pas le cas. Considérons une composante connexe  $C$  de  $\mathbf{D}^1(r) \setminus \{x\}$ . C'est un ouvert de  $\mathbf{D}^1(r)$  et il contient donc un point rigide  $y$  défini par l'annulation d'un polynôme  $P(T)$  à coefficients dans  $k$ . Pour tout  $s > 0$ , le domaine affinoïde défini par  $\{|P(T)| \leq s\}$  a toujours

un singleton pour bord de Shilov, car le polynôme  $P(T)$  est irréductible, et l'unique point de ce bord de Shilov parcourt, lorsque  $s$  décroît de  $+\infty$  à 0, l'unique chemin reliant le point de Gauß  $\eta_r$  au point  $y$ . Il existe donc une valeur de  $s$  pour lequel ce point est  $x$ .  $\square$

**Proposition 4.5.** — *Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Soit  $x$  un point d'Abhyankar de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ . Alors il existe un domaine affinoïde  $V$  de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  dont le bord de Shilov est réduit au point  $x$ . En outre, le domaine affinoïde  $V$  peut être défini sur un sous-corps de  $k$  de type fini sur  $k_p$ .*

*Démonstration.* — Démontrons ce résultat par récurrence sur l'entier  $p$ . Si  $p = 0$ , c'est évident.

Supposons le résultat vrai pour  $p$  et démontrons-le pour  $p + 1$ . Soit  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{p+1}) \in (\mathbf{R}_+^*)^{p+1}$ . Posons  $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_p)$ . Soit  $x$  un point d'Abhyankar de  $\mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r})$ . Considérons le morphisme de projection sur les  $p$  premières coordonnées  $\pi : \mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}')$ . L'image  $y$  de  $x$  par cette projection est un point d'Abhyankar de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}')$  et le point  $x$  est un point de type 2 ou 3 dans la fibre  $\pi^{-1}(y)$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}')$  dont le bord de Shilov est réduit au point  $y$ . Notons  $\mathcal{A}_W$  l'algèbre affinoïde associée. D'après le lemme qui précède, il existe un polynôme  $P$  à coefficients dans  $\mathcal{H}(y)$  et un nombre réel  $s > 0$  tels que le domaine affinoïde de  $\pi^{-1}(y)$  défini par  $\{|P| \leq s\}$  ait un bord de Shilov réduit au point  $x$ .

Chacun des coefficients du polynôme  $P$  est limite de quotients d'éléments de  $k\{T_1, \dots, T_p\}$  et même de  $k[T_1, \dots, T_p]$ . Il existe donc un polynôme  $Q$  à coefficients dans  $k[T_1, \dots, T_p]$  et un élément  $q$  de  $k[T_1, \dots, T_p]$ , non nul en  $y$ , tels que

$$\pi^{-1}(y) \cap \{|P| \leq s\} = \pi^{-1}(y) \cap \{|Q| \leq |q|s\} = \pi^{-1}(y) \cap \{|Q| \leq |q(y)|s\}.$$

Définissons un domaine affinoïde de  $\mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r})$  par

$$V = \pi^{-1}(W) \cap \{|Q| \leq |q(y)|s\}.$$

D'après le lemme 4.2, le bord de Shilov de cet affinoïde est réduit au point  $x$ .

L'assertion finale de l'énoncé est claire puisque, à chaque étape, on ne fait intervenir dans la construction qu'un nombre fini d'éléments de  $k$ , correspondant aux coefficients du polynôme  $Q$ .  $\square$

**Remarque 4.6.** — Dans le cas où le point  $x$  satisfait  $s(x) = p$ , la preuve montre que le domaine affinoïde  $V$  peut être choisi strictement affinoïde.

**Corollaire 4.7.** — *Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Soit  $x$  un point d'Abhyankar de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ . Il existe un sous-corps  $\ell$  de  $k$  de type dénombrable sur  $k_p$  vérifiant la*

propriété suivante : pour tout corps  $\ell'$  tel que  $\ell \subset \ell' \subset k$ , si  $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell'}^p(\mathbf{r})$  désigne le morphisme de changement de base, alors  $x$  est l'unique point du bord de Shilov de la fibre  $\pi^{-1}(\pi(x))$ .

*Démonstration.* — Considérons le domaine affinoïde  $V$  dont il est question dans la proposition précédente et  $\ell$  un sous-corps de  $k$  de type dénombrable sur  $k_p$  sur lequel il est défini. Il suffit de démontrer la propriété pour le corps  $\ell$ . Il existe un domaine affinoïde  $W$  de  $\mathbf{D}_\ell^p(\mathbf{r})$  tel que  $\pi^{-1}(W) = V$ . Le point  $\pi(x)$  appartient à  $W$  et tous les points de  $\pi^{-1}(\pi(x))$  appartiennent donc à  $V$ . Par conséquent, pour tout  $y \in \pi^{-1}(\pi(x))$ , nous avons

$$\forall P \in k[T_1, \dots, T_p], |P(y)| \leq \|P\|_V = |P(x)|.$$

Le point  $x$  est donc l'unique point du bord de Shilov de cette fibre.  $\square$

Nous allons maintenant démontrer un résultat analogue valant pour tous les points des disques, par une sorte de passage à la limite.

**Théorème 4.8.** — Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Alors l'ensemble des points d'Abhyankar est dense dans  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ .

En outre, pour tout point  $x$  de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ , il existe un sous-corps  $\ell$  de  $k$  de type dénombrable sur  $k_p$  vérifiant la propriété suivante : pour tout corps  $\ell'$  tel que  $\ell \subset \ell' \subset k$ , si  $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell'}^p(\mathbf{r})$  désigne le morphisme de changement de base, alors  $x$  est l'unique point du bord de Shilov de la fibre  $\pi^{-1}(\pi(x))$ .

*Démonstration.* — Soit  $x$  un point de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ . Nous allons démontrer que  $x$  appartient à l'adhérence de l'ensemble des points d'Abhyankar et vérifie la seconde propriété par récurrence sur la quantité  $p - s(x) - t(x)$ . Si elle est nulle, le point  $x$  est un point d'Abhyankar et le corollaire 4.7 permet de conclure.

Soit  $m \in \mathbf{N}$  et supposons avoir démontré le résultat lorsque  $p - s(x) + t(x) = m$ . Soient  $p \in \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_p) \in (\mathbf{R}_+^*)^p$  et  $x$  un point de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  tel que  $p - s(x) - t(x) = m + 1$ . Posons  $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_{p-1})$  et notons  $\varphi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_k^{p-1}(\mathbf{r}')$  le morphisme de projection sur les  $p - 1$  premières coordonnées. Posons  $y = \varphi(x)$ . Puisque  $s(x) + t(x) < p$ , quitte à réordonner les variables, nous pouvons donc supposer que  $s(y) + t(y) = s(x) + t(x)$ .

Plaçons-nous un moment dans la fibre  $\varphi^{-1}(y) \simeq \mathbf{D}_{\mathcal{H}(y)}^1(r_p)$ . Il existe une suite de polynômes  $(P_n(T_p))_{n \geq 0}$  à coefficients dans  $\mathcal{H}(y)$  et une suite de nombres réels strictement positifs  $(r_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout  $n$ , le domaine affinoïde  $V_n$  de  $\mathbf{D}_{\mathcal{H}(y)}^1(r_p)$  défini par  $\{|P_n| \leq r_n\}$  contient  $x$  ;
2. pour tout  $n$ , le bord de Shilov de  $V_n$  est réduit à un point, que nous noterons  $\gamma_n$  ;
3. la suite d'affinoïdes  $(V_n)_{n \geq 0}$  est décroissante ;

4. la suite  $(\gamma_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $x$ .

Pour tout  $n$ , le point  $\gamma(n)$  est de type 2 ou 3 dans  $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(y)}^{1, \text{an}}$ . Vu dans  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ , ce point vérifie satisfait donc  $s(\gamma_n) + t(\gamma_n) = s(y) + t(y) + 1$ , autrement dit,  $p - s(\gamma_n) - t(\gamma_n) = m$ . Par hypothèse de récurrence, chacun des points  $\gamma_n$  est dans l'adhérence de l'ensemble des points de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  vérifiant  $s + t = p$ . Il en est donc de même pour  $x$ .

Passons maintenant à la seconde partie du résultat. Les éléments de  $\mathcal{H}(y)$  étant limites de quotients d'éléments de  $k[T_1, \dots, T_{p-1}]$ , en procédant comme dans la preuve de la proposition 4.5, nous pouvons supposer que les coefficients des polynômes  $P_n(T_p)$  appartiennent à  $k[T_1, \dots, T_{p-1}]$ . Il existe donc un sous-corps  $\ell_0$  de  $k$  de type dénombrable sur  $k_p$  tel que tous les polynômes  $P_n$  appartiennent à  $\ell_0[T_1, \dots, T_p]$ . En outre, nous avons  $(p-1) - s(y) - t(y) = m$ . Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-corps  $\ell$  de  $k$  de type dénombrable sur  $k_p$  tel que si  $\pi' : \mathbf{D}_k^{p-1}(\mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{D}_\ell^{p-1}(\mathbf{r}')$  désigne le morphisme de changement de base, alors  $y$  est l'unique point du bord de Shilov de la fibre  $\pi'^{-1}(\pi'(y))$ . Nous pouvons supposer que  $\ell$  contient  $\ell_0$ .

Il suffit de démontrer le résultat pour le corps  $\ell$ . Notons  $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_\ell^p(\mathbf{r})$  le morphisme de changement de base. Soit  $z$  un point du bord de Shilov de  $\pi^{-1}(\pi(x))$ . Alors  $\varphi(z)$  doit être un point du bord de Shilov de  $\pi'^{-1}(\pi'(y))$ , donc  $\varphi(z) = y$ . Pour tout  $n$ , il existe un domaine affinoïde  $W_n$  de  $\mathbf{D}_\ell^p(\mathbf{r})$  tel que  $\pi^{-1}(W_n) = V_n$ . Pour tout  $n$ , le point  $\pi(x)$  appartient à  $W_n$  et le point  $z$  appartient donc à  $V_n$ . Par conséquent, pour tout  $P \in k[T_1, \dots, T_p]$ , nous avons

$$|P(z)| \leq \inf_{n \geq 0} (\|P\|_{V_n \cap \varphi^{-1}(y)}) = \inf_{n \geq 0} (|P(\gamma_n)|) = |P(x)|.$$

Le point  $x$  est donc l'unique point du bord de Shilov de cette fibre de  $\pi^{-1}(\pi(x))$ .  $\square$

**Corollaire 4.9.** — Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Alors tout point de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  est universel.

*Démonstration.* — Pour les points d'Abhyankar, le résultat découle des propositions 4.5, 3.8 et du théorème 2.14. Pour les autres, on l'obtient grâce à la densité démontrée précédemment et la proposition 3.10.  $\square$

**Corollaire 4.10.** — Tout point d'un espace analytique sur un corps algébriquement clos est universel.

**Corollaire 4.11.** — Soient  $X$  un espace  $k$ -analytique et  $x$  un point de  $X$ . Notons  $F$  le complété d'une clôture algébrique de  $k$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) le point  $x$  est universel;

*ii) la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k F$  est multiplicative ;*

*Démonstration.* — L'implication  $i) \implies ii)$  est immédiate.

Montrons que  $ii) \implies i)$  et, pour cela, supposons que la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k F$  est multiplicative. Dans ce cas, la fibre du morphisme  $X_F \rightarrow X_k$  au-dessus de  $x$  possède un unique point  $x_F$  dans son bord de Shilov et le morphisme d'évaluation  $\mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k F \rightarrow \mathcal{H}(x_F)$  est une isométrie.

Soit  $K$  une extension valuée complète de  $k$ . Nous voulons montrer que la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k K$  est multiplicative. D'après le lemme 3.1, quitte à remplacer le corps  $K$  par le complété de sa clôture algébrique, nous pouvons supposer qu'il est algébriquement clos. Nous pouvons donc supposer qu'il contient le corps  $F$ . D'après le corollaire qui précède, le point  $x_F$  est universel et la norme tensorielle sur  $\mathcal{H}(x_F)\hat{\otimes}_F K$  est multiplicative. En utilisant de nouveau le lemme 3.1, on en déduit que la norme tensorielle sur  $(\mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k F)\hat{\otimes}_F K = \mathcal{H}(x)\hat{\otimes}_k K$  est multiplicative.  $\square$

## 5. Applications à la topologie des espaces de Berkovich

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences topologiques des résultats que nous avons démontré, ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction. Le résultat dont découleront tous les autres est celui qui assure qu'un point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie. Les espaces topologiques vérifiant cette propriété portent un nom.

**Définition 5.1.** — *Un espace topologique  $X$  est dit de Fréchet-Urysohn si pour toute partie  $A$  de  $X$ , tout point de l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est limite d'une suite de points de  $A$ .*

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux disques définis sur un corps algébriquement clos, afin de pouvoir utiliser directement les résultats de la section 4.

**Proposition 5.2.** — *Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Alors l'espace  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  est un espace de Fréchet-Urysohn.*

*Démonstration.* — Soient  $A$  une partie de  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ , que nous pouvons supposer non vide, et  $x$  un point adhérent à  $A$ . Nous voulons montrer que le point  $x$  est limite d'une suite de points de  $A$ . Considérons le sous-corps  $\ell$  de  $k$  associé à ce point par le théorème 4.8. C'est une extension de type dénombrable fini du sous-corps premier  $k_p$  de  $k$ .

Pour tout entier  $n \geq 0$ , nous allons construire par récurrence un corps  $\ell_n$ , une suite décroissante  $(V_n^{(m)})_{m \geq 0}$  de parties de  $\mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r})$  et des points  $x_n$  et  $y_n$  de  $\mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r})$  qui vérifient les propriétés suivantes : pour tout  $n \geq 0$ ,

- i) le corps  $\ell_n$  est un sous-corps algébriquement clos de  $k$  de type dénombrable sur  $\ell$  (et donc sur  $k_p$ );
- ii) le point  $x_n$  est le projeté du point  $x$  sur  $\mathbf{D}_{\ell_n}^p$ ;
- iii) la suite  $(V_n^{(m)})_{m \geq 0}$  forme un système fondamental de voisinages du point  $x_n$ ;
- iv) le point  $y_n$  est rationnel sur  $\ell_n$ , appartient à  $V_n^{(n)}$  et est le projeté d'un point  $y'_n$  de  $A$ ;

et, pour tous  $n' \geq n \geq 0$ ,

- v)  $\ell_n \subset \ell_{n'}$  (nous noterons  $\pi_{n',n} : \mathbf{D}_{\ell_{n'}}^p \rightarrow \mathbf{D}_{\ell_n}^p$  la projection associée);
- vi) pour tout  $m \geq 0$ ,  $V_{n'}^{(m)} \subset \pi_{n',n}^{-1}(V_n^{(m)})$ .

Initialisons la récurrence. Pour cela, on choisit un point  $y'_0$  de  $A$ . Il existe un sous-corps  $\ell_0$  de  $k$  de type dénombrable sur  $\ell$  qui contient le corps associé au point  $y'_0$  par le théorème 4.8. Notons  $y_0$  la projection de ce point sur  $\mathbf{D}_{\ell_0}^p$ . Quitte à remplacer  $\ell_0$  par le complété de sa fermeture algébrique dans  $k$ , nous pouvons supposer que c'est un corps algébriquement clos. Posons  $V_0^{(0)} = \mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$  et notons  $x_0$  le projeté du point  $x$  sur  $\mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$ . On choisit ensuite une suite décroissante  $(V_0^{(m)})_{m \geq 1}$  de parties de  $\mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$  qui forme un système fondamental de voisinages du point  $x_0$ .

Soit  $n \geq 0$  et supposons avoir construit les objets du rang 0 au rang  $n$  de sorte qu'ils vérifient les propriétés demandées. La partie  $V_n^{(n+1)}$  de  $\mathbf{D}_{\ell_n}^p$  est un voisinage de  $x_n$ . Son image réciproque dans  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$  est un voisinage de  $x$  et elle contient donc un point  $y'_{n+1}$  de  $A$ . Il existe un sous-corps  $\ell_{n+1}$  de  $k$  de type dénombrable sur  $\ell_n$  (et donc sur  $\ell$ ) qui contient le corps associé au point  $y'_{n+1}$  par le théorème 4.8. Notons  $y_{n+1}$  la projection de ce point sur  $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$ . Quitte à remplacer  $\ell_{n+1}$  par le complété de sa fermeture algébrique dans  $k$ , nous pouvons supposer que c'est un corps algébriquement clos. Pour  $m \leq n+1$ , posons  $V_{n+1}^{(m)} = \pi_{n+1,n}^{-1}(V_n^{(m)})$ . Notons  $x_{n+1}$  le projeté du point  $x$  sur  $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$ . Nous choisissons ensuite une suite décroissante  $(W_{n+1}^{(m)})_{m \geq n+2}$  de parties de  $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$  qui forme un système fondamental de voisinages du point  $x_{n+1}$ . Finalement, pour  $m \geq n+2$ , nous posons  $V_{n+1}^{(m)} = W_{n+1}^{(m)} \cap \pi_{n+1,n}^{-1}(V_n^{(m)})$ .

Notons  $\ell'_\infty$  le sous-corps de  $k$  engendré par les  $\ell_n$ , pour  $n \geq 0$ , et  $\ell_\infty$  son complété. Ces deux corps sont algébriquement clos. Notons  $x_\infty$  le projeté du point  $x$  sur  $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$ . Pour  $n \geq 0$ , nous noterons  $z_n$  le projeté du point  $y'_n$  sur  $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$  et  $\pi_n : \mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$  le morphisme de changement de base. Soit  $U$  un voisinage de  $x_\infty$  dans  $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$ . Il existe un entier  $n'$  et un voisinage  $V$  de  $\pi_{n'}(x_\infty) = x_{n'}$  dans  $\mathbf{D}_{\ell_{n'}}^p(\mathbf{r})$  tel que  $\pi_{n'}^{-1}(V) = U$ . Il existe donc un entier  $n'' \geq n'$  tel que  $V_{n'}^{(n'')} \subset V$ . Par conséquent, quel que soit  $n \geq n''$ , nous avons  $\pi_n^{-1}(V_n^{(n)}) \subset U$  et donc  $z_n \in U$ . La suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$  converge donc

vers  $x_\infty$ .

D'après le corollaire 4.9, les points  $z_n$  et le point  $x_\infty$  sont universels sur  $\ell_\infty$ . On déduit du corollaire 3.6 que la suite  $(\sigma_k(z_n))_{n \geq 0}$  tend vers  $\sigma_k(x_\infty)$ . Or, pour tout  $n$ ,  $\sigma_k(z_n) = y'_n$ , car  $\ell_\infty$  contient  $\ell_n$  et  $\sigma_k(x_\infty) = x$ , car  $\ell_\infty$  contient  $\ell$ .  $\square$

**Théorème 5.3.** — *Tout espace  $k$ -analytique est un espace de Fréchet-Urysohn.*

*Démonstration.* — Soient  $X$  un espace  $k$ -analytique et  $A$  une partie de  $X$ . Nous souhaitons montrer que tout point adhérent à  $A$  est limite d'une suite de points de  $A$ .

Soit  $K$  une extension algébriquement close du corps  $k$ . Notons  $\pi : X \hat{\otimes}_k K \rightarrow X$  le morphisme de changement de base. Il suffit de démontrer le résultat pour l'espace  $X \hat{\otimes}_k K$  et la partie  $\pi^{-1}(A)$ . En effet, le morphisme  $\pi$ , en tant que morphisme topologiquement propre entre espaces localement compacts, est fermé. Tout point adhérent  $x$  à  $A$  possède donc un préimage  $y$  dans l'adhérence de  $\pi^{-1}(A)$ . S'il existe une suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  de points de  $\pi^{-1}(A)$  qui tend vers  $y$ , alors la suite  $(\pi(y_n))_{n \geq 0}$  tend vers  $x$ . Nous pouvons donc supposer que le corps  $k$  est algébriquement clos.

Soit  $x$  un point adhérent à  $A$ . Il possède un voisinage qui est réunion finie de domaines affinoïdes. Quitte à remplacer  $X$  par l'un de ces affinoïdes et  $A$  par sa trace sur icelui, nous pouvons supposer que  $X$  est affinoïde. C'est donc un fermé de Zariski d'un disque et nous pouvons finalement supposer que  $X = \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ . Nous concluons alors par la proposition 5.2.  $\square$

Les espaces de Fréchet-Urysohn font partie des espaces dits séquentiels : les parties ouvertes et fermées peuvent y être caractérisées par des suites, dans le sens que nous précisons ci-dessous.

**Définition 5.4.** — *Soit  $X$  un espace topologique.*

- i) Une partie  $A$  de  $X$  est dite **séquentiellement ouverte** si toute suite d'éléments de  $X$  qui converge vers un point de  $A$  ne possède qu'un nombre fini de termes hors de  $A$ .*
- ii) Une partie  $A$  de  $X$  est dite **séquentiellement fermée** si tout point de  $X$  qui est limite d'une suite d'éléments de  $A$  appartient à  $A$ .*

**Corollaire 5.5.** — *Soient  $X$  un espace  $k$ -analytique et  $A$  une partie de  $X$ .*

- i) La partie  $A$  est ouverte si, et seulement si, elle est séquentiellement ouverte.*
- ii) La partie  $A$  est fermée si, et seulement si, elle est séquentiellement fermée.*

Pour d'autres résultats sur les espaces de Fréchet-Urysohn et les espaces séquentiels, nous renvoyons à l'article [Fra65]. S. P. Franklin y démontre notamment que tout espace séquentiel est quotient d'un espace métrique. Ce résultat vaut donc en particulier pour les espaces  $k$ -analytiques.

En combinant les théorèmes 5.3 et 4.8, nous obtenons le résultat suivant.

**Corollaire 5.6.** — *Soient  $p \in \mathbf{N}$  et  $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ . L'ensemble des points d'Abhyankar est séquentiellement dense dans  $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ .*

Ce résultat se généralise.

**Corollaire 5.7.** — *Soit  $X$  un espace strictement  $k$ -analytique. Tout point de  $X$  est limite d'une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  vérifiant*

$$\forall n \geq 0, s(x_n) + t(x_n) = \dim_{x_n}(X).$$

*Démonstration.* — On se ramène au cas des espaces strictement  $k$ -affinoïdes irréductibles, puis à celui des disques en utilisant la normalisation de Noether.  $\square$

Énonçons un autre corollaire frappant. Signalons qu'il est utilisé de façon essentielle dans la preuve de l'analogie ultramétrique du théorème de Montel par C. Favre, J. Kiwi et E. Trucco (cf. [FKT]).

**Corollaire 5.8.** — *Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique. Toute partie compacte de  $X$  est séquentiellement compacte.*

*Démonstration.* — Soit  $A$  une partie compacte de  $X$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de points de  $A$ . L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est un compact non vide et on conclut par le théorème 5.3.  $\square$

Pour finir, nous allons montrer que les espaces  $k$ -analytiques satisfont une propriété supplémentaire, celle d'être angéliques. Rappelons tout d'abord qu'un espace topologique est dit  $\omega$ -compact lorsqu'il est séparé et que toute suite possède une valeur d'adhérence. Cette dernière condition équivaut à demander que de tout recouvrement ouvert dénombrable, on puisse extraire un recouvrement fini. En analyse fonctionnelle, le théorème d'Eberlein-Šmulian assure que les notions de compacité, compacité séquentielle et  $\omega$ -compacité sont équivalentes pour les parties d'un espace de Banach réel muni de la topologie faible. La propriété d'être angélique généralise les conclusions de ce théorème et A. Grothendieck a notamment montré dans [Gro52], que l'espace  $\mathcal{C}(K)$  muni de la convergence ponctuelle est angélique, lorsque  $K$  est un espace  $\omega$ -compact. Nous renvoyons à l'ouvrage [Flo80] pour plus d'informations sur cette notion.

**Définition 5.9.** — *Un espace topologique  $X$  est dit **angélique** si, pour tout partie relativement  $\omega$ -compacte  $A$  de  $X$ , nous avons*

- i)  $A$  est relativement compacte ;*
- ii) tout point de l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$  est limite d'une suite de points de  $A$ .*

**Proposition 5.10.** — *Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique dont la topologie est séparée. Toute partie  $\omega$ -compacte de  $X$  est fermée.*

*Démonstration.* — Soient  $A$  une partie  $\omega$ -compacte de  $X$  et  $x$  un point de  $\bar{A}$ . D'après le théorème 5.3, il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de  $A$  qui tend vers  $x$ . Puisque  $A$  est  $\omega$ -compacte, le point  $x$ , qui est l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ , appartient à  $A$ . On en déduit que  $A = \bar{A}$ .  $\square$

**Corollaire 5.11.** — *Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $X$  telles que  $A \subset B$ . Supposons que  $A$  est  $\omega$ -compacte et  $B$  compacte. Alors  $A$  est compacte.*

**Corollaire 5.12.** — *Soit  $X$  un espace  $k$ -analytique paracompact. Toute partie  $\omega$ -compacte de  $X$  est compacte.*

*Démonstration.* — Soit  $A$  une partie  $\omega$ -compacte de  $X$ . L'espace  $X$  étant localement connexe, ses composantes connexes sont ouvertes. Puisque la partie  $A$  est  $\omega$ -compacte, elle ne peut couper qu'un nombre fini de ces composantes. Nous pouvons donc supposer que  $X$  possède un nombre fini de composantes connexes.

Puisque  $X$  est localement compact et paracompact, d'après [Bou71], I, §10, théorème 5, il existe une suite  $(K_n)_{n \geq 0}$  de parties compactes de  $X$  dont la réunion recouvre  $X$ . Puisque  $X$  est localement compact, d'après *ibid.*, I, §9, proposition 15, nous pouvons supposer que, pour tout  $n$ , on ait  $K_n \subset K_{n+1}$ . Puisque  $A$  est  $\omega$ -compacte, il existe un entier  $N$  tel que  $A \subset K_N$ . On conclut alors par le théorème précédent.  $\square$

En combinant le théorème 5.3 et le corollaire 5.12, nous obtenons le résultat voulu.

**Théorème 5.13.** — *Toute partie d'un espace  $k$ -analytique paracompact est angélique.*

**Remarque 5.14.** — Pour un espace  $k$ -analytique dont la topologie est séparée, la paracompacité est fréquemment vérifiée en pratique : c'est notamment le cas des courbes analytiques ainsi que des analytifiées de variétés algébriques.

## Références

- [AT51] Emil Artin and John T. Tate. A note on finite ring extensions. *J. Math. Soc. Japan*, 3 :74–77, 1951.
- [Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

- [Ber99] Vladimir G. Berkovich. Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible. *Invent. Math.*, 137(1) :1–84, 1999.
- [BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [Bos69] S. Bosch. Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Manuscr. Math.*, 1 :35–57, 1969.
- [Bou71] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [BR10] Matthew Baker and Robert Rumely. *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, volume 159 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Duc] Antoine Ducros. La structure des courbes analytiques. En préparation.
- [Duc07] Antoine Ducros. Variation de la dimension relative en géométrie analytique  $p$ -adique. *Compos. Math.*, 143(6) :1511–1532, 2007.
- [Duc09] Antoine Ducros. Les espaces de Berkovich sont excellents. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(4) :1443–1552, 2009.
- [Fab] Xander Faber. Topology and Geometry of the Berkovich Ramification Locus for Rational Functions. Prépublication disponible à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1102.1432>.
- [Fav] Charles Favre. Countability properties of some Berkovich spaces. Prépublication disponible à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1103.6233>.
- [FKT] Charles Favre, Jan Kiwi, and Eugenio Trucco. A non-archimedean Montel's theorem. Prépublication.
- [Flo80] Klaus Floret. *Weakly compact sets*, volume 801 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980. Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978.
- [Fra65] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice. *Fund. Math.*, 57 :107–115, 1965.
- [Gro52] A. Grothendieck. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math.*, 74 :168–186, 1952.
- [HL] Ehud Hrushovski and François Loeser. Non-archimedean tame topology and stably dominated types. Prépublication disponible à l'adresse <http://arxiv.org/abs/1009.0252>.
- [Tem04] Michael Temkin. On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II. *Israel J. Math.*, 140 :1–27, 2004.
- [Tem10] Michael Temkin. Stable modification of relative curves. *J. Algebraic Geom.*, 19(4) :603–677, 2010.

---

2 mai 2011

JÉRÔME POINEAU, Institut de recherche mathématique avancée, 7, rue René Descartes, 67084  
Strasbourg, France • *E-mail* : [jerome.poineau@math.unistra.fr](mailto:jerome.poineau@math.unistra.fr)